Vincent Beck

Rappel de calcul différentiel

Différentiabilité.

Exercice 1 — Exemples et contre-exemples.

a) Étudier suivant les valeurs de $\alpha > 0$, la différentiabilité en $(0,0)$ de l'application $f : (x,y) \mapsto |xy|^\alpha$.

b) Soit f l'application donnée par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \begin{cases} y^2/x & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0\,. \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que f admet une dérivée suivant toutes les directions mais n'est pas différentiable en 0 ni même continue en 0.

c) Soit f l'application donnée par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent mais ne sont pas égales.

Exercice 2 — Premiers exemples.

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On définit $g : (x,y) \mapsto f(y,x)$, $g_1 : (x,y) \mapsto f(x, y+x)$ et $h : x \mapsto f(x,-x)$. Calculer

$$\frac{\partial g}{\partial x}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad h'(x)\,.$$

b) Critiquer la notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$? Pourquoi la notation $\dfrac{\partial f}{\partial e_i}$ ou ∂_i est-elle meilleure ?

c) Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ une application différentiable, $a \in \mathrm{U}$ et $v \in \mathrm{E}$. Montrer que l'application

$$f_v : t \longmapsto f(a+tv)$$

est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 et dérivable en tout point où elle est définie. Calculer la dérivée de f_v en $t = 0$. On suppose que f est k-fois différentiable en a. Calculer les dérivés successives de ${f_v}^{(k)}(0)$.

d) Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ une application deux fois différentiable. Montrer que l'application $x \mapsto \mathrm{d}f(x)(x)$ est différentiable et calculer sa différentielle.

e) Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ une application de classe $\mathscr{C}^\infty$, $a \in \mathrm{U}$ et $v \in \mathrm{E}$. Montrer que l'application $v \mapsto \mathrm{d}^k f(a)(v, \ldots, v)$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 3 — Exemple concret. On considère les applications

$$f : \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto x^2 + xy + y^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \sin x + \sin y + \sin(x+y)\,. \end{cases}$$

a) Déterminer les extrema de f. Même question en remplaçant $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $(\mathbb{R}_-^*)^2$, puis $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-^*$.

b) Déterminer les extrema de g.

Exercice 4 — Exemple concret 2. On considère l'application

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto (x+y, xy) \end{cases}$$

a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Calculer la différentielle de f en (x,y). Déterminer l'ensemble S des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en lesquels $\mathrm{d}f_{(x,y)}$ est inversible ?

b) Calculer $f(\mathbb{R}^2)$? L'application f est-elle un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$? L'application f est-elle un difféomorphisme de S sur $f(\mathrm{S})$? Trouver un ouvert connexe maximal U de $\mathbb{R}^2$ tel que f un un difféomorphisme de U sur $f(\mathrm{S})$.

Exercice 5 — Exemple concret 3. On considère l'application

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto (x^2-y^2, 2xy) \end{cases}$$

a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Calculer la différentielle de f en (x,y). Pour quels points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est-elle inversible ?

b) Calculer $f(\mathbb{R}^2)$ et $f(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\})$? L'application f est-elle un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$? L'application f est-elle un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ sur $f(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\})$?

c) Déterminer deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^2$ aussi grands que possibles tels que $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ soit un difféomorphisme de U sur V.

d) Déterminer l'image par f d'une droite passant par l'origine, d'un cercle centré en l'origine, d'une droite horizontale et d'une droite verticale.

