

Sous-groupes distingués

Exemple 1 — Quelques exemples de sous-groupes distingués.

- (i) $GL_m(\mathbb{R})^+$ est un sous-groupe distingué de $GL_m(\mathbb{R})$.
- (ii) Montrer que si T est un sous-groupe distingué de $k^\times$ alors $G_T = \det^{-1}(T)$ est un sous-groupe distingué de $GL_n(k)$.
- (iii) Montrer que les sous-groupes distingués de G_T sont les G_T et les Tid pour T parcourant les sous-groupes de $k^\times$ (sauf si $k = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$ et $n = 2$).
- (iv) Montrer que si $H \leq ZG$ alors $H \trianglelefteq G$. (Tous les sous-groupes du centre sont distingués).
- (v) Si $n \neq 4$, montrer que les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $1, \mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$.
- (vi) Montrer que si $D(G) = [G, G] \leq H$ alors H est distingué dans G et que G/H est commutatif.
- (vii) Si $H \leq G$. Montrer qu'il existe un plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué (nommé *normalisateur de G dans H*) et noté $N_G(H)$. Montrer que $N_G(H) = \{g \in G, \quad gHg^{-1} = H\}$.
- (viii) Montrer que $H \trianglelefteq G$ si et seulement si $N_G(H) = G$.
- (ix) On suppose que G est fini. On note p le plus petit diviseur premier de $|G|$ et H un sous-groupe d'indice p de G (un tel sous-groupe n'existe pas forcément). Montrer que $H \triangleleft G$.

Exercice 1 — Unicité du quotient. Énoncer et démontrer une propriété d'« unicité » du quotient de groupe similaire à celle pour les groupes qui se trouve dans la première feuille que j'ai envoyée.