Vincent Beck

Complément sur le quotient

Exercice 1 — Encore des exercices.

a) Dans l'exemple 6 où $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ et $x\mathscr{R}y \iff x - y \in \mathbb{Z}$. Déterminer les applications compatibles avec $\mathscr{R}$. Normalement, vous devez voir apparaître le lien avec les séries de Fourier

b) Dans l'exemple 7 où $\mathrm{X} = \mathrm{G}$ est un groupe, H un sous-groupe de G. On se donne Y un groupe et $f : \mathrm{G} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de groupes. À quelles conditions f est-elle compatible avec $\mathscr{R}_{\mathrm{H}}$ (resp. $\mathscr{R}'_{\mathrm{H}}$).

c) On se donne X, Y deux ensembles et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application et donc on a sur X la relation d'équivalence $\mathscr{R}_f$. Montrer que f est compatible avec $\mathscr{R}_f$ et que $\overline{f} : \mathrm{X}/\mathscr{R} \to \mathrm{Y}$ l'application obtenue obtenue par passage au quotient de f par $\mathscr{R}_f$ est injective Moralement, en passant au quotient, « on a rendu f injective » ce qui est tout à fait normal puisque la partition $\mathscr{R}_f$ revient à regrouper ensemble les éléments qui ont la même image par f : chaque valeur de f définit un ensemble : ceux qui s'envoie sur lui. Or l'obstruction à l'injectivité est justement le fait d'avoir plusieurs éléments qui s'envoie sur la même chose. On s'affranchit de cette difficulté en les regroupant en un « point » (du quotient).

On aurait aussi pu rendre f injective en restreignant l'ensemble de départ (en choisissant parmi tous les éléments qui s'envoient sur un élément donné un unique élément). En le disant avec le vocabulaire du cours, on choisit un représentant de chacune des classes d'équivalence modulo $\mathscr{R}_f$ ou encore un domaine fondamental pour $\mathscr{R}_f$. L'énorme inconvénient de cette méthode est qu'elle n'est pas canonique : il y a un choix ! Et même plusieurs ! Alors qu'il n'y a pas de choix lorsqu'on passe au quotient (justement, en un sens, la démonstration de la propriété universelle du quotient dit qu'on a pas besoin de faire de choix).

Voici à présent 2 corollaires classiques à la propriété universelle du quotient. On commence par une notation : si X et Y sont deux ensembles, on note $\mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ l'ensemble des applications de X dans Y.

Corollaire 1 — Bijection et Propriété universelle du quotient. Soit X un ensemble, $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur X. Pour tout ensemble Y, on considère l'application

$$\Delta^{\mathrm{Y}}_{\mathscr{R}} : \begin{cases} \mathscr{F}(\mathrm{X}/\mathscr{R}, \mathrm{Y}) & \longrightarrow \mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \\ \quad g & \longmapsto g \circ \pi \,. \end{cases}$$

L'application $\Delta^{\mathrm{Y}}_{\mathscr{R}}$ est injective d'image l'ensemble des applications de X dans Y qui sont compatibles avec $\mathscr{R}$. Elle induit donc une bijection (encore notée $\Delta^{\mathrm{Y}}_{\mathscr{R}}$) entre $\mathscr{F}(\mathrm{X}/\mathscr{R}, \mathrm{Y})$ et $\mathrm{T}^{\mathrm{Y}}_{\mathscr{R}} = \{f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}, \quad f \text{ compatible avec } \mathscr{R}\}$ dont la bijection réciproque est $f \to \overline{f}$.

Preuve. Pour $g \in \mathscr{F}(\mathrm{X}/\mathscr{R}, \mathrm{Y})$, on a $g \circ \pi$ est bien dans $\mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. De plus, on a vu que $g \circ \pi$ est bien compatible avec $\mathscr{R}$. Ainsi l'image de $\Delta^{\mathrm{Y}}_{\mathscr{R}}$ est contenu dans $\mathrm{T}^{\mathrm{Y}}_{\mathscr{R}}$. La propriété universelle du quotient dit précisément que $\mathrm{T}^{\mathrm{Y}}_{\mathscr{R}}$ est dans l'image de $\Delta^{\mathrm{Y}}_{\mathscr{R}}$ et que la bijection réciproque de $\Delta^{\mathrm{Y}}_{\mathscr{R}}$ est $f \mapsto \overline{f}$.