Exercice 6 — Calcul matriciel. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer le gradient de chacune des applications

$$\mathrm{tr}\,:\begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{A} & \longmapsto \mathrm{tr}\,\mathrm{A} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \det\colon \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{A} & \longmapsto \det \mathrm{A}\,. \end{cases}$$

Indication : quel est le produit scalaire en question ? Pensez au développement suivant une rangée pour le déterminant.

b) Soit I un partie de $[\![1\,,\, n]\!]$. Pour $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on note $|\mathrm{A}_\mathrm{I}|$ le mineur principal de A obtenu en considérant les lignes et les colonnes d'indice appartenant à A. Quel est le gradient de

$$\begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{A} & \longmapsto |\mathrm{A}|_\mathrm{I}\,. \end{cases}$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Étudier la différentiabilité de l'application

$$\begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{A} & \longmapsto \mathrm{A}^k\,. \end{cases}$$

Exercice 7 — Gradient, Hessien et composition. Soient $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle_\mathrm{E})$ un espace euclidien, U un ouvert de E et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$.

a) Soient $(\mathrm{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle_\mathrm{F})$ un espace euclidien et $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire. Montrer qu'il existe une unique application $u^* : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ telle que

$$\forall\,(x,y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}, \qquad \langle u(x), y\rangle_\mathrm{F} = \langle x, u^*(y)\rangle_\mathrm{E}\,.$$

Montrer que u^* est linéaire. On dit que u^* est l'adjoint de u. Soit $(\mathrm{G}, \langle\cdot,\cdot\rangle_\mathrm{G})$ un espace euclidien et $v : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ une application linéaire. Calculer $(v \circ u)^*$ Si F est un sous-espace vectoriel de E et $i : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ est l'inclusion, que vaut i^*, et ${\mathrm{id}_\mathrm{E}}^*$?

b) Soient V un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $f(\mathrm{U})$ et $g : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Calculer le gradient de $g \circ f$. Calculer $\nabla(f^2)$. On suppose $f > 0$, calculer $\nabla(\sqrt{f})$. Expliquer comment on retrouve l'expression classique du gradient dans le cas de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

c) On suppose f et g de classe $\mathscr{C}^2$. Calculer le Hessien de $g \circ f$, de f^2 et de $\sqrt{f}$ si $f > 0$. Expliquer comment on retrouve l'expression classique du Hessien dans le cas de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

d) Soient V un ouvert de F et $g : \mathrm{V} \to \mathrm{E}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $g(\mathrm{V}) \subset \mathrm{U}$. Calculer le gradient de $f \circ g$. Indication : pour $x \in \mathrm{V}$, on pourra introduire l'adjoint de la différentielle de g en x.

e) Soit $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}$ est un ouvert de l'espace vectoriel des matrices symétriques. En utilisant l'exercice 1 et les questions qui précèdent, calculer le gradient de l'application

$$\begin{cases} \mathcal{S}_n^{++} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{S} & \longmapsto \ln(\det \mathrm{S}) \,. \end{cases}$$

Exercice 8 — Fonction polynomiale. Soient E un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que l'application

$$\varphi \colon \begin{cases} \mathrm{E} \times \mathrm{I} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathrm{P}, x) & \longmapsto \mathrm{P}(x) \end{cases}$$

est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 9 — Forme quadratique. Soit $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{E}})$ un espace euclidien. On note $\| \cdot \|_{\mathrm{E}}$ la norme associée.

a) Étudier la différentiabilité de l'application $x \mapsto \|x\|_{\mathrm{E}}{}^2$, calculer sa différentielle, son gradient et son Hessien (là où ils sont définis).

b) Étudier la différentiabilité de l'application $x \mapsto \|x\|_{\mathrm{E}}$, calculer son gradient et son Hessien (là où ils sont définis). Quel est la norme de ce gradient ?

c) Soit $b : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique. Calculer le gradient et le Hessien de l'application $x \mapsto b(x, x)$. Que se passe-t-il si b n'est plus symétrique ?

Exercice 10 — Norme. Soient E un espace vectoriel non nul de dimension finie et N une norme sur E.

a) Montrer que N n'est pas différentiable en 0. Que peut-on dire de la différentiabilité de N^2 en 0 ? Comparer la différentiabilité de N et de N^2 en dehors de 0. Peut-on parler du gradient de N ?

b) Que dire de la différentiabilité de N et de N^2 lorsque N est une norme euclidienne ?

c) On considère $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{N} = \| \cdot \|_1$. En quel point N est-elle différentiable ? Peut-on parler du gradient de N ?

d) On considère $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{N} = \| \cdot \|_\infty$. En quel point N est-elle différentiable ? Peut-on parler du gradient de N ?

