Intégration

Exercice 1 – Fonction sur $\mathbb{R}^2$. Étudiez l'ensemble de définition et la continuité des fonctions suivantes en *la* variable $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

a) $(x,t) \mapsto \sin(x\,t)\ln(1+x\,e^{\,t})$

b) $(x,t) \mapsto \dfrac{\exp(-t)\,|xt|}{x^2+2k\,xt+t^2}$ avec $k \in \,]-1\,,1\,[$.

Exercice 2 – Intégration à paramètre sur un segment (Examen Juin 2004). Soit F la fonction

$$\mathrm{F}\colon \begin{cases} [\,0\,,+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \quad \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x\,e^{\,t})\mathrm{d}t\,. \end{cases}$$

a) Montrer que $\mathrm{F}(x)$ est bien défini pour tout $x \in [\,0\,,+\infty\,[$.

b) Montrer que la fonction F est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$ (On vérifiera les hypothèses du théorème utilisé).

c) Donner une expression de $\mathrm{F}'(x)$ sans intégrale pour tout $x \in [\,0\,,+\infty\,[$.

Exercice 3 – Intégration à paramètre sur un segment (Partiel Avril 2005). Soient f et F les fonctions définies par

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}\times\,]\,0\,,+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (x,y) \quad \longmapsto \dfrac{e^{xy^2}}{y} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_1^2 f(x,t)\mathrm{d}t\,. \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}\times\,]\,0\,,+\infty\,[$. Peut-on en déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$?

b) Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Établir que

$$\forall\, x \neq 0, \qquad \mathrm{F}'(x) = \frac{e^x}{2x}(e^{3x}-1)\,.$$

Exercice 4 – Intégration à paramètre sur un segment. Soient $a>1$ et $b>1$. L'objectif est de calculer

$$\int_0^\pi \ln\left(\frac{a+\cos t}{b+\cos t}\right)\mathrm{d}t\,.$$

Considérons la fonction F

$$\mathrm{F}\colon \begin{cases}]\,1\,,+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \quad \longmapsto \displaystyle\int_0^\pi \ln(x+\cos t)\mathrm{d}t\,. \end{cases}$$

a) Montrer que $\mathrm{F}(x)$ est bien défini pour tout $x \in\,]\,1\,,+\infty\,[$.

b) Montrer que la fonction F est dérivable sur $]\,1\,,+\infty\,[$.

c) Donner une expression de $\mathrm{F}'(x)$ sans intégrale (penser au changement de variable $u=\tan(t/2)$).

d) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2-1})$. En déduire la valeur de l'intégrale cherchée.

Exercice 5 – Intégration à paramètre sur un segment. Soient $0<a\leqslant 1$, f et F les fonctions

$$f\colon \begin{cases}]\,0\,,+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \quad \longmapsto \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1+ax}\right) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}\colon \begin{cases} [\,0\,,+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \quad \longmapsto \displaystyle\int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x+t)}{t}\mathrm{d}t\,. \end{cases}$$

a) Montrer que f se prolonge par continuité en $x = 0$. On note encore f la nouvelle fonction définie sur $[\,0\,,+\infty\,[$.

b) Montrer que la fonction F est continue sur $[\,0\,,+\infty\,[$ et calculer $\mathrm{F}(0)$.

c) Montrer que F est dérivable sur $]\,0\,,+\infty\,[$ et calculer $\mathrm{F}'(x)$.

d) Montrer que $\mathrm{F}(x) = \dfrac{\ln^2(a)}{2} + \displaystyle\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$.

Exercice 6 — Intégration à paramètre (Partiel Avril 2004). Soient F et G les fonctions

$$\mathrm{F}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2 t}\right)\mathrm{d}t \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \left(\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u\right)^2 \end{cases}.$$

a) Montrer que $\mathrm{F}(x)$ et $\mathrm{G}(x)$ sont bien définis pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{F}'(x) = -2x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\left(-\frac{x^2}{\cos^2 t}\right)}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u$$

c) En effectuant le changement de variable $u = x\tan t$ dans la deuxième intégrale, montrer que $\mathrm{G}'(x) = -\mathrm{F}'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est constante. Calculer cette constante.

d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \left[\,0\,,\dfrac{\pi}{4}\,\right]$

$$0 \leqslant \exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2 t}\right) \leqslant e^{-x^2}.$$

e) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 0$ et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u$.

