

p -groupes et théorème de Sylow

Définition 1 – Élément maximal. Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné. Un élément $x \in X$ est un *élément maximal* de X si pour tout $y \in X$ vérifiant $x \leq y$, on a $x = y$ (c'est-à-dire si x n'a pas d'élément strictement plus grand que lui dans X).

Soit G un groupe et H un sous-groupe de G . On dit que H est maximal si c'est un élément maximal de l'ensemble ordonné (pour l'inclusion) des sous-groupes de G distincts de G . Autrement dit, un sous-groupe H de G est maximal si les seuls sous-groupes de G contenant H sont H et G , c'est-à-dire si pour tout G' vérifiant $H \leq G' \leq G$, on a $G' = H$ ou $G' = G$.

Exercice 1 – Sous-groupes maximaux.

- Soit G un groupe et H un sous-groupe d'indice p premier. Montrer que H est un sous-groupe maximal de G .
- Soit G un p -groupe et H un sous-groupe maximal de G . Montrer que $H \triangleleft G$ et $(G : H) = p$.
- En déduire que dans un p -groupe, les sous-groupes maximaux sont exactement les sous-groupes d'indice p et qu'ils sont tous distingués.
- Soit G un groupe. On considère $\Phi(G)$ le *sous-groupe de Frattini* qui est défini comme l'intersection des sous-groupes maximaux de G . Montrer que $\Phi(G)$ est distingué dans G .
- Soit G un p -groupe. Montrer que $G/\Phi(G)$ est abélien et que tous ses éléments (sauf 1) sont d'ordre p .
- Montrer qu'une partie S de G engendre G si et seulement si son image dans $G/\Phi(G)$ engendre $G/\Phi(G)$.

Exercice 2 – Encore une démonstration des théorèmes de Sylow. Cet exercice propose une autre démonstration des théorèmes de Sylow. Il s'agit donc d'obtenir les résultats sans se servir des théorèmes de Sylow.

- Soit G un groupe. On suppose que G admet un p -Sylow. On va montrer que tout sous-groupe de G admet aussi un p -Sylow. Pour cela, faire opérer H sur G/S (par translation à gauche) et calculer le stabilisateur de aS pour tout $a \in G$. Montrer que ces stabilisateurs sont des p -groupes et montrer qu'il en existe un dont l'indice est premier à p . Conclure : on obtiendra en particulier qu'il existe $a \in G$ tel que $aSa^{-1} \cap H$ est un sous-groupe de Sylow de H .
- Montrer que tout groupe d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ (penser au morphisme de Cayley) puis que $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (penser aux matrices de permutations). En déduire que tout groupe fini admet un p -Sylow.
- Retrouver le résultat de la question **a** en une ligne en utilisant les théorèmes de Sylow.

Définition 2 Soit G un groupe (pas nécessairement fini) et $H \leq G$. On dit que H est *sous-groupe caractéristique* de G si $\varphi(H) = H$ pour tout $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ ou encore si $\varphi(H) \subset H$ pour tout $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$.

Un sous-groupe caractéristique est toujours distingué (penser aux automorphismes intérieurs). La réciproque est fausse.

Par exemple, $\{1\}$, G , $D(G)$ et $Z(G)$ sont des sous-groupes caractéristiques.

Exercice 3 – Sous-groupes caractéristiques.

- Soit G un groupe ayant un seul sous-groupe H d'ordre (resp. d'indice) d . Montrer que H est un sous-groupe caractéristique.

Exercice 4 – p -Sylow, sous-groupe, quotient.

- Soit $H \leq G$ et S' un p -Sylow de H . Montrer qu'il existe S un p -Sylow de G tel que $S' = S \cap H$. Montrer que ce n'est pas vrai pour tous les p -Sylow de G .
- Soit $H \leq G$, S' un p -Sylow de H et S_1 un p -Sylow de G . Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $S' = gSg^{-1} \cap H$ (comparer avec l'exercice 2).
- Soit $H \leq G$ et S un p -Sylow de G . Montrer que $S \cap H$ est un p -Sylow de H .
- Soit $H \leq G$ et $\pi : G \rightarrow G/H$ la surjection canonique. Montrer que $\pi(S)$ est un p -Sylow de G/H et que, pour tout p -Sylow S' de G/H , il existe un p -Sylow de G tel que $\pi(S) = S'$. Montrer qu'un tel S est unique si, de plus, H est un p -groupe ou $H \subset Z(G)$.

Exercice 5 – Théorème de Sylow et groupe symétrique.

- Déterminer les éléments d'ordre p dans $\mathfrak{S}_p$. En particulier, combien y en a-t-il ?

b) Déterminer le nombre de p -Sylow de $\mathfrak{S}_p$.

c) En déduire le théorème de Wilson : $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Exercice 6 – Lemme de Cauchy et théorème de Sylow. Dans l'une des preuves des théorèmes de Sylow (laquelle au fait ?), on s'est servi du lemme de Cauchy et pas dans l'autre (c'est sûr ?). Vérifier qu'à l'aide des théorèmes de Sylow et du corollaire 1 sur les p -groupes, on retrouve le lemme de Cauchy.