Le corollaire qui suit répond à la question « a-t-on unicité du quotient ? » Le quotient étant une construction parfaitement définie, il est bien sûr unique. La (ou les) question(s) serai(en)t plutôt « dans quel sens le quotient est unique ? » ou encore « unique à quoi près » ? Pourquoi se poser ces questions ? Le quotient est un ensemble abstrait (ces éléments sont des parties de l'ensemble de départ), on a souvent envie de le remplacer par un ensemble plus concret pour faciliter les calculs. Par exemple, dans l'exemple 3 sur les livres, plutôt que de travailler avec l'ensemble des classes d'équivalences de livres qui ont le même éditeur, on a envie de travailler avec l'ensemble des éditeurs. Pour cela, on va essayer de comprendre ce qui caractérise le quotient et il s'agit bien sûr de la propriété universelle du quotient et on va voir comment.

Définition 2 — Représentant d'« un foncteur ». On fixe un ensemble X et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur X. On dit qu'**un couple** (Y_0, π_0) (où Y_0 est un ensemble et $\pi_0 : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}_0$ est une application **compatible avec** $\mathscr{R}$) *représente le foncteur* $\mathrm{F}_{\mathrm{X},\mathscr{R}} : \mathrm{Y} \mapsto \mathrm{T}^{\mathrm{Y}}_{\mathscr{R}} = \{f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}, f \textit{ compatible avec } \mathscr{R}\}$ si pour tout ensemble Z et toute application $g : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$, il existe une unique application $\overline{g} : \mathrm{Y}_0 \to \mathrm{Z}$ telle que $\overline{g} \circ \pi_0 = g$, autrement dit, si pour tout Z l'application

$$\begin{cases} \mathscr{F}(\mathrm{Y}_0, \mathrm{Z}) & \longrightarrow \mathrm{T}^{\mathrm{Z}}_{\mathscr{R}} \\ \quad g & \longmapsto g \circ \pi_0 \end{cases}$$

est bijective.

Remarque : la notion de produit, de coproduit, de limite projective, de limite inductive... sont d'autres exemples de représentation de foncteurs.

La propriété importante du quotient c'est cette histoire de bijection du corollaire 1 qui n'est rien d'autre qu'une reformulation de la propriété universelle.

Exemple 3 La propriété universelle du quotient dit précisement que le couple $(\mathrm{X}/\mathscr{R}, \pi)$ représente le foncteur $\mathrm{F}_{\mathrm{X},\mathscr{R}} : \mathrm{Y} \mapsto \mathrm{T}^{\mathrm{Y}}_{\mathscr{R}}$.

Corollaire 4 — Représentant du foncteur $\mathrm{F}_{\mathrm{X},\mathscr{R}} : \mathrm{Y} \mapsto \mathrm{T}^{\mathrm{Y}}_{\mathscr{R}}$.

(*i*) Soit Y_1 un ensemble et $\delta_1 : \mathrm{X}/\mathscr{R} \to \mathrm{Y}_1$ une bijection. Montrer que $(\mathrm{Y}_1, \delta_1 \circ \pi)$ représente le foncteur $\mathrm{F}_{\mathrm{X},\mathscr{R}} : \mathrm{Y} \mapsto \mathrm{T}^{\mathrm{Y}}_{\mathscr{R}}$.