Exercice 7 — Intégration à paramètre généralisée (Examen Septembre 2004). Soit F la fonction

$$\mathrm{F}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\sin(xt)\mathrm{d}t\,. \end{cases}$$

a) Montrer que $\mathrm{F}(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (On vérifiera soigneusement les hypothèses du théorème utilisé).

c) Calculer $\mathrm{F}'(0)$.

Exercice 8 — Intégration à paramètre généralisée (Partiel Avril 2004). Soient f la fonction

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{1+t^2}\sin\left(\dfrac{t}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

et Δ la droite d'équation $x = 0$.

a) Montrer que $f_{|\Delta}$ de la fonction f à Δ est continue. Peut-on en déduire que la fonction f est continue en tout point de Δ ?

b) Montrer que la fonction $f_{|\mathbb{R}^2\smallsetminus\Delta}$ de la fonction f à $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \Delta$ est continue. Peut-on en déduire que la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \Delta$?

c) Montrer que

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad |f(x,t)| \leqslant |x|\,.$$

En déduire que $\qquad \forall\,(0,t_0) \in \Delta, \qquad \displaystyle\lim_{(x,t)\in\mathbb{R}^2\to(0,t_0)} f(x,t) = 0\,.$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

d) On pose

$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t\,.$$

Pour tout réel $\alpha > 0$, montrer que la fonction F est définie et continue sur l'intervalle $\mathrm{I}_\alpha = \,]-\alpha\,,\alpha\,[$. La fonction F est-elle définie et continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9 – Intégration à paramètre généralisée (Examen Juin 2005). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto \dfrac{\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,. \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Que signifie la phrase : « L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)\mathrm{d}t$ est dominée sur $\mathbb{R}$. » ? Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$ est dominée sur $\mathbb{R}$.

c) Énoncer deux autres faits impliquant, avec ceux mentionnés dans les questions précédentes, que la fonction

$$\mathrm{F}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

est bien une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer ces deux derniers faits.

d) Établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Exercice 10 – Intégration à paramètre généralisée. Soit F la fonction

$$\mathrm{F}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t\,. \end{cases}$$

a) Déterminer l'intervalle de définition de F.

b) Montrer que la fonction F est dérivable sur son intervalle de définition.

c) Exprimer $\mathrm{F}'(\alpha)$ sous forme d'une intégrale.

Exercice 11 – Intégration à paramètre généralisée (Partiel Avril 2005). Soit φ la fonction

$$\varphi\colon \begin{cases} [\,0\,,+\infty\,[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \dfrac{\arctan t}{t} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}.$$

Pour $x \geqslant 0$, on pose

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\varphi(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

a) Montrer que φ est continue sur $[\,0\,,+\infty\,[$.

b) Montrer que F est bien définie et continûment dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$.

c) Montrer que, pour $x \in \,]\,0\,,1\,[\,\cup\,]\,1\,,+\infty\,[$,

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}\,.$$

Indication : montrer que

$$\forall\, x \in [\,0\,,+\infty\,[\,\smallsetminus\{1\}, \quad \forall\, t \geqslant 0, \qquad \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+t^2x^2}\right).$$

d) Cette expression est-elle encore valide pour $x = 0$? $x = 1$? (On répondra sans effectuer le moindre calcul.)

e) Déduire de ce qui précède une expression de $\mathrm{F}(x)$ sans intégrale.

Exercice 12 — Transformée de Fourier d'une Gaussienne. Soit F la fonction

$$\mathrm{F}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2tx)\,\mathrm{d}t\,. \end{cases}$$

a) Montrer que $\mathrm{F}(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée à l'aide d'une intégrale.

c) En intégrant par partie, montrer que $\mathrm{F}'(x) = -2x\mathrm{F}(x)$.

d) En déduire F (Utiliser la valeur de $\mathrm{F}(0)$ obtenue à l'exercice 6).