Formule de Taylor.

Exercice 11 — Question de cours. Donner la formule de Taylor-Young en 0

a) à l'ordre 2 pour une fonction de trois variables ;

b) à l'ordre 3 pour une fonction de deux variables ;

c) à l'ordre 19 pour la fonction $f : (x, y) \mapsto x^3y^4 + 4x^3y^2 + 3y^3x + 5xy + 3$.

Exercice 12 — Lemme d'Hadamard.

a) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. Montrer qu'il existe des fonctions $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x).$$

On souhaite remplacer $\mathbb{R}^n$ par un ouvert U de $\mathbb{R}^n$? Donner des hypothèses sur U pour lesquelles le résultat est toujours valable ?

b) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$ et $\mathrm{d}f(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions $h_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad f(x) = \sum_{i,j} x_i x_j h_{i,j}(x).$$

c) Montrer que $\mathrm{I} = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f(0) = 0\}$ est un idéal maximal principal de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

d) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que l'application

$$\mathrm{F} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } y = x \end{cases} \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 13 — Optimisation. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, U un ouvert de E et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$. On considère $a \in \mathrm{U}$. On dit que a est *un minimum* (resp. *minimum strict*) *local de* f s'il existe un voisinage V de a (dans U) tel que $f(x) \geqslant f(a)$ (resp. $f(x) > f(a)$) pour tout $x \in \mathrm{V}$. On dit que a est *un maximum* (resp. *maximum strict*) *local de* f s'il existe un voisinage V de a (dans U) tel que $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) < f(a)$) pour tout $x \in \mathrm{V}$. On dit que a est un *extremum local de* f (resp. *extremum local strict de* f) si a est un minimum local ou un maximum local de f (resp. minimum local strict ou un maximum local strict de f).

a) Soit $a \in \mathrm{U}$ un extremum local de f. On suppose que f est différentiable en a. Montrer que $\mathrm{d}f(a) = 0$. La réciproque est-elle vrai : si f est différentiable en a et vérifie $\mathrm{d}f(a) = 0$, a est-il un extremum local ?

b) Soit $a \in \mathrm{U}$ un minimum (resp. maximum) local de f. On suppose que f est deux fois différentiable en a. Montrer que $\mathrm{d}^2 f(a)$ est une forme quadratique positive (resp. forme quadratique négative). Montrer que $\mathrm{d}^2 f(a)$ peut ne pas être définie positive (resp. définie négative) même si a est un minimum strict (resp. maximum strict).

c) On suppose f deux fois différentiable en a telle que $\mathrm{d}f(a) = 0$ et $\mathrm{d}^2 f(a)$ soit une forme quadratique positive (resp. négative), a est-il nécessairement un minimum (resp. maximum) local ?

d) On suppose f deux fois différentiable en a telle que $\mathrm{d}f(a) = 0$ et $\mathrm{d}^2 f(a)$ soit une forme quadratique définie positive (resp. définie négative). Montrer que a est un minimum (resp. maximum) local strict de f ?

e) Soit $a \in \mathrm{U} \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{d}f(a) = 0$ et $\Delta f(a) = {\partial_1}^2 f(a) + \cdots + {\partial_n}^2 f(a) = 0$ mais $\mathrm{d}^2 f(a) \neq 0$. Montrer que f n'a pas d'extremum en a.

f) Chercher les extrema locaux de $f : (x,y) \mapsto 2(x-y)^2 - x^4 - y^4$? Sont-ils des maximums ? des minimums ? locaux ? globaux ?

