

Présentation d'un groupe fini

Proposition 1 — Présentation d'un groupe fini. Soit $\langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle$ une présentation d'un groupe fini G . On a $n \geq m$.

Preuve. L'idée de la démonstration est de se ramener au cas commutatif pour utiliser les théorèmes sur les groupes abéliens libres de type fini. Soient F_m le groupe libre à m générateurs $(x_1, \dots, x_m)$ et

$$F_m^{\text{ab}} = F_m/[F_m, F_m] = \mathbb{Z}^m$$

l'abélianisé de F_m . On note $\pi : F_m \rightarrow F_m^{\text{ab}}$ la surjection canonique.

Par définition, G est le quotient de F_m par H le plus petit sous-groupe distingué de F_m contenant r_i pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Or

$$H = \langle gr_i g^{-1}, \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad g \in F_m \rangle_{\text{groupe}},$$

ainsi, comme F_m^{ab} est un groupe abélien, on a

$$\pi(H) = \langle \pi(r_i), \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket \rangle.$$

On en déduit, par composition un morphisme surjectif de $F_m \rightarrow F_m^{\text{ab}}/\pi(H)$ dont le noyau contient H et donc, par passage au quotient un morphisme surjectif de G dans $F_m^{\text{ab}}/\pi(H)$. Ainsi $\pi(H)$ est un sous-groupe d'indice fini d'un groupe abélien libre de type fini. Il est donc de même rang et toute partie génératrice de $\pi(H)$ a au moins m générateurs.