Exercice 13 — Moments d'une Gaussienne. On rappelle que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

On définit

$$\mathrm{F}\colon \begin{cases}]\,0\,,+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\mathrm{d}t \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}\colon \begin{cases}]\,0\,,+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-\alpha t^2}\mathrm{d}t\,. \end{cases}$$

a) Montrer que $\mathrm{F}(\alpha)$ est bien défini pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et calculer $\mathrm{F}(\alpha)$ par un changement de variable.

b) En déduire pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de

$$\int_0^{+\infty} t^{2p}\,e^{-t^2}\mathrm{d}t\,.$$

c) Montrer que $\mathrm{G}(\alpha)$ est bien défini pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et calculer $\mathrm{G}(\alpha)$.

d) En déduire pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de

$$\int_0^{+\infty} t^{2p+1}\,e^{-t^2}\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 14 — Une fonction bien compliquée. On définit

$$\mathrm{F}\colon \begin{cases} \left[\,0\,,\dfrac{\pi}{2}\,\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-te^{-x})}{(1+t\cos(x))^9}\mathrm{d}t\,. \end{cases}$$

Montrer que la fonction F est bien définie et dérivable sur $\left[\,0\,,\dfrac{\pi}{2}\,\right]$.

Exercice 15 — Transformée de Laplace. On définit

$$\mathrm{F}\colon \begin{cases} [\,0\,,+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,. \end{cases}$$

a) Montrer que $\mathrm{F}(x)$ est bien défini pour tout $x \geqslant 0$.

b) Montrer que F est continue sur $[\,0\,,+\infty\,[$.

c) Montrer que F est dérivable sur $]\,0\,,+\infty\,[$.

Exercice 16 — Équation différentielle. On définit

$$\mathrm{F}\colon \begin{cases}]\,0\,,+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \quad \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-xt^2}}{x}\,\mathrm{d}t\,. \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction F est bien définie et continuement dérivable sur $]\,0\,,+\infty\,[$ (on pourra effectuer le changement de variable $u = t/x$ ou $v = t\sqrt{x}$).

b) Montrer que F satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{2}{3}xy'(x) + y(x) - e^{x^3} = 0\,.$$

Exercice 17 — Aire et volume du collège.

a) Calculer l'aire du cercle de centre 0 et de rayon R.

b) Calculer le volume d'une boule de centre 0 et de rayon R.

c) Calculer l'aire du triangle T de sommets $(0,0)$, $(-1,1)$ et $(1,1)$.

d) Calculer le volume de la pyramide P de sommets $(0,0,0)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,-1,1)$ et $(1,1,1)$.

Exercice 18 — Intégration sur un triangle (Examen Juin 2004). Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathrm{T}} 8xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

où T désigne le triangle de sommets $(-1,-1)$, $(0,1)$ et $(1,1)$.

Exercice 19 — Intégration sur un triangle. Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathrm{T}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

où $\mathrm{T} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad y + x \leqslant 1\big\}$.

Exercice 20 — Intégration sur un triangle. Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathrm{T}} \frac{1}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

où $\mathrm{T} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad y \leqslant x \leqslant 1, \quad y + x \geqslant 1\big\}$.

Exercice 21 — Intégrale double. Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathrm{T}} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

où $\mathrm{T} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x^2 \leqslant y \leqslant x\big\}$.

Exercice 22 — Intégrale double. Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathrm{T}} x^2 + y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

où $\mathrm{T} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad y \geqslant 0, \quad x^2 + 2y \leqslant 1\big\}$.

Exercice 23 — Intégration sur un disque (Examen Septembre 2004). Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathrm{D}} \cos(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

où D désigne le disque de centre 0 et de rayon $\sqrt{\pi/2}$.

Exercice 24 — Disque et carré. Calculer l'intégrale double

$$\mathrm{I} = \iint_{\mathrm{C}} \left|x^2 + y^2 - 1\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

où $\mathrm{C} = [\,-1\,,1\,] \times [\,-1\,,1\,]$. On pourra montrer que

$$\mathrm{I} = \iint_{\mathrm{C}} (x^2 + y^2 - 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\iint_{\mathrm{D}} (1 - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où D est le disque de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 25 — Intégration sur un disque (Examen Septembre 2004). Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathrm{D}} x\cos(\sqrt{x^2 + y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

où $\mathrm{D} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x \geqslant y \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \pi\big\}$.

