Autour des groupes de réflexions
Cours : Michel Broué
TD : Vincent Beck

Master 2 — Mathématiques fondamentales
Université Paris VII — Denis Diderot
Année 2005—2006

Base : une axiomatique

Soient X un ensemble et $s : \mathscr{P}(\mathrm{X}) \to \mathscr{P}(\mathrm{X})$ une application de l'ensemble des parties de X dans lui-même vérifiant :

(i) $\forall \mathrm{Y} \subset \mathrm{X}, \quad \mathrm{Y} \subset s(\mathrm{Y})$;
(ii) $\forall \mathrm{Y} \subset \mathrm{X}, \quad s(\mathrm{Y}) = s(s(\mathrm{Y}))$;
(iii) Si $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$, alors $s(\mathrm{Z}) \subset s(\mathrm{Y})$;
(iv) $\forall \mathrm{Y} \subset \mathrm{X}, \quad \forall x \in s(\mathrm{Y}), \quad \exists \mathrm{Z} \subset \mathrm{Y},\ \mathrm{Z}$ finie, $\quad x \in s(\mathrm{Z})$;
(v) Si $z \in s(\mathrm{Y} \cup \{x\})$ et $z \notin s(\mathrm{Y})$ alors $x \in s(\mathrm{Y} \cup \{z\})$.

Définition 1 — Partie libre, partie génératrice, base. On dit que $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ est
— une partie génératrice si $s(\mathrm{Y}) = \mathrm{X}$;
— une partie libre si $x \notin s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{x\})$ pour tout $x \in \mathrm{Y}$;
— une base si Y est libre et génératrice.

Exercice 1 — Conséquences des axiomes.

a) Montrer que X est génératrice.

b) Montrer que $\varnothing$ est libre.

c) Soit $x \in \mathrm{X}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\{x\}$ soit libre.

d) Montrer que toute partie d'une partie libre est libre.

e) Montrer qu'une partie Y est libre si et seulement si toute partie finie Z de Y est libre.

f) Montrer que toute partie contenant une partie génératrice est génératrice.

g) Montrer que si Y est libre et $x \notin s(\mathrm{Y})$ alors $\mathrm{Y} \cup \{x\}$ est libre.

h) Montrer que $s(\mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2) = s(\mathrm{Y}_1 \cup s(\mathrm{Y}_2))$.

Exercice 2 — Bases.

a) Soit $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes.

1. Y est une partie génératrice minimale ;
2. Y est une partie libre maximale ;
3. Y est une base.

En déduire que si B est une base et si $\mathrm{B}' \subset \mathrm{B}$ est génératrice alors $\mathrm{B}' = \mathrm{B}$.

b) Théorème de la base incomplète. Soient $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ une partie libre et $\mathrm{Z} \subset \mathrm{X}$ une partie génératrice. Il existe une base contenant Y et contenue dans $\mathrm{Z} \cup \mathrm{Y}$.

c) Montrer que X admet une base, que toute partie libre Y peut être complétée en une base et que de toute partie génératrice Z, on peut extraire une base.

On suppose pour les questions **d**, **e**, **f** et **g** que X admet une partie génératrice finie Z.

d) Montrer que X admet une base finie.

e) Soient B une base finie de X et B' une base de X. On suppose que $|\mathrm{B} \cap \mathrm{B}'| < |\mathrm{B}|$. Montrer qu'il existe une base B_1 de X de cardinal $|\mathrm{B}|$ telle que $|\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}'| > |\mathrm{B} \cap \mathrm{B}'|$.

f) En déduire que toutes les bases de X ont le même cardinal.

g) Montrer que si X admet une base finie de cardinal n, alors

1. toute partie libre Y a pour cardinal au plus n ;
2. toute partie génératrice Z a pour cardinal au moins n ;
3. si B est libre et de cardinal n alors B est une base ;
4. si B est génératrice et de cardinal n alors B est une base.

