Jean-Michel Ghidaglia, Vincent Beck

Partiel Novembre 2007

La qualité de l'argumentation ainsi que sa clarté seront prises en compte dans la notation.

Les seuls documents autorisés sont les « transparents » du cours, les notes de cours, les feuilles d'exercices de TD et les notes de TD, les devoirs à la maison et leur correction. L'usage d'appareils électroniques est interdit.

Exercice 1 – Méthode des caractéristiques. [6 pt]
Soient $a, u_0 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que u_0 et ${u_0}'$ sont bornées et on pose $c_0 = a \circ u_0 \in \mathscr{C}^1$. On considère le problème suivant : trouver $\mathrm{T} > 0$ et une fonction $(t, x) \mapsto u(t, x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\mathrm{T}\,, \mathrm{T}\,[\, \times \mathbb{R}$ vérifiant

$$(\mathscr{P}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a(u)\,\dfrac{\partial u}{\partial x} & = 0 \\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

a) [1,5 pt] On suppose qu'il existe $\mathrm{T} > 0$ et une solution u de $(\mathscr{P})$ définie sur $]-\mathrm{T}\,, \mathrm{T}\,[\, \times \mathbb{R}$. Soit x dans $\mathbb{R}$ et y la solution maximale du problème de Cauchy

$$(\mathscr{C}) \quad \begin{cases} y'(t) = a\,(u(t, y(t))) \\ y(0) = x. \end{cases}$$

Montrer que y est définie sur $]-\mathrm{T}\,, \mathrm{T}\,[$ et que $t \mapsto u(t, y(t))$ est constante. En déduire que $y(t) = x + t\, c_0(x)$.

b) [1 pt] Montrer que ${c_0}'$ est une fonction bornée. Soit $\mathrm{M} = \sup |{c_0}'| < +\infty$. Si $\mathrm{M} = 0$, posons $\mathrm{T}_0 = +\infty$ et $\mathrm{T}_0 = \mathrm{M}^{-1}$ sinon.

c) [2 pt] Montrer qu'il existe une fonction φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\mathrm{T}_0\,, \mathrm{T}_0\,[\, \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, t \in\,]-\mathrm{T}_0\,, \mathrm{T}_0\,[\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(0, x) = x \qquad \text{et} \qquad u(t, x) = u_0(\varphi(t, x)).$$

d) [1,5 pt] Montrer qu'il existe une unique fonction $u \in \mathscr{C}^1(]-\mathrm{T}_0\,, \mathrm{T}_0\,[\, \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $(\mathscr{P})$.

Problème – Groupes de Lie. [16 pt] Soient U un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et une application

$$\mu\colon \begin{cases} \mathrm{U} \times \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{U} \\ (x, y) \longmapsto \mu(x, y)\,. \end{cases}$$

On définit alors une loi de composition interne $*$ sur U par $x * y = \mu(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathrm{U}$.

a) [3,5 pt] On considère les exemples suivants

(i) $\mathrm{U} = \mathbb{R}^n$, $\mu(x, y) = x + y$;
(ii) $\mathrm{U} = \mathbb{R}_+^*$, $\mu(x, y) = xy$;
(iii) $\mathrm{U} = \mathbb{C}^*$, $\mu(x, y) = xy$;

(*iv*) $\mathrm{U} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mu(x,y) = xy$;
(*v*) $\mathrm{U} = \mathbb{R}_+^*$, $\mu(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;
(*vi*) $\mathrm{U} = \mathbb{R}$, $\mu(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$;
(*vii*) $\mathrm{U} = \mathbb{R}^2$, $\mu((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (x_1+y_1, x_2+e^{x_1}y_2)$.

Parmi les exemples précédents, quels sont ceux tels que $(\mathrm{U},*)$ soit un groupe, quels sont ceux pour lesquels μ est $\mathscr{C}^\infty$?

Lorsque $(\mathrm{U},*)$ est un groupe, on note 1 (ou 1_U) l'élément neutre de $*$ et, pour $x \in \mathrm{U}$, on note x^{-1} l'inverse de x pour la loi $*$. On dit que $(\mathrm{U},*)$ est un *groupe de Lie* si $(\mathrm{U},*)$ est un groupe, μ est $\mathscr{C}^\infty$ et l'application $x \mapsto x^{-1}$ est $\mathscr{C}^\infty$.