Exercice 14 — Principe du maximum. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On note $\partial\Omega = \overline{\Omega} \smallsetminus \Omega$ la frontière ou le bord de Ω et on considère l'opérateur différentiel

$$\mathrm{L} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial_i \partial_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i$$

où a_{ij} et b_i sont des constantes réelles. On suppose que $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est symétrique positive et non nulle.

Soit $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ une application continue qui est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω. On suppose que $\mathrm{L}(u)(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \Omega$. L'objectif est de montrer que le maximum de u sur $\overline{\Omega}$ est atteint sur le bord $\partial\Omega$.

a) Soit S une matrice symétrique positive. Montrer que les coefficients diagonaux de S sont positifs. On suppose que S est non nul. Montrer que l'un des coefficients diagonaux de S est strictement positif.

b) Soient S et T deux matrices symétriques positives. Montrer que $\mathrm{tr}\,(\mathrm{ST}) \geqslant 0$.

c) Montrer que u atteint son maximum en au moins un point a de $\overline{\Omega}$. Montrer que si $a \in \Omega$ alors $\mathrm{L}u(a) = 0$.

d) Soit $\varepsilon > 0$. Conclure en utilisant la fonction $x \mapsto v(x) = u(x) + \varepsilon \exp(\lambda x_i)$ où i et λ sont convenablement choisis.

e) Application. Soit f une fonction continue sur $\partial\Omega$. Montrer que le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathrm{L}(u)(x) = 0 & \text{pour tout } x \in \Omega \\ u(y) = f(y) & \text{pour tout } y \in \partial\Omega \end{cases}$$

admet au plus une solution continue sur $\overline{\Omega}$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.

Exercice 15 — Point de Fermat. Soient $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien. On note $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ l'espace vectoriel euclidien direction de $\mathscr{E}$ et $\| \cdot \|$ la norme associée. On considère $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \in \mathscr{E}$ des points distincts de $\mathscr{E}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$. L'objectif de l'exercice est d'étudier la minimisation de la fonction

$$\mathrm{F} : \begin{cases} \mathscr{E} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \mathrm{M} & \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \|\mathrm{MA}_i\| \,. \end{cases}$$

Rappel : une partie C de $\mathscr{E}$ est dite convexe si pour tous $x, y \in \mathrm{C}$ et tout $t \in [\,0\,,1\,]$, l'élément $tx+(1-t)y \in \mathrm{C}$. Soit $\mathrm{C} \subset \mathscr{E}$ un ensemble convexe. Une fonction $g : \mathrm{C} \to \mathbb{R}$ est dite convexe (resp. strictement convexe) si

$$\forall\, x, y \in \mathrm{C}, \quad \forall\, t \in [\,0\,,1\,], \qquad g(tx+(1-t)y) \leqslant tg(x)+(1-t)g(y)$$

respectivement, si $\quad \forall\, x \neq y \in \mathrm{C}, \quad \forall\, t \in \,]\,0\,,1\,[\,, \qquad g(tx+(1-t)y) < tg(x)+(1-t)g(y)\,.$

a) Soit C un convexe de $\mathscr{E}$ et $g : \mathrm{C} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que l'ensemble des points où g atteint son minimum est convexe. On suppose que g est strictement convexe. Montrer que g atteint son minimum en au plus un point. Trouver une fonction strictement convexe g qui n'admet pas de minimum.

b) Montrer que la fonction F est convexe. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit strictement convexe.

c) Montrer que F atteint son minimum. On note $\mathscr{F} = \{\mathrm{P}, \quad \mathrm{F(P)} = \min_{\mathrm{M}\in\mathscr{E}} \mathrm{F(M)}\}$. Un élément de $\mathscr{F}$ est appelé un *point de Fermat de* $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ *affecté des coefficients* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Montrer que $\mathscr{F}$ est convexe et contenu dans l'espace affine engendrée par les A_i. Montrer que $\mathscr{F}$ n'est pas forcément réduit à un point. On suppose que les A_i ne sont pas alignés. Montrer que $\mathscr{F}$ est réduit à un point.

