Formation en Mathématiques Commune Cachan / P7 — Année 2009–2010
Algèbre — Patrick Le Meur, Vincent Beck

# Partiel du 6 Novembre 2009

Seules les notes de cours et de TD sont autorisées. Il est interdit de communiquer par un quelconque moyen. Les exercices sont indépendants.

**Exercice 1 – Vrai ou Faux.** Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier vos réponses.

**a)** Tout morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans un groupe fini est trivial.

**b)** Tout morphisme d'un groupe fini dans $(\mathbb{C}, +)$ est trivial.

**c)** Tout morphisme de $(\mathbb{C}^\times, *)$ dans un groupe fini est trivial.

**d)** Tout morphisme d'un groupe fini dans $(\mathbb{C}^\times, *)$ est trivial.

**e)** Soit $G$ un groupe et $H$ un sous-groupe distingué de $G$. Si $H$ et $G/H$ sont abéliens alors $G$ l'est.

**f)** Soit $G$ un groupe et $H$ un sous-groupe distingué de $G$. Si $H$ et $G/H$ sont engendrés par un nombre fini d'éléments alors $G$ l'est.

**Exercice 2**

**a)** Soit $p$ un nombre premier. Montrer que si $G$ est un groupe d'ordre $p$ alors $G$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

**b)** Déterminer l'ensemble des endomorphismes du groupes $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Parmi ces endomorphismes, lesquels sont des isomorphismes ? En particulier, quel est le cardinal de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ?

**c)** Soit $G$ un groupe d'ordre impair et $N$ un sous-groupe distingué d'ordre 5. Montrer que $N$ est contenu dans le centre de $G$.

**Exercice 3 – Morphisme et graphe.** Soient $G$ et $H$ deux groupes et $\varphi : G \to H$ une application. On définit $\Gamma_\varphi$ le graphe de $\varphi$ comme $\Gamma_\varphi = \{(g, h) \in G \times H, \quad \varphi(g) = h\}$.

**a)** Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

$(i)$ $\varphi$ est un morphisme de groupes ;
$(ii)$ $\Gamma_\varphi$ est un sous-groupe de $G \times H$.

**b)** Soit $u = (a, b) \in G \times H$. Montrer que $u\Gamma_\varphi u^{-1}$ est encore le graphe d'une application qu'on déterminera.

**c)** On suppose que $\varphi$ est un morphisme. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $\varphi(G)$ et $H$ pour que $\Gamma_\varphi$ soit un sous-groupe distingué de $G \times H$.

**Exercice 4 – Groupe de Coxeter.** Soit $G$ un groupe. On suppose qu'il existe dans $G$ deux éléments distincts $s, s' \in S$ tels que $s$ et $s'$ soient d'ordre 2 et $G = \langle s, s' \rangle$.

**a)** Montrer que $H = \langle ss' \rangle$ est distingué dans $G$.

**b)** Montrer que $s, s' \notin H$ et que $H$ est un sous-groupe d'indice 2 de $G$.

**Exercice 5 – Espaces vectoriels quotients et applications.**

Soit $\Bbbk$ un corps. Dans cet exercice, tous les espaces vectoriels seront sur $\Bbbk$, lorsqu'un espace vectoriel est de dimension finie, on notera dim pour sa dimension sur $\Bbbk$.

**Partie 1 - L'espace vectoriel quotient.** Soit $E$ un espace vectoriel et $E'$ un sous-espace vectoriel de $E$. On note $\pi\colon E \twoheadrightarrow E/E'$ la surjection canonique associée au quotient de groupes abéliens $E/E'$.

**a)** Montrer qu'il existe une unique structure d'espace vectoriel sur le groupe abélien $E/E'$ telle que $\pi$ soit linéaire. Montrer que si $E$ est de dimension finie alors $E/E'$ l'est aussi et calculer sa dimension.

Dans la suite, $E/E'$ sera toujours muni de la structure d'espace vectoriel ci-dessus.

**b)** Soit $E''$ un sous-espace vectoriel de $E'$. Montrer que $E'/E''$ est isomorphe à un sous-espace vectoriel de $E/E''$, de manière naturelle (en un sens que l'on précisera). Pour cette identification, montrer que les espaces vectoriels $E/E'$ et $(E/E'')\,/\,(E'/E'')$ sont isomorphes.

