Formation en Mathématiques Commune Cachan / P7 — Année 2009–2010
Calcul différentiel — Frédéric Pascal, Vincent Beck

Partiel du 4 Novembre 2009

Seules les notes de cours et de TD sont autorisées. Il est interdit de communiquer par un quelconque moyen. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 Déterminer $df(x)$ et $d^2f(x)$, si elles existent, des fonctions suivantes

a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (d, x) + \delta$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d \in \mathbb{R}^n$, $\delta \in \mathbb{R}$.

b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(Ax+b)$ où $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est 2 fois différentiable, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$

c) $f : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(A) = \mathrm{tr}(ABA^t)$ où $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

d) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (r_i(x))^2$ où $r_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont 2 fois différentiables.

e) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (r_i^+(x))^2$ où $r_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont 2 fois différentiables et $a^+ = \max(0, a)$.

Exercice 2 Soit C un ouvert convexe d'un espace E et f une application de C dans $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur C si pour tout $(x, y) \in C \times C$ et tout $\alpha \in]0, 1[$ on a

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)\,.$$

a) On suppose f différentiable sur C. Montrer qu'elle est convexe sur C si et seulement si

$$\forall (x, \bar{x}) \in C \times C, \qquad f(x) \geqslant f(\bar{x}) + df(\bar{x})(x - \bar{x})\,.$$

On pourra appliquer cette inégalité à x et $\bar{x} = \alpha x + (1-\alpha)y$.

b) On suppose f deux fois différentiable sur C. Montrer qu'elle est convexe sur C si et seulement si $d^2f(x)$ est semi-définie positive pour tout $x \in C$ (c'est-à-dire $d^2f(x)(h, h) \geqslant 0$ pour tout $h \in E$).

Exercice 3 Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère le système différentiel S_μ

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y^2 - \cos(x) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y\sin(x) - \mu y e^y \end{cases}$$

a) Montrer que pour $0 \leqslant \mu < 1$, le système S_μ admet un unique point d'équilibre $C(\mu) = (x_c(\mu), y_c(\mu))$ dans la bande $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0\,,\ y > 0\}$.

b) Montrer que la fonction $\mu \mapsto C(\mu)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 et donner un développement limité à l'ordre 1 de $x_c(\mu)$ et $y_c(\mu)$.

c) On note $A(\mu)$ la matrice du problème linéarisé au point $C(\mu)$. Écrire le développement limité à l'ordre 1 de $A(\mu)$.

Exercice 4 On se donne a et b deux réels tels que $a < b$ et $h \in \mathbb{R}$ un paramètre. On pose

$$f(x,h) = (x-a)(b-x) + hx^3\,.$$

Montrer que pour $h > 0$ assez petit, l'équation $f(x,h) = 0$ a trois racines réelles distinctes $x_1(h) < x_2(h) < x_3(h)$. Donner un développement asymptotique de ces racines pour $h \longrightarrow 0$ arrêté en $h\epsilon(h)$.

Exercice 5 Soit φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère le système différentiel

$$(\mathcal{S})\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(t) + y(t)\varphi(x(t),y(t)) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y(t) - x(t)\varphi(x(t),y(t)) \end{cases}$$

a) Justifier que $\mathcal{S}$ admet une unique solution maximale $t \mapsto (x(t),y(t))$ telle que $x(0) = y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Calculer $x(t)^2 + y(t)^2$. En déduire l'intervalle de définition de $t \mapsto (x(t),y(t))$.

c) On cherche une solution sous la forme $x(t) = \exp(t)\cos u(t)$ et $y(t) = \exp(t)\sin u(t)$. Déterminer une équation différentielle dont u est solution.

Dans les questions **d** à **f**, on suppose que $\varphi(x,y) = xy/(1+x^2+y^2)$.

d) Démontrer que $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

e) Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{\exp(2t)}{1+\exp(2t)}\sin(u(t))\cos(u(t))$$

avec $0 < u < \pi/2$.

f) Déterminer $x(t)$ et $y(t)$.

Exercice 6 — Inversion globale et fonction contractante. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \to E$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On note aussi $\|\cdot\|$ la norme sur $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$ et on pose $\varphi = f - \mathrm{id}_E$.

a) On suppose que $\|\mathrm{d}\varphi_x\| < 1$ pour tout $x \in E$. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur son image.

b) Soit $g : E \to E$. Montrer que g est k-lipschitzienne si et seulement si $\|\mathrm{d}g(x)\| \leqslant k$ pour tout $x \in E$.

c) On suppose que l'application $\varphi = f - \mathrm{id}_E$ est k-lipschitzienne avec $k < 1$. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de E sur lui-même. On pourra utiliser le théorème du point fixe à une fonction convenablement choisie.

d) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $|g'(t)| \leqslant k < 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que les applications

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto (x+g(y), y+g(x)) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto (y+g(x), x+g(y)) \end{cases}$$

sont des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.