# Système différentiel

**Exercice 1 – Système différentiel $2 \times 2$.** Soit $(\mathscr{S})$ le système différentiel linéaire avec second membre

$$(\mathscr{S}) \begin{cases} x'(t) = & y(t) + t \\ y'(t) = & x(t) - t^2 \end{cases}$$

où $x$ et $y$ désignent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**a)** Déterminer la solution générale du système linéaire homogène associé à $(\mathscr{S})$.

**b)** Déterminer la solution particulière du système $(\mathscr{S})$ pour les conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ (on pourra chercher $x$ et $y$ sous forme de polynômes de degré respectif 2 et 1).

**c)** Déterminer la solution générale du système $(\mathscr{S})$.

**Exercice 2 – Système différentiel $2 \times 2$.** Soit $(\mathscr{S})$ le système différentiel linéaire avec second membre

$$(\mathscr{S}) \begin{cases} x'(t) = & -x(t) - y(t) + 1 \\ y'(t) = & 2x(t) + y(t) - 1 \end{cases}$$

où $x$ et $y$ désignent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**a)** Déterminer la solution générale du système linéaire homogène associé à $(\mathscr{S})$.

**b)** Déterminer la solution particulière du système $(\mathscr{S})$ pour les conditions initiales $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

**c)** Déterminer la solution générale du système $(\mathscr{S})$.

**Exercice 3 – Système différentiel $3 \times 3$ (Examen Juin 2004).** Soit $(\mathscr{S})$ le système différentiel linéaire avec second membre

$$(\mathscr{S}) \begin{cases} x'(t) = & x(t) + 2y(t) + 1 \\ y'(t) = & -3x(t) - 3y(t) + z(t) - e^t \\ z'(t) = & 2x(t) + 2y(t) - z(t) + 2e^t \end{cases}$$

où $x$, $y$ et $z$ désignent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**a)** Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du système linéaire homogène associé à $(\mathscr{S})$.

**b)** Déterminer la solution particulière du système $(\mathscr{S})$ pour les conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ et $z(0) = 1$.

**c)** Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du système $(\mathscr{S})$.

**Exercice 4 – Système différentiel $3 \times 3$ (Examen Septembre 2004).** Soit $(\mathscr{S})$ le système différentiel linéaire avec second membre

$$(\mathscr{S}) \begin{cases} x'(t) = & -3x(t) + 2y(t) - z(t) \\ y'(t) = & -y(t) + t + 1 \\ z'(t) = & 2x(t) - z(t) + 2t + 2 \end{cases}$$

où $x$, $y$ et $z$ désignent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**a)** Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du système linéaire homogène associé à $(\mathscr{S})$.

**b)** Déterminer la solution particulière du système $(\mathscr{S})$ pour les conditions initiales $x(0) = y(0) = z(0) = 0$.

**c)** Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du système $(\mathscr{S})$.

**Exercice 5 – Système différentiel $3 \times 3$.** Soit $(\mathscr{S})$ le système différentiel linéaire avec second membre

$$(\mathscr{S}) \begin{cases} x'(t) = & 3x(t) + y(t) + 3t \\ y'(t) = & -4x(t) - y(t) + t - 3 \\ z'(t) = & 4x(t) - 8y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

où $x$, $y$ et $z$ désignent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**a)** Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du système linéaire homogène associé à $(\mathscr{S})$.

**b)** Déterminer la solution particulière du système $(\mathscr{S})$ pour les conditions initiales $x(0) = 18$, $y(0) = -45$ et $z(0) = 1$ (On pourra chercher $x$ et $y$ sous forme de polynôme de degré 1).

**c)** Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du système $(\mathscr{S})$.

**Exercice 6 – Système différentiel $3 \times 3$.** Soit $(\mathscr{S})$ le système différentiel linéaire avec second membre

$$(\mathscr{S}) \begin{cases} x'(t) = & -4x(t) + y(t) + z(t) + 1 \\ y'(t) = & x(t) - y(t) - 2z(t) + t \\ z'(t) = & -2x(t) + y(t) - z(t) + t^2 \end{cases}$$

où $x$, $y$ et $z$ désignent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**a)** Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du système linéaire homogène associé à $(\mathscr{S})$.

**b)** Déterminer une solution particulière du système $(\mathscr{S})$ avec $x$, $y$ et $z$ des polynômes de degré 2.

**c)** Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du système $(\mathscr{S})$.

**Exercice 7 – Système différentiel $3 \times 3$.** Soit $(\mathscr{S})$ le système différentiel linéaire

$$(\mathscr{S}) \begin{cases} x'(t) = & 7x(t) + y(t) + 4z(t) \\ y'(t) = & -x(t) - 7y(t) - 4z(t) \\ z'(t) = & -6x(t) + 6y(t) \end{cases}$$

où $x$, $y$ et $z$ désignent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la solution générale du système linéaire $(\mathscr{S})$.

**Exercice 8 – Système différentiel $3 \times 3$.** Soit $(\mathscr{S})$ le système différentiel linéaire avec second membre

$$(\mathscr{S}) \begin{cases} x'(t) = & 4x(t) + 6y(t) - 3z(t) + \cos t \\ y'(t) = & -x(t) - 5y(t) - 2z(t) - \cos t + \sin t \\ z'(t) = & 5x(t) + 6y(t) - 4z(t) + \cos t \end{cases}$$

où $x$, $y$ et $z$ désignent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**a)** Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du système linéaire homogène associé à $(\mathscr{S})$.

**b)** Déterminer la solution particulière du système $(\mathscr{S})$ pour les conditions initiales $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ et $z(0) = 2$.

