

Caractère

Exercice 1 — Groupe produit. Soient G et H deux groupes finis et V une représentation de G (sur $\mathbb{C}$) et W une représentation de H (sur $\mathbb{C}$).

- Construire sur $V \otimes W$ une structure de $G \times H$ -module (on pourra considérer pour $g \in G$ et $h \in H$, $T(\rho_V(g), \rho_W(h))$).
- Calculer le caractère de la représentation précédente en fonction de celui de V et de celui de W .
- En déduire que si V et W sont irréductibles alors $V \otimes W$ est une représentation irréductible de $G \times H$.
- Montrer qu'on décrit ainsi toutes les représentations irréductibles de $G \times H$ sur $\mathbb{C}$.
- Se convaincre que ces calculs ont déjà été vu lorsque G et H sont abéliens.

Exercice 2 — Dimension des représentations irréductibles. Le but de cet exercice est de montrer que les dimensions des représentations irréductibles sur $\mathbb{C}$ d'un groupe fini divisent l'ordre de $G/Z(G)$ (et pas seulement l'ordre de G). Soit V une représentation irréductible de G . On note $n = \dim V$ sa dimension.

- Construire sur $V^{\otimes m} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_m$ une structure de G^m -module. Montrer que ce G^m est irréductible (on pourra utiliser l'exercice 1)
- Montrer que si $g \in Z(G)$ alors $\rho_V(g)$ est une homothétie. On note $\lambda(g)$ le rapport de cet homothétie.
- On note H le sous-groupe de G^m formé des éléments $(g_1, \dots, g_m)$ avec $g_i \in Z(G)$ et $g_1 \cdots g_m = 1$. Montrer que H agit trivialement sur $V^{\otimes m}$. En déduire que $V^{\otimes m}$ fournit en fait une représentation de G^m/H qui, de plus, est irréductible.
- Montrer que $|H| = (Z(G))^{m-1}$. En déduire que $(\dim V)^m \mid |G/Z(G)|^{m-1}$ et ceci pour tout $m \geq 1$.
- En déduire que $\dim V \mid |G/Z(G)|$ (on a $|G/(Z(G) \dim(V))^m| \in (\dim V)^{-1} \mathbb{Z}$ pour tout $m \geq 1$).

Exercice 3 — Entier algébrique. Soit P un polynôme dont les coefficients sont entiers sur $\mathbb{Z}$, G un groupe fini et χ un caractère de G . Montrer que

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} P(\chi(g))$$

est un entier algébrique.

Exercice 4 — Racine de l'unité. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$ et $a = n^{-1}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$. On suppose que a est un entier algébrique. Le but est de montrer que $a = 0$ ou $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = a$.

- On suppose que λ_i est une racine n_i^{e} de l'unité et on note $\ell = \text{ppcm}(n_i, 1 \leq i \leq n)$. Montrer que $\lambda_i \in \mathbb{Q}(\zeta)$ où ζ est une racine ℓ^{e} primitive de 1.
- Montrer que $\mathbb{Q}(\zeta)$ est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$.
- Montrer que $\prod_{\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})} \sigma(a)$ est un entier (montrer qu'il est rationnel et entier sur $\mathbb{Z}$) de norme plus petite que 1.
- Conclure.

Exercice 5 Soit G un groupe fini et ρ une représentation irréductible de G sur $\mathbb{C}$ de degré n et de caractère χ .

- Montrer que $c(s)\chi(s)/n$ est un entier algébrique.
- En déduire que si $c(s)$ et n sont premiers entre eux alors $\chi(s)/n$ est un entier algébrique.
- En déduire que si $\chi(s) \neq 0$ alors $\rho(s)$ est une homothétie (utiliser l'exercice 4).