Autour des groupes de réflexions
Cours : Michel Broué
TD : Vincent Beck

Master 2 — Mathématiques fondamentales
Université Paris VII — Denis Diderot
Année 2005—2006

Un peu d'algèbre commutative

Notation 1 — Algèbre. Soit k un corps. Pour simplifier, le terme « k-algèbre » désigne une k-algèbre associative unitaire et commutative.

Notation 2 — Algèbre graduée. Soit k un corps. Pour simplifier, le terme « k-algèbre graduée » désigne une k-algèbre associative unitaire et commutative munie d'une décomposition en somme directe de k-espace vectoriel

$$\mathrm{A} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{A}_i$$

avec $\mathrm{A}_0 = k$. L'idéal gradué $\mathrm{A}_+ = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}^*} \mathrm{A}_i$ est alors un idéal maximal de A.

Théorème 3 — Théorème des zéros de Hilbert. Soient k un corps et L une k-algèbre de type fini. Si L est un corps alors $[\mathrm{L} : k] < +\infty$.

Exercice 1 — Autour du théorème des zéros de Hilbert. Soient k un corps algébriquement clos, A, B deux k-algèbres de type fini et $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un morphisme de k-algèbres.

a) Montrer que tout idéal maximal de A est un hyperplan de A.

b) Montrer que l'image réciproque d'un idéal maximal de B est un idéal maximal de A.

c) Montrer que l'ensemble des morphismes de k-algèbres de A dans k et l'ensemble des idéaux maximaux de A sont en bijection.

d) Déterminer les idéaux maximaux de $k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$. Montrer qu'ils sont en bijection avec k^n.

Exercice 2 — Un tout petit peu de géométrie algébrique. Soient k un corps algébriquement clos. Pour I une partie de $k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ et $\mathrm{X} \subset k^n$ on note

$$\mathrm{V}(\mathrm{I}) = \{x \in k^n, \quad \forall \mathrm{P} \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{P}(x) = 0\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{J}(\mathrm{X}) = \{\mathrm{P} \in k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n], \quad \forall x \in \mathrm{X}, \quad \mathrm{P}(x) = 0\}.$$

a) Soit $\mathrm{X} \subset k^n$. Montrer que $\mathscr{J}(\mathrm{X})$ est un idéal de $k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ égal à son radical.

b) Soient $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y} \subset k^n$. Montrer que $\mathscr{J}(\mathrm{Y}) \subset \mathscr{J}(\mathrm{X})$.

c) Soient $\mathrm{I} \subset \mathrm{J} \subset k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$. Montrer que $\mathrm{V}(\mathrm{J}) \subset \mathrm{V}(\mathrm{I})$. En déduire que $\mathrm{V}(\mathrm{I}) = \mathrm{V}(\langle \mathrm{I} \rangle)$.

d) Soient $\mathrm{X} \subset k^n$ et $\mathrm{I} \subset k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$. Montrer que

$$\mathrm{X} \subset \mathrm{V}(\mathscr{J}(\mathrm{X})) \quad \text{et} \quad \mathrm{I} \subset \mathscr{J}(\mathrm{V}(\mathrm{I})) \qquad \text{puis que} \qquad \mathscr{J}(\mathrm{X}) = \mathscr{J}(\mathrm{V}(\mathscr{J}(\mathrm{X}))) \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(\mathrm{I}) = \mathrm{V}(\mathscr{J}(\mathrm{V}(\mathrm{I}))).$$

e) Soit $\mathrm{I} \subset k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$. Montrer que $\mathrm{V}(\mathrm{I}) = \varnothing$ si et seulement si $\langle \mathrm{I} \rangle = k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$.

f) Soit $\mathrm{I} \subset k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$. Montrer que $\mathscr{J}(\mathrm{V}(\mathrm{I})) = \sqrt{\langle \mathrm{I} \rangle}$.