Dans la suite, cette identification sera toujours sous-entendue.

**c)** Soit $F$ un espace vectoriel et $f\colon E \to F$ une application linéaire. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

$(i)$ il existe une application linéaire $\overline{f}\colon E/E' \to F$ telle que $\overline{f} \circ \pi = f$.
$(ii)$ $E' \subseteq \mathsf{Ker}(f)$.

Montrer que, sous ces conditions, $\overline{f}$ est unique, $\mathsf{Im}(\overline{f}) = \mathsf{Im}(f)$ et $\mathsf{Ker}(\overline{f}) = \mathsf{Ker}(f)/E'$.

**Partie 2 - Applications à la dualité.**

Soit $E$ un espace vectoriel. On note $E^*$ le dual de $E$, c'est-à-dire l'espace vectoriel des applications linéaires $E \to \Bbbk$. On rappelle que si $E$ est de dimension finie, alors $E^*$ l'est aussi et $\mathsf{dim}\, E = \mathsf{dim}\, E^*$. On rappelle aussi que tout espace vectoriel (même de dimension infinie) a une base et que le théorème de la base incomplète s'applique aussi en dimension infinie. Le dual de $E^*$ est noté $E^{**}$.

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels respectivement de $E$ et $E^*$. On rappelle que $F^\circ$ et ${}^\circ G$ désignent les sous-espaces vectoriels respectivement de $E^*$ et $E$, définis par

$$F^\circ = \{\varphi \in E^* \mid (\forall x \in F)\ \varphi(x) = 0\} \text{ et}$$
$${}^\circ G = \{x \in E \mid (\forall \varphi \in G)\ \varphi(x) = 0\}.$$

**a)** Montrer que l'application linéaire $E \to E^{**}$ qui à $x \in E$ associe l'évaluation $\varphi \mapsto \varphi(x)$ est injective. En déduire que c'est un isomorphisme si $E$ est de dimension finie.

**b)** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Montrer que les espaces vectoriels $F^\circ$ et $(E/F)^*$ sont isomorphes. En déduire $\mathsf{dim}\, F^\circ$ et $\mathsf{dim}\, {}^\circ G$ lorsque $E$ est de dimension finie.

**c)** Montrer que si $E$ est de dimension finie et si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E^*$ alors $\bigcap_{i=1}^{n} \mathsf{Ker}(\varphi_i)$ est de dimension au moins $\mathsf{dim}\, E - n$, avec égalité si et seulement $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont linéairement indépendantes.

**Partie 3 - Applications aux formes bilinéaires.**

Soient $E, F$ deux espaces vectoriels et $\varphi\colon E \times F \to \Bbbk$ une application bilinéaire, c'est-à-dire $\varphi(x,-)\colon y \mapsto \varphi(x,z)$ et $\varphi(-,y)\colon z \mapsto \varphi(z,y)$ sont des formes linéaires pour tous $x \in E$ et $y \in F$.

Pour un sous-espace vectoriel $E'$ (resp. $F'$) de $E$ (resp. de $F$), on note $E'^{\perp}$ et (resp. ${}^{\perp}F'$) le sous-espaces vectoriel de $F$ (resp. de $E$) égal à

$$E'^{\perp} = \{y \in F \mid (\forall x \in E')\ \varphi(x,y) = 0\}$$
$$(\text{resp. } {}^{\perp}F' = \{x \in E \mid (\forall y \in F')\ \varphi(x,y) = 0\}).$$

On notera $\varphi_d\colon E \to F^*$ et $\varphi_g\colon F \to E^*$ les applications linéaires respectivement définies par

$$\begin{cases} (\forall x \in E) & \varphi_d(x) = \varphi(x,-) \\ (\forall y \in F) & \varphi_g(x) = \varphi(-,y). \end{cases}$$

**a)** Soient $\pi_d\colon E \twoheadrightarrow E/F^{\perp}$ et $\pi_g\colon F \twoheadrightarrow F/{}^{\perp}E$ les surjections canoniques. Montrer qu'il existe une unique application bilinéaire $\overline{\varphi}\colon \left(E/F^{\perp}\right) \times \left(F/{}^{\perp}E\right) \to \Bbbk$ telle que $\overline{\varphi}(\pi_d(x), \pi_d(y)) = \varphi(x,y)$ pour tous $x \in E, y \in F$.