**c)** Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du système $(\mathscr{S})$.

**Exercice 9 – Système différentiel antisymétrique.** Soit $(\mathscr{S})$ le système différentiel linéaire

$$(\mathscr{S}) \begin{cases} x'(t) = & y(t) - z(t) \\ y'(t) = & z(t) - x(t) \\ z'(t) = & x(t) - y(t) \end{cases}$$

où $x$, $y$ et $z$ désignent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**a)** Déterminer la solution générale à valeurs réelles du système linéaire $(\mathscr{S})$.

**b)** Calculer $\|(x(t), y(t), z(t))\|^2$ où $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ est solution de $(\mathscr{S})$. Était-ce prévisible ?

**c)** Montrer les solutions de $\mathscr{S}$ sont planes. Était-ce prévisible ?

**Exercice 10 – Système différentiel antisymétrique.** Soit $(\mathscr{S})$ le système différentiel linéaire

$$(\mathscr{S}) \begin{cases} x'(t) = & -y(t) - z(t) \\ y'(t) = & x(t) - z(t) \\ z'(t) = & x(t) + y(t) \end{cases}$$

où $x$, $y$ et $z$ désignent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**a)** Déterminer la solution générale à valeurs réelles du système linéaire $(\mathscr{S})$.

**b)** Calculer $\|(x(t), y(t), z(t))\|^2$ où $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ est solution de $(\mathscr{S})$. Était-ce prévisible ?

**c)** Montrer les solutions de $\mathscr{S}$ sont planes. Était-ce prévisible ?

**Exercice 11 — Système différentiel et espace euclidien (Examen Juin 2005).** Soit $(\mathscr{S})$ le système différentiel linéaire

$$(\mathscr{S})\begin{cases} x'(t) = & -x(t)+y(t) \\ y'(t) = & -x(t)-y(t) \end{cases}$$

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions de $\mathscr{S}$ à valeurs réelles.

**a)** Déterminer la solution générale à valeurs réelles du système linéaire $(\mathscr{S})$. En déduire une base de E.

**b)** On considère sur E la forme bilinéaire symétrique $(\cdot \mid \cdot)$ définie par

$$(\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}) = \int_0^{+\infty} \langle \mathrm{X}(t), \mathrm{Y}(t) \rangle \,,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'espace vectoriel E, muni de la forme $(\cdot \mid \cdot)$, est un espace euclidien de dimension 2.

**c)** Construire une base orthonormée de E.

**Exercice 12 — Système différentiel d'ordre 2 (Examen Juin 2005).** Soit $(\mathscr{S})$ le système différentiel linéaire

$$(\mathscr{S})\begin{cases} x''(t) = & x(t)-4y(t) \\ y''(t) = & -x(t)+y(t) \end{cases}$$

Déterminer la solution générale à valeurs réelles du système linéaire $(\mathscr{S})$.

**Exercice 13 — Système différentiel d'ordre 2.** Soit $(\mathscr{S})$ le système différentiel linéaire

$$(\mathscr{S})\begin{cases} x''(t) = & x'(t)+y'(t)-y(t) \\ y''(t) = & x'(t)+y'(t)-x(t) \end{cases}$$

**a)** Déterminer la matrice du système linéaire du premier ordre associé à $(\mathscr{S})$.

**b)** Déterminer la solution générale à valeurs réelles du système linéaire $(\mathscr{S})$.

**Exercice 14 — Système différentiel d'ordre 2.** Soit $(\mathscr{S})$ le système différentiel linéaire

$$(\mathscr{S})\begin{cases} x''(t) = & -3x(t)+2y(t) \\ y''(t) = & x(t)-2y(t) \end{cases}$$

**a)** Déterminer la matrice du système linéaire du premier ordre associé à $(\mathscr{S})$.

**b)** Déterminer la solution générale à valeurs réelles du système linéaire $(\mathscr{S})$.

**Exercice 15 — Système différentiel et espace euclidien (Examen Juin 2005).** Soit $(\mathscr{S})$ le système différentiel linéaire

$$(\mathscr{S})\begin{cases} x'(t) = & x(t)-y(t) \\ y'(t) = & 2x(t)-y(t) \end{cases}$$

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions de $\mathscr{S}$ à valeurs réelles.

**a)** Déterminer la solution générale à valeurs réelles du système linéaire $(\mathscr{S})$. En déduire une base de E.

**b)** On considère sur E la forme bilinéaire symétrique $(\cdot \mid \cdot)$ définie par

$$(\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}) = \int_0^{2\pi} \langle \mathrm{X}(t), \mathrm{Y}(t) \rangle \,,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'espace vectoriel E, muni de la forme $(\cdot \mid \cdot)$, est un espace euclidien de dimension 2.

**c)** Construire une base orthonormée de E.

**Exercice 16 — Système différentiel et espace euclidien (Examen Juin 2005).** Soit $(\mathscr{S})$ le système différentiel linéaire

$$(\mathscr{S})\begin{cases} x'(t) = & x(t)-y(t) \\ y'(t) = & 2x(t)-y(t) \end{cases}$$

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions de $\mathscr{S}$ à valeurs réelles.

**a)** Déterminer la solution générale à valeurs réelles du système linéaire $(\mathscr{S})$. En déduire une base de E.

**b)** On considère sur E la forme bilinéaire symétrique $(\cdot \mid \cdot)$ définie par

$$(\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}) = \langle \mathrm{X}(0), \mathrm{Y}(0) \rangle \,,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'espace vectoriel E, muni de la forme $(\cdot \mid \cdot)$, est un espace euclidien de dimension 2.

**c)** Construire une base orthonormée de E.