g) On considère r éléments $x_1, \ldots, x_r \in k^n$. Montrer qu'il existe une famille de polynôme $(\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_r)$ telle que $\mathrm{P}_i(x_j) = \delta_{ij}$.

h) Soit $\mathrm{I} \subset k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$. Montrer que $\mathrm{V}(\mathrm{I})$ est fini si et seulement si $\dim_k k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]/\langle \mathrm{I} \rangle$ est finie et qu'alors

$$|\mathrm{V}(\mathrm{I})| \leqslant \dim_k (k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]/\langle \mathrm{I} \rangle.$$

On suppose pour les questions **h** et **i** que I est une partie de $k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ formée d'éléments homogènes.

i) Montrer que
$$\mathrm{V}(\mathrm{I}) \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \in \mathrm{V}(\mathrm{I}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{I} \cap k \subset \{0\}.$$

j) Montrer que
$$\mathrm{V}(\mathrm{I}) \text{ est fini} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{V}(\mathrm{I}) \subset \{0\}.$$

On suppose pour la question **j** que I est une partie de $k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ formée d'éléments homogènes de degrés strictement positifs.

k) Montrer que $\mathrm{V}(\mathrm{I}) = \{0\}$ si et seulement si $\dim_k k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]/\langle \mathrm{I} \rangle < +\infty$.

Exercice 3 – Algèbre de polynômes. Soient k un corps et $\mathrm{S} = k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ une k-algèbre graduée de polynômes engendrée par des éléments homogènes X_i de degrés strictement positifs algébriquement indépendants.

a) Soient A une k-algèbre graduée et $\mathrm{M} = \oplus_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{M}_i$ un A-module gradué. Montrer que M est un A-module de type fini si et seulement si $\mathrm{M}/(\mathrm{A}_+\mathrm{M})$ est un k-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si M est A-module libre de type fini qui est gradué alors M admet une base homogène.

b) Soient $\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n \in \mathrm{S}$ des éléments homogènes de degrés strictement positifs. On note $\mathrm{R} = k[\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n]$. Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes

- (i) S est entier sur R ;
- (ii) S est un R-module de type fini ;
- (iii) l'idéal de S engendré par $(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n)$ est de codimension finie dans S ;
- (iv) Il existe une extension algébriquement close K de k telle que le système $\mathrm{Y}_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ d'inconnues $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{K}^n$ admet 0 pour unique solution.
- (v) Pour toute extension K de k, le système $\mathscr{S}_{\mathrm{K}}$ d'équations $\mathrm{Y}_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ d'inconnues $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{K}^n$ admet 0 pour unique solution.

c) On reprend les notations de la question **b**. Montrer que, si les conditions de la question **b** sont vérifiées, les Y_i sont algébriquement indépendants et que S est un R-module libre de rang

$$\prod_{i=1}^{\ell} \deg(\mathrm{Y}_i) / \prod_{i=1}^{\ell} \deg(\mathrm{X}_i)\,.$$

Pour les questions **d** et **e**, on considère G un groupe fini d'automorphismes de l'algèbre graduée S. On note S^{G} la sous-algèbre de S formée des éléments invariants sous G. Soient $\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n \in \mathrm{S}^{\mathrm{G}}$ des éléments homogènes de degrés strictement positifs.

d) Montrer que si $\mathrm{S}^{\mathrm{G}} = k[\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n]$ alors $|\mathrm{G}| = \prod_{i=1}^{\ell} \deg(\mathrm{Y}_i) / \prod_{i=1}^{\ell} \deg(\mathrm{X}_i)$.

e) On suppose que les Y_i vérifient les conditions de la question **b**. Montrer que si

$$|\mathrm{G}| = \prod_{i=1}^{\ell} \deg(\mathrm{Y}_i) / \prod_{i=1}^{\ell} \deg(\mathrm{X}_i)$$

alors $\mathrm{S}^{\mathrm{G}} = k[\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n]$.