On s'intéresse à présent à la recherche des points de $\mathscr{F}$.

d) Soit H_+ un demi-espace contenant tous les A_i. Montrer que $\mathscr{F} \subset \mathrm{H}_+$. En déduire que $\mathscr{F}$ est contenu dans l'enveloppe convexe des A_i.

e) On suppose dans cette question que les A_i sont alignés. On fixe une origine sur D sur la droite affine engendrée par les A_i et on note alors x_i l'abscisse de A_i. Quitte à permuter les A_i, on s'arrange pour que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. On suppose qu'il existe $k \in [\![\,1\,,\,n\,]\!]$ tel que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i\,.$$

Montrer que k est bien déterminé et que $\mathscr{F} = [\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}]$. On suppose que, pour tout $k \in [\![\,1\,,\,n\,]\!]$, on a

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \neq \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i\,.$$

Déterminer $\mathscr{F}$.

On suppose dans les questions **f** à **n** que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n$.

f) Montrer qu'on peut supposer $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$.

g) Soit f une isométrie stabilisant $\{\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n\}$. Montrer que $f(\mathscr{F}) \subset \mathscr{F}$. En déduire que s'il existe une symétrie orthogonale s stabilisant $\{\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n\}$ alors il existe un point de Fermat de $\{\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n\}$ sur l'hyperplan de s. Montrer que si $\{\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n\}$ admet un centre de symétrie alors ce centre de symétrie est un point de Fermat de $\{\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n\}$.

h) Déterminer les points de Fermat d'un triangle équilatéral, d'un carré, d'un polygone régulier, d'un rectangle, d'un losange.

On suppose dans les questions **i** à **n** que $n = 3$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ et les $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}$, $\mathrm{A}_2 = \mathrm{B}$ et $\mathrm{A}_3 = \mathrm{C}$ non alignés.

i) Soit u, v, w trois vecteurs unitaires de somme nulle. Calculer les angles $\widehat{(u,v)}$, $\widehat{(v,w)}$, $\widehat{(u,w)}$.

j) On note C′ (resp. B′ et A′) le sommet du triangle équilatéral de coté AB (resp. AC et BC) qui n'est pas du même coté de AB (resp AC et BC) que C. Montrer que les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes en un point T (appelé point de Torricelli du triangle ABC) et vérifient $\mathrm{AA'} = \mathrm{BB'} = \mathrm{CC'}$. Montrer que les cercles circonscrits à ABC′, BCA′ et ACB′ sont concourants en T et $\widehat{\mathrm{BTC}} = \widehat{\mathrm{BTA}} = \widehat{\mathrm{CTA}} = 2\pi/3$.

k) Montrer que A, B, C admet un unique point de Fermat P. Montrer que P est à l'intérieur (au sens large) du triangle ABC.

l) Montrer que si P est distinct de A, B, C alors $\mathrm{P} = \mathrm{T}$ et $\mathrm{F(P)} = \mathrm{AA'} = \mathrm{BB'} = \mathrm{CC'}$.

m) On suppose que le triangle ABC admet un angle de mesure supérieure ou égale à $2\pi/3$ disons $\widehat{\mathrm{BAC}}$ pour fixer les idées. Montrer que $\mathrm{P} = \mathrm{A}$. On pourra montrer que les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes en A (si $\widehat{\mathrm{BAC}} = 2\pi/3$) ou à l'extérieur (au sens strict) de ABC.

n) On suppose que le triangle ABC a tous ses angles de mesure strictement inférieure à $2\pi/3$. Montrer que P est strictement à l'intérieur ABC et que $\mathrm{P} = \mathrm{T}$.

o) Que se passe-t-il si on remplace F par la fonction $\mathrm{M} \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \|\mathrm{MA}_i\|^2$?