Vincent Beck

Polynôme – Anneau de fractions

Exercice 1 – Fonctorialité. Soit A, B deux anneaux commutatifs et $f : A \to B$ un morphisme d'anneau.

a) Montrer que f s'étend en un morphisme de A-algèbres de $A[[X_1, \dots, X_n]]$ sur $B[[X_1, \dots, X_n]]$ envoyant X_i sur X_i.

b) Montrer que f s'étend de façon unique en un morphisme de A-algèbres de $A[X_1, \dots, X_n]$ sur $B[X_1, \dots, X_n]$ envoyant X_i sur X_i.

c) En déduire que si I est un idéal de A, on a un morphisme surjectif de A[X] dans (A/I)[X]. Quel est le noyau (le comparer à l'idéal engendré par I dans A[X]) ?

Exercice 2

a) Montrer que $1 + X$ est inversible dans $A[[X]]$.

b) Montrer que $1 + X$ est un carré dans $\mathbb{Q}[[X]]$.

c) Soit k un corps. Déterminer les idéaux de $k[[X]]$.

Exercice 3 Déterminer le nombre de monômes de $A[X_1, \dots, X_n]$ de degré total m.

Exercice 4 Soit K un corps. À quelle condition sur la famille a_i l'endomorphisme de A-algèbre de $K[X_1, \dots, X_n]$ donné par $X_1 \mapsto a_1X_1$ et $X_i \mapsto X_i + a_iX_1$ est-il un automorphisme ? Peut-on remplacer K par un anneau commutatif quelconque ?

Exercice 5 Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$. Montrer que l'ensemble des polynômes $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ tel que $P(a) = 0$ est l'idéal engendré par les $X_i - a_i$.

Exercice 6 Montrer que $A[X, Y]/\langle Y^3 - X^2\rangle$ est isomorphe à la sous-A-algèbre de A[T] formé des polynômes dont le coefficient en T est 0 (on pourra montrer que cette dernière algèbre est engendré par T^2 et T^3).

Exercice 7 – Racines d'un polynôme.

a) On considère le corps (ou plutôt l'anneau à division) des quaternions $\mathbb{H}$. Montrer que le polynôme $X^2 + 1$ a au moins trois racines (et même une infinité).

b) On considère l'anneau commutatif non intègre $A = k[X]/X^2$ où k est un corps infini. Montrer que le polynôme T^2 de A[T] admet une infinité de racines.

Exercice 8 Trouver $P \in \mathbb{Z}[U, V, W]$ tel que

$$P(X + Y + Z, XY + YZ + XZ, XYZ) = X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 + X^2YZ + Y^2XZ + Z^2XY.$$

Exercice 9 – Division euclidienne et polynômes. Soit A un anneau commutatif unitaire et $P, Q \in A[X]$ où Q est un polynôme à coefficient dominant inversible.

a) Montrer que la restriction de la surjection canonique induit une bijection (« A-linéaire ») entre l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $A[X]/(Q)$.

b) On suppose que $A = k$ est un corps. En déduire que $k[X]/(Q)$ est un espace vectoriel de dimension $\deg Q$ et de base $(\pi(1), \pi(X), \dots, \pi(X^{\deg Q - 1}))$ où $\pi : k[X] \to k[X]/(Q)$ est la surjection canonique.

Exercice 10

a) Soit A un anneau commutatif. Déterminer les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}[X]$ dans A.

b) Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux commutatifs vérifiant la propriété $\mathscr{P}$: si $g, h : B \to C$ sont des morphismes d'anneaux commutatifs vérifiant $f \circ g = f \circ h$ alors $g = h$. Montrer que f est injectif.

c) Montrer qu'un morphisme injectif vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

d) Déterminer les automorphismes de $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 11

a) Montrer que $\mathbb{Z}[X]/(2, X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) Soit $p \in \mathbb{Z}$ un nombre premier. Montrer que $\mathbb{Z}[i]/(p)$ est isomorphe à $\mathbb{F}_p[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^2+1)$.

c) En déduire que p est un élément premier de $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si -1 n'est pas un carré dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p = 3\,[4]$.

Exercice 12 Soit k un corps. Montrer que dans $k[\mathrm{X}]$, il y a une infinité d'éléments irréductibles. L'argument marche-t-il pour $k[[\mathrm{X}]]$?

Exercice 13 Soit A un anneau factoriel et $\mathrm{P} = a_n\mathrm{X}^n + \cdots + a_0 \in \mathrm{A}[\mathrm{X}]$ avec $a_n \neq 0$. On note K le corps de fraction de A.

a) Montrer que tout élément non nul de K peut s'écrire $x = a/b$ avec $\mathrm{pgcd}\,(a,b) = 1$.

b) On suppose que $x = a/b = a'/b'$ avec $\mathrm{pgcd}\,(a,b) = 1 = \mathrm{pgcd}\,(a',b')$. Montrer qu'il existe $u \in \mathrm{A}^\times$ tel que $ua = a'$ et $ub = b'$.

c) On suppose que $x = a/b \in \mathrm{K}^\times$ avec $\mathrm{pgcd}\,(a,b) = 1$ est racine de P. Montrer que $a \mid a_0$ et $b \mid a_n$.

d) En déduire que si $x \in \mathrm{K}^\times$ est racine d'un polynôme unitaire à coefficient dans A alors $x \in \mathrm{A}$.

Exercice 14 On considère l'anneau $\mathrm{A} = \mathbb{Z}$ et $\mathrm{S} = \{2^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ la partie multiplicative de $\mathbb{Z}$ engendrée par 2.

a) Montrer que $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ s'identifie à un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

b) Montrer que $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]/(2\mathrm{X}-1)$.

c) Plus généralement : si A est un anneau commutatif et $\mathrm{S} = \{a^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ où $a \in \mathrm{A}$ alors $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ est isomorphe à $\mathrm{A}[\mathrm{X}]/(a\mathrm{X}-1)$.

d) En déduire que $\mathrm{K}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]/(\mathrm{XY}-1)$ est principal.