Exercice 26 — Intégration sur une demi-boule (Examen Juin 2004). Calculer l'intégrale triple

$$\iiint_{\mathrm{B}} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

où B désigne la demi-boule $\mathrm{B} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, \quad z \geqslant 0\big\}$. (On pourra effectuer le calcul en coordonnées sphériques.)

Exercice 27 — Intégration sur un trapèze. Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathrm{T}} 12xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où T désigne le trapèze de sommets $(-2, -1), (0, 1), (1, 1)$ et $(2, -1)$.

Exercice 28 — Intégration sur un trapèze (examen Juin 2005). Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathrm{T}} e^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où T désigne le trapèze de sommets $(-2, 2), (2, 2), (1, 1)$ et $(-1, 1)$.

Exercice 29 — Intégration sur un quart de disque (examen Juin 2005). Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathrm{D}} (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où $\mathrm{D} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}$.

Exercice 30 — Centre de gravité (Examen Septembre 2004). Soit P la partie du plan définie par

$$\mathrm{P} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x^2 \leqslant 2y \leqslant x + 2\big\}.$$

a) Représenter la partie P.

b) Calculer les coordonnées $(x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}})$ du centre de gravité G de P.

Rappel :

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{\displaystyle\iint_{\mathrm{P}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\displaystyle\iint_{\mathrm{P}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y} \qquad \text{et} \qquad y_{\mathrm{G}} = \frac{\displaystyle\iint_{\mathrm{P}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\displaystyle\iint_{\mathrm{P}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

Exercice 31 – Centre de gravité (Examen Juin 2005 – Mathématiques pour la physique). On considère dans le plan $x\mathrm{O}y$ le quart d'ellipse Q d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad x>0, \quad y>0,$$

où $a>0$ et $b>0$ désignent les longueurs des demi-axes de l'ellipse.

a) Dessiner le quart d'ellipse.

b) Calculer l'aire

$$\mathrm{A}=\iint_{\mathrm{S}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

de la surface S délimitée par le quart d'ellipse et les axes Ox et Oy à partir des coordonnées cartésiennes.

c) Calculer A en effectuant le changement de variable $\mathrm{X}=x/a$ et $\mathrm{Y}=y/b$.

d) Calculer, à partir des coordonnées cartésiennes, les coordonnées $(x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}})$ du centre de gravité G de S.

e) Refaites le calcul à l'aide du changement de variable de la question **c**.

f) Comment sont modifés les résultats précédents si l'on considère la demi-ellipse $y>0$ puis l'ellipse complète ?

Rappel :
$$x_{\mathrm{G}}=\frac{\displaystyle\iint_{\mathrm{S}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\displaystyle\iint_{\mathrm{S}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y} \qquad \text{et} \qquad y_{\mathrm{G}}=\frac{\displaystyle\iint_{\mathrm{S}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\displaystyle\iint_{\mathrm{S}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

Exercice 32 – Intersection de deux cercles. Soit P la partie du plan définie par

$$\mathrm{P}=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \qquad x^2+y^2\leqslant 2ax, \quad x^2+y^2\leqslant 2ay\big\}.$$

a) Représenter la partie P.

b) Calculer

$$\iint_{\mathrm{P}} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exercice 33 – Intégrales triples. Calculer

a)
$$\iiint_{\mathrm{D}} (x^2+y^2+z^2)e^z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

où $\mathrm{D}=\{(x,y,z), \qquad |x|\leqslant 1, \quad |y|\leqslant 1, \quad |z|\leqslant 1\}$.

b)
$$\iiint_{\mathrm{D}} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

où $\mathrm{D}=\big\{(x,y,z), \qquad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0, \quad z\geqslant 0, \quad x^2+y^2+z^2\leqslant 1\big\}$.

Exercice 34 – Intégration triple. Calculer l'intégrale triple

$$\iiint_{\mathrm{D}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

où $\mathrm{D}=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \qquad x^2+y^2+z^2\leqslant 1, \quad x^2+y^2\leqslant z^2, \quad z\geqslant 0\big\}$.