Parmi les exemples précédents, lesquels sont des groupes de Lie ?

b) [1 pt] On suppose que $(\mathrm{U},*)$ est un groupe et que μ est $\mathscr{C}^\infty$. On désigne par $\mathrm{D}_2\mu(x,y)$ la différentielle au point y de l'application partielle (à x fixé)

$$\begin{cases} \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{U} \\ y \longmapsto \mu(x,y)\,. \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall\,(x,y,z) \in \mathrm{U}^3, \qquad \mathrm{D}_2\mu(\mu(x,y),z) = \mathrm{D}_2\mu(x,\mu(y,z)) \circ \mathrm{D}_2\mu(y,z) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}_2\mu(1,y) = \mathrm{id}\,.$$

c) [1,5 pt] On suppose que $(\mathrm{U},*)$ est un groupe. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes

(*i*) $(\mathrm{U},*)$ est un groupe de Lie.
(*ii*) L'application

$$\alpha\colon \begin{cases} \mathrm{U}\times\mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{U} \\ (x,y) \longmapsto x*(y^{-1}) \end{cases}$$

est $\mathscr{C}^\infty$;
(*iii*) L'application μ est $\mathscr{C}^\infty$;

Indication pour (*iii*) $\Rightarrow$ (*i*) : utiliser le théorème des fonctions implicites.

d) [1 pt] Soient $(\mathrm{U},*_\mathrm{U})$ et $(\mathrm{V},*_\mathrm{V})$ deux groupes de Lie. On dit qu'une application $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ est un *morphisme de groupes de Lie* si f est un morphisme de groupe et f est $\mathscr{C}^\infty$. Soit $f : (\mathrm{U},*_\mathrm{U}) \to (\mathrm{V},*_\mathrm{V})$ un morphisme de groupes. Montrer que f est un morphisme de groupes de Lie si et seulement si f est $\mathscr{C}^\infty$ en 1_U.

e) [0,5 pt] Montrer que $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ est un morphisme de groupes de Lie.

f) [1 pt] Soient $(\mathrm{U},*_\mathrm{U})$ et $(\mathrm{V},*_\mathrm{V})$ deux groupes de Lie. On dit qu'une application $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ est un *isomorphisme de groupes de Lie* si f est un morphisme de groupes de Lie, f est bijective et f^{-1} est un morphisme de groupe de Lie. Montrer que f est un isomorphisme de groupes de Lie si et seulement si f est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme et f est un morphisme de groupes.

g) [0,5 pt] Montrer que ln est un isomorphisme de groupes de Lie de $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ dans $(\mathbb{R},+)$.

Les questions **h** à **k** sont consacrées à l'étude des structures de groupes de Lie sur $\mathbb{R}$. Il s'agit de montrer qu'en gros il n'y en a qu'une.

h) [1 pt] Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme. On considère l'application

$$\mu\colon \begin{cases} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \varphi^{-1}(\varphi(x)+\varphi(y)) \end{cases}$$

Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe de Lie et que $\varphi : (\mathbb{R}, *) \to (\mathbb{R}, +)$ est un isomorphisme de groupes de Lie.

Dans les questions **i**, **j** et **k**, on désigne par $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application (on note toujours $*$ la loi associée) telle que $(\mathbb{R}, *)$ soit un groupe de Lie. On note e son élément neutre.

i) [0.5 pt] Montrer que $(\partial_y \mu)(y, e) > 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

j) [2 pt] On cherche à construire $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\varphi(x * y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'une telle fonction φ vérifie nécessairement

$$\varphi(x) = a \int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{(\partial_y \mu)(t, e)} \tag{1}$$

où a est une constante.

k) [2 pt] Inversement montrer que, pour toute constante $a \neq 0$, l'égalité (**1**) définit un isomorphisme de groupes de Lie entre $(\mathbb{R}, *)$ et $(\mathbb{R}, +)$. En déduire que $*$ est commutative.

l) [1 pt] Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Déterminer les lois de groupes sur I qui font de I un groupe de Lie.

m) [0.5 pt] On a montré toute loi qui fait de $\mathbb{R}$ un groupe de Lie est commutative. Montrer à l'aide de l'exemple (vii) de la question **a** que ce n'est pas le cas sur $\mathbb{R}^2$.

n) Cette question est une question supplémentaire pour la « culture » qui ne ramènera pas de point. Construire une suite exacte de groupes

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{i} (\mathbb{R}^2, *) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{R}, +) \longrightarrow 0$$

où i et π sont des morphismes de groupes de Lie. Montrer que cette suite est scindée et décrire le morphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{R})$ associé.