Partiel : Algèbre Approfondie.

Exercice 1 — Quotient. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On note $\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}/\mathrm{F}$ et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}/\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ les surjections canoniques. Pour simplifier les notations, on notera $\pi(x) = \overline{x}$ et $p(x) = \widetilde{x}$.

a) Déterminer la dimension de E/F en fonction de celles de E et F.

b) Montrer que l'application

$$\Delta : \begin{cases} \mathrm{F}/\mathrm{F} \cap \mathrm{G} \longrightarrow (\mathrm{F}+\mathrm{G})/\mathrm{G} \\ \quad \widetilde{x} \qquad \longmapsto \overline{x} \end{cases}$$

est bien définie et est un isomorphisme.

c) En déduire que $\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) + \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G})$.

Exercice 2 — Arithmétique. Soit $\mathbb{D} = \{p/10^n, \quad p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

a) Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

b) Montrer que $7/25 \in \mathbb{D}$.

c) Soit $x = p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la décomposition en nombres premiers de q pour que $x \in \mathbb{D}$.

d) Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{D}$.

e) Déterminer quels nombres premiers $p \in \mathbb{N}$ sont des éléments irréductibles de $\mathbb{D}$.

f) En déduire que $\mathbb{D}$ est factoriel.

Exercice 3 — Extension algébrique. Soit $\mathrm{K} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$ la sous-extension de $\mathbb{C}$ engendrée par $j = \exp(2i\pi/3)$ et $\sqrt[3]{2}$.

1) Déterminer $[\mathbb{Q}(j) : \mathbb{Q}]$ et $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$.

2) Déterminer $[\mathrm{K} : \mathbb{Q}]$ et montrer que $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, j, j\sqrt[3]{2}, j\sqrt[3]{4})$ est une $\mathbb{Q}$-base de K. Déterminer une $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$-base de K

3) En déduire l'ensemble des éléments de K vérifiant $x^2 \in \mathbb{Q}$.

4) Déterminer trois sous-extensions de degré 3 de K.

5) En utilisant la question **3**, déterminer toutes les sous-extensions de degré 2 de K.

6) Soit L une sous-extension de degré 3 de K, on veut montrer qu'elle est égale à l'une des trois sous-extensions de la question **4**. On raisonne par l'absurde, on suppose que L n'est pas l'une des trois sous-extensions de la question **4**.

- **a)** Montrer que L ne contient aucune des racines complexes de $\mathrm{X}^3 - 2$.
- **b)** En déduire que $[\mathrm{K} : \mathbb{Q}] \geqslant 9$ et conclure.