Jean-Michel Ghidaglia, Vincent Beck

Partiel Novembre 2006

Exercice 1 — Variété. Montrer que $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x^2+2y^2=1\right\}$ est une variété différentiable.

Exercice 2 — Calcul différentiel. Soient E un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que l'application

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathrm{E}\times\mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathrm{P},x)\longmapsto \mathrm{P}(x)\end{cases}$$

est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 3 — Inversion locale. On considère le plan euclidien $(\mathbb{R}^2,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ et $a\in\mathbb{R}_+^*$. Pour $\mathrm{M},\mathrm{N}\in\mathbb{R}^2$, on note $|\mathrm{MN}|$ la distance entre M et N. On pose $\mathrm{A}=(a,0)$ et $\mathrm{B}=(-a,0)$ et on définit les fonctions

$$\varphi_1\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{M}=(x,y)\longmapsto |\mathrm{MA}|\ ,\end{cases} \qquad \text{et} \qquad \varphi_2\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{M}=(x,y)\longmapsto |\mathrm{MB}|\ ,\end{cases}$$

et

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathrm{M}=(x,y)\longmapsto (\varphi_1(\mathrm{M}),\varphi_2(\mathrm{M}))=(|\mathrm{MA}|\,,|\mathrm{MB}|)\,.\end{cases}$$

a) Faire un dessin.

b) En quels points φ est-elle différentiable ? Montrer qu'en ces points elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

c) Montrer que l'application φ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ sur $\varphi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*)$ et déterminer $\varphi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*)$. Indication : on rappelle l'inégalité triangulaire

$$\forall\,(\mathrm{C},\mathrm{D},\mathrm{E})\in(\mathbb{R}^2)^3,\qquad \big|\,|\mathrm{CE}|-|\mathrm{DE}|\,\big|\leqslant|\mathrm{CD}|\leqslant|\mathrm{CE}|+|\mathrm{ED}|\,.$$

d) Pour $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, on note

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \varphi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v)\quad\longmapsto (f\circ\varphi^{-1})(u,v)\,.\end{cases}$$

Montrer que $$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\Delta\widehat{f}+\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\widehat{f}}{\partial u}+\frac{1}{\varphi_2}\frac{\partial\widehat{f}}{\partial v}+2\frac{\partial^2\widehat{f}}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right).$$

e) Déterminer les fonction $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ telle que $\Delta f=0$ et $\widehat{f}$ soit de la forme $\widehat{f}(u,v)=\alpha(u)+\beta(v)$ pour tout $(u,v)\in\varphi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*)$ où α,β sont des fonctions $\mathscr{C}^2$.

On rappelle le théorème de sortie de tout compact vu en TD.

Théorème 1 — Sortie de tout compact. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $f:\mathrm{U}\to\mathbb{R}^n$ une application continue localement lipschitzienne en la seconde variable. On considère u une solution maximale de l'équation différentielle $y'=f(t,y(t))$ et I l'intervalle de définition de u. Pour tout $a\in\mathrm{I}$ et tout compact K contenu dans U, il existe $t_+\in\mathrm{I}$ avec $t_+>a$ et $t_-\in\mathrm{I}$ avec $t_-<a$ tel que $(t_+,u(t_+))\notin\mathrm{K}$ et $(t_-,u(t_-))\notin\mathrm{K}$.

Exercice 4 — Équations différentielles. On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ dont on note $\|\cdot\|$ la norme. Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\mathrm{d}f(x)$ est inversible, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ et telle que $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty}\|f(x)\|=+\infty$.

a) Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, montrer que $f^{-1}(\mathrm{K})$ est compact.

b) On considère la fonction

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x\ \longmapsto \mathrm{d}f(x)^{-1}(f(x))\end{cases}$$

et le problème de Cauchy $$(\mathscr{C})\begin{cases} x'(t) = \varphi(x(t)) \\ x(0) = x_0\,. \end{cases}$$

Montrer que $(\mathscr{C})$ admet une unique solution maximale. On note $\delta : t \mapsto \delta(t)$ cette solution maximale et $\mathrm{I} =]\,\mathrm{T}_-\,,\mathrm{T}_+\,[$ son intervalle de définition.

c) Soit F la fonction

$$\mathrm{F}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \|f(x)\|^2\,. \end{cases}$$

Déterminer la fonction $t \mapsto \mathrm{F}(\delta(t))$. En déduire que $\mathrm{T}_+ = +\infty$ et $\mathrm{T}_- = -\infty$.

Exercice 5 – Forme quadratique. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, q une forme quadratique sur E, b la forme polaire associée et $a \in \mathrm{E}$. Montrer que l'application

$$q'\colon \begin{cases} \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto q(a)q(x) - b(a,x)^2 \end{cases}$$

est une forme quadratique et déterminer sa signature en fonction de celle de q.