**b)** En déduire que $\mathsf{Im}(\varphi_d)$ est de dimension finie si et seulement si $\mathsf{Im}(\varphi_g)$ l'est et que, dans ce cas, les deux dimensions coïncident.

On suppose désormais que $E = F$ est de dimension finie et que $\varphi$ est *symétrique*, c'est-à-dire $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ pour tous $x, y \in E$. On remarquera que $\varphi_d = \varphi_g$ et $G^{\perp} = {}^{\perp}G$ pour tout sous-espace vectoriel $G$ de $E$.

**a)** Soit $G$ un sous-espace vectoriel de $E$. Exprimer $\mathsf{dim}\, G$ en fonction de $\mathsf{dim}\, G^{\perp}$ et de $\mathsf{dim}(G \cap E^{\perp})$. En déduire que $\left(G^{\perp}\right)^{\perp} = G + E^{\perp}$ (*indication : on pourra exploiter avantageusement l'application bilinéaire* $\overline{\varphi}$).

**Exercice 6 – La catégorie des $G$-ensembles.** Soit $G$ un groupe. On rappelle qu'un $G$-ensemble est un couple formé d'un ensemble $X$ et d'une action de $G$ sur $X$. Si $X$ et $Y$ sont deux $G$-ensembles, un $G$-morphisme ou application $G$-équivariante est une application $f : X \to Y$ telle que $f(gx) = gf(x)$ pour tout $x \in X$ et $g \in G$. Un $G$-ensemble $X$ est dit transitif si l'action de $G$ sur $X$ est transitive.

**a)** Soit $X$ un $G$-ensemble. Montrer que $\mathrm{id}_X$ est une application $G$-équivariante.

**b)** Montrer que la composée de 2 applications $G$-équivariantes est $G$-équivariante.

**c)** Définir la notion d'isomorphisme de $G$-ensembles. Montrer qu'un morphisme de $G$-ensemble est un isomorphisme de $G$-ensembles si et seulement si il est bijectif.

**d)** Définir la notion de sous-$G$-ensemble.

**e)** Définir un produit de $G$-ensembles et démontrer une propriété universelle du produit.

**f)** Définir un coproduit de $G$-ensembles et démontrer une propriété universelle du coproduit.

**g)** Soit $X$ un $G$-ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $X$. A quelle condition existe-t-il sur $X/\mathcal{R}$ une structure de $G$-ensemble telle que $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ soit $G$-équivariante. Démontrer alors la propriété universelle du quotient pour les applications $G$-équivariantes $X \to Y$ compatible avec $\mathcal{R}$.

**h)** Montrer que tout $G$-ensemble est coproduit de $G$-ensembles transitifs.

**i)** Soit $H$ et $H'$ deux sous-groupes de $G$. À quelle condition (sur $H$ et $H'$) existe-t-il un morphisme de $G$-ensemble de $G/H$ dans $G/H'$ ?

**Exercice 7 – Groupe à groupes d'automorphismes triviaux.** Soit $G$ un groupe tel que $\mathrm{Aut}(G) = \{\mathrm{id}_G\}$.

**a)** Montrer que $G$ est commutatif (on pourra considérer les automorphismes intérieurs).

**b)** Montrer que tout élément de $G$ est d'ordre 2 (on pourra considérer l'application $x \mapsto x^{-1}$).

**c)** Munir $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'une structure de corps. On note $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ la surjection canonique.

**d)** Montrer que l'application

$$\begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G \longrightarrow G \\ (\pi(n), x) \longmapsto \pi(n) \cdot x := nx \end{cases}$$

est bien définie et munit $G$ d'une structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel : il s'agira de montrer que

$(i)$ $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot x$ pour tous $x, y \in G$ et $\lambda \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
$(ii)$ $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ pour tout $x \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
$(iii)$ $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ pour tout $x \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
$(iv)$ $1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} x = x$ pour tout $x \in G$.

**e)** En considérant une base de $G$ comme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel, montrer que $G$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{(I)}$.

**f)** Déterminer les groupes tels que $\mathrm{Aut}(G) = \{\mathrm{id}_G\}$.