(*ii*) Réciproquement, si (Y_0, π_0) représente le fonction $\mathrm{Y} \mapsto \mathrm{T}^{\mathrm{Y}}_{\mathscr{R}}$ alors il existe une unique application $\delta_0 : \mathrm{X}/\mathscr{R} \to \mathrm{Y}_0$ tel que $\pi_0 = \delta_0 \circ \pi$ et δ_0 est une bijection de $\mathrm{X}/\mathscr{R} \to \mathrm{Y}_0$ (ainsi (Y_0, π_0) est de la forme ci-dessus).

(*iii*) Soit (Z, δ) un couple où Z est un ensemble et $\delta : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ une application. Montrer que (Z, δ) représente le foncteur $\mathrm{F}_{\mathrm{X},\mathscr{R}} : \mathrm{Y} \mapsto \mathrm{T}^{\mathrm{Y}}_{\mathscr{R}}$ si et seulement si δ surjective et vérifie $\delta(x) = \delta(y) \iff x\mathscr{R}y$ pour tous $x, y \in \mathrm{X}$.

Preuve. *Première démonstration.* Montrons (*i*). On a bien $\delta_1 \circ \pi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}_1$ est compatible avec $\mathscr{R}$ (car π la surjection canonique l'est). A présent si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ est compatible avec $\mathscr{R}$, on peut, grâce à la propriété universelle du quotient, écrire $f = \overline{f} \circ \pi$ et donc comme δ_1 est bijective, $f = (\overline{f} \circ {\delta_1}^{-1}) \circ (\delta_1 \circ \pi)$. Ainsi on a bien la propriété de factorisation par $\delta_1 \circ \pi$. Si $g \circ (\delta_1 \circ \pi) = g' \circ (\delta_1 \circ \pi)$ alors $g = g'$ puisque $\delta_1 \circ \pi$ est surjective comme composée d'application surjective : soit $z \in \mathrm{Y}_1$, on a $z = (\delta_1 \circ \pi)(t)$ avec $t \in \mathrm{X}$ et donc

$$g(z) = g \circ (\delta_1 \circ \pi)(t) = g' \circ (\delta_1 \circ \pi)(t) = g'(z)\,.$$

Remarquons qu'on aurait pu démontrer l'unicité de la factorisation en disant : si $g \circ (\delta_1 \circ \pi) = g' \circ (\delta_1 \circ \pi)$ alors par unicité de la factorisation par π (propriété universelle du quotient), on a $g \circ \delta_1 = g' \circ \delta_1$. En composant par la bijection inverse ${\delta_1}^{-1}$, on obtient que $g = g'$.

Montrons (*ii*). Comme π_0 est compatible avec $\mathscr{R}$, la propriété universelle du quotient montre qu'il existe une unique application $\delta_0 : \mathrm{X}/\mathscr{R} \to \mathrm{Y}_0$ telle que $\delta_0 \circ \pi = \pi_0$. Montrons que δ_0 est bijective. Pour cela, on va construire l'inverse de δ_0. La méthode utilisée est extrêmement systématique.

Comme (X_0, π_0) représente le foncteur $\mathrm{F}_{\mathrm{X},\mathscr{R}} : \mathrm{Y} \mapsto \mathrm{T}^{\mathscr{R}}_{\mathrm{Y}}$ et que π est compatible avec $\mathscr{R}$, il existe une (unique) application $\delta : \mathrm{Y}_0 \to \mathrm{X}/\mathscr{R}$ telle que $\delta \circ \pi_0 = \pi$.

On a donc $\delta \circ \delta_0 \circ \pi = \pi = \mathrm{id}_{\mathrm{X}/\mathscr{R}} \circ \pi$. Par unicité de la factorisation par π (ou par le fait que π est surjectif), on a $\delta \circ \delta_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{X}/\mathscr{R}}$. De même, on a $\delta_0 \circ \delta \circ \pi_0 = \pi_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{Y}_0} \circ \pi_0$ et par unicité de la factorisation par π_0 (puisque (Y_0, π_0) représente le foncteur $\mathrm{F}_{\mathrm{X},\mathscr{R}} : \mathrm{Y} \mapsto \mathrm{T}^{\mathscr{R}}_{\mathrm{Y}}$), on obtient $\delta_0 \circ \delta = \mathrm{id}_{\mathrm{Y}_0}$. Ainsi δ_0 et δ sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.