On suppose à présent que X n'admet aucune partie génératrice finie.

h) Soient B et B′ deux bases de X. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{B}'$, il existe une partie finie $\mathrm{Y}_x \subset \mathrm{B}$ telle que $x \in s(\mathrm{Y}_x)$.

i) En déduire que toutes les bases de X ont le même cardinal c'est-à-dire sont en bijection.

Exercice 3 — Espace vectoriel. Soient k un corps, V un k-espace vectoriel et

$$s\colon \begin{cases} \mathscr{P}(\mathrm{V}) \longrightarrow \mathscr{P}(\mathrm{V}) \\ \mathrm{Y} \quad \longmapsto \operatorname{vect} \mathrm{Y}\,. \end{cases}$$

a) Montrer que s vérifie les points à (i) à (v).

b) Calculer $s(\varnothing)$ et traduire la condition de la question **c** de l'exercice 1.

c) Montrer que Y est libre si et seulement si

$$\forall\, (\lambda_y)_{y\in\mathrm{Y}} \in k^{(\mathrm{Y})}, \qquad \sum_{y\in\mathrm{Y}} \lambda_y y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall\, y \in \mathrm{Y}, \quad \lambda_y = 0. \tag{$*$}$$

d) Montrer que Y est une base si et seulement si

$$\forall\, x \in \mathrm{X}, \quad \exists\,!\,(\lambda_y)_{y\in\mathrm{Y}} \in k^{(\mathrm{Y})}, \qquad x = \sum_{y\in\mathrm{Y}} \lambda_y y.$$

Exercice 4 — Extension de corps. Soient k un corps, $k \to \mathrm{K}$ une extension de corps et

$$s\colon \begin{cases} \mathscr{P}(\mathrm{K}) \longrightarrow \mathscr{P}(\mathrm{K}) \\ \mathrm{Y} \quad \longmapsto \operatorname{alg} \mathrm{Y} \end{cases}$$

où $\operatorname{alg} \mathrm{Y}$ est l'ensemble des éléments de K algébrique sur $k(\mathrm{Y})$.

a) Montrer que s vérifie les points à (i) à (v).

b) Calculer $s(\varnothing)$ et traduire la condition de la question **c** de l'exercice 1.

c) Soient $\mathrm{Y} \subset \mathrm{K}$ et $c = (\varepsilon_y)_{y\in\mathrm{Y}} \in \{-1, 1\}^{\mathrm{Y}}$. On pose $\mathrm{Y}^c = \{y^{\varepsilon_y}, y \in \mathrm{Y}\}$. Comparer $k(\mathrm{Y})$ et $k(\mathrm{Y}^c)$. En déduire que Y est libre si et seulement si Y^c l'est.

d) Soient $\mathrm{Y} \subset \mathrm{K}$ et $d = (i_y)_{y\in\mathrm{Y}} \in {\mathbb{N}^*}^{\mathrm{Y}}$. On pose $\mathrm{Y}_d = \left\{y^{i_y}, y \in \mathrm{Y}\right\}$. Montrer que Y est libre si et seulement si Y_d est libre et $y^{i_y} \neq z^{i_z}$ pour tout $y \neq z$.

e) Soient $\mathrm{Y} \subset \mathrm{K}$ et $(i_y)_{y\in\mathrm{Y}} \in (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\})^{\mathrm{Y}}$. On pose $\mathrm{Y}^* = \left\{y^{i_y}, y \in \mathrm{Y}\right\}$. Montrer que Y est libre si et seulement si Y^* est libre et $y^{i_y} \neq z^{i_z}$ pour tout $y \neq z$.

f) Montrer que l'équivalence des trois propositions suivantes :

1. Y est libre ;
2. Si $\mathrm{P} \in k[\mathrm{X}_y,\ y \in \mathrm{Y}]$ vérifie $\mathrm{P}((y)_{y\in\mathrm{Y}}) = 0$ alors $\mathrm{P} = 0$; $(*)$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute partie $\mathrm{Z} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ de cardinal n, le seul polynôme $\mathrm{P} \in k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ vérifiant $\mathrm{P}(y_1, \ldots, y_n) = 0$ est le polynôme nul. $(**)$