Montrons (*iii*). Supposons que (Z, δ) représente le foncteur $\mathrm{F}_{\mathrm{X},\mathscr{R}} : \mathrm{Y} \mapsto \mathrm{T}^{\mathrm{Y}}_{\mathscr{R}}$. On a alors, d'après (*ii*), $\delta = \delta_0 \circ \pi$ où δ_0 est bijective. Ainsi par composition, δ est surjective. De plus, comme δ_0 est bijective, on a, (en composant par ${\delta_0}^{-1}$)

$$\delta(x) = \delta(y) \iff \pi(x) = \pi(y) \iff x\mathscr{R}y$$

Réciproquement, si δ est surjective et $\delta(x) = \delta(y) \iff x\mathscr{R}y$ alors δ est en particulier compatible avec $\mathscr{R}$. De plus, on a $\mathscr{R} = \mathscr{R}_\delta$ et donc, d'après l'exercice ci-dessus, l'application δ_0 obtenue par passage au quotient de δ à $\mathrm{X}/\mathscr{R}$ (c'est-à-dire $\delta_0 \circ \pi = \delta$) est injective. De plus, l'image de δ_0 et l'image de δ coïncide donc δ_0 est bijective et le point (*i*) donne la solution.

Pour finir, remarquer que les points (*i*) et (*ii*) se retrouvent très facilement à partir de (*iii*).

Exercice 2 — Exemples.

(*i*) On suppose qu'il existe des voitures de toutes les couleurs, montrer que $(\text{couleurs}, \text{voiture} \mapsto \text{sa couleur})$ représente $\mathrm{F}_{\mathrm{X},\mathscr{R}}$ de l'exemple 2.

(*ii*) Montrer que $(\text{éditeur}, \text{livre} \mapsto \text{son éditeur})$ représente le foncteur $\mathrm{F}_{\mathrm{X},\mathscr{R}}$ de l'exemple 3.

(*iii*) On se donne une application $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ et on note $\widetilde{f} : \mathrm{X} \to f(\mathrm{X})$ l'application induite par f (c'est-à-dire celle qui fait $x \mapsto f(x)$ mais ou on a remplacé l'espace d'arrivée par l'image). Alors $(f(\mathrm{X}), \widetilde{f})$ représente le foncteur $\mathrm{F}_{\mathrm{X},\mathscr{R}_f}$.

On passe maintenant à d'autres exemples d'ensemble quotient :

Exercice 3 — quotient et produit. Soit X (resp. Y) un ensemble et $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{S}$) une relation d'équivalence sur X (resp. $\mathscr{R}$).

a) Montrer que la relation notée $\mathscr{R} \times \mathscr{S}$ définie sur $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ par

$$(x, y)(\mathscr{R} \times \mathscr{S})(x', y') \qquad \Longleftrightarrow \qquad x\mathscr{R}x' \text{ et } y\mathscr{S}y'$$

est une relation d'équivalence.

b) Décrire une bijection entre $(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})/(\mathscr{R} \times \mathscr{S})$ et $\mathrm{X}/\mathscr{R} \times \mathrm{Y}/\mathscr{S}$.

c) (Où on fait le lien entre les deux notions de compatibilité vue en cours) Soit $(\mathrm{M}, \star)$ un monoïde et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur M. On note $f : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}/\mathscr{R}$ l'application composée de la surjection canonique et de l'application $\star$ c'est-à-dire $f(x, y) = \pi(x \star y)$. Montrer que $\mathscr{R}$ est compatible avec $\star$ si et seulement si f est compatible avec $\mathscr{R} \times \mathscr{R}$.

d) Donner une démonstration « en une ligne » du théorème 2 (sauf pour la vérification du fait que la loi obtenue est associative et a un élément neutre qu'il faut faire à la main).