Vincent Beck

Courbes

Propriétés affines des courbes planes.

Exercice 1 — Courbes planes. Pour chacune des courbes suivantes, déterminer la tangente en tout point, les points d'inflexion et de rebroussement, les branches infinies, les points multiples et leur multiplicité. Tracer les courbes.

a) $\begin{cases} x(t) = \sin 4t \\ y(t) = \cos 3t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$

d) $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \dfrac{\sin^2 t}{2 + \sin t} \end{cases}$

e) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{1 - t^2} \\ y(t) = \dfrac{1 + t}{(1 - t)^2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t + \sin t \\ y(t) = \sin^3 t + \cos t \end{cases}$

g) $\begin{cases} x(t) = 3\cos t - 2\sin^3 t \\ y(t) = \cos 4t \end{cases}$

Exercice 2 — Point d'inflexion. On considère l'arc paramétré du plan donné par

$$\Gamma \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2 + 1}{t^3 - 1} \\ y(t) = \dfrac{2t}{t^3 - 1} \end{cases}$$

Étudier ses branches infinies. Trouver ses points d'inflexion et montrer qu'ils sont alignés. Tracer l'arc.

Exercice 3 — Point de rebroussement. Soit Γ l'arc paramétré défini par

$$\Gamma \begin{cases} x(t) = \dfrac{t - \sin t}{t^2} \\ y(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t^2} \end{cases}$$

Montrer qu'il peut être prolonger continûment pour tout $t \in \mathbb{R}$ et qu'il possède un axe de symétrie. Montrer qu'il possède une infinité de points de rebroussement situés sur un même cercle et que les tangentes en ces points sont concourantes. Tracer l'arc.

Exercice 4 — Cubiques unicursales. Soient $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{pgcd}\,(\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}) = \mathrm{pgcd}\,(\mathrm{P}_2, \mathrm{Q}) = 1$ et Q ne s'annule jamais. On considère Γ l'arc paramétré par

$$\Gamma \begin{cases} x(t) = \mathrm{P}_1(t)/\mathrm{Q}(t) \\ y(t) = \mathrm{P}_2(t)/\mathrm{Q}(t) \end{cases}$$

a) Montrer qu'on est dans l'un des trois cas suivants

(i) Γ est simple et admet un unique point stationnaire ;
(ii) Γ a un point double unique et les autres points étant simples et γ est régulier ;
(iii) Γ est simple et régulier.

Dans le dernier cas montrer que montrer que le système $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$, $x(t_1) = x(t_2)$ et $y(t_1) = y(t_2)$ admet en général une solution unique.

b) Montrer qu'il existe des réels non tous nuls définis à un facteur d'homogénéité non nuls près vérifiant la condition suivante : pour que trois points $\mathrm{M}_i \in \Gamma$ ($i \in [\![1\,,\,3]\!]$) de paramètre t_i soient alignés, il faut et il suffit que les fonctions symétriques élémentaires σ_i des t_i vérifient

$$\mathrm{A}\sigma_1 + \mathrm{B}\sigma_2 + \mathrm{C}\sigma_3 + \mathrm{D} = 0 \qquad (*)$$

c) En déduire que Γ présente au plus un point d'inflexion s'il a un point stationnaire et trois points d'inflexion en général s'il est régulier. Lorsqu'il a trois points d'inflexion, montrer qu'ils sont alignés.

d) Soit $\mathrm{M}(t)$ le point de paramètre t de Γ. En utilisant la relation $(*)$, déterminer le paramètre du point $\mathrm{T_M}$ où la tangente en M à Γ recoupe Γ. On dit que $\mathrm{T_M}$ est le tangentiel de M.

e) Montrer que les tangentiels de trois points alignés sont alignés.

Propriétés affines des courbes.

Exercice 5 — Plan osculateur. Déterminer le plan osculateur au point de paramètre t des arcs définis par les paramétrisations suivantes

a) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^2+1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{(t^2+1)^2} \\ z(t) = \dfrac{t}{(t^2+1)^2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \\ z(t) = t^4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x(t) = a\cos^3(t) \\ y(t) = a\sin^3(t) \\ z(t) = a\cos(2t) \end{cases}$

Exercice 6 — Plan osculateur et cubique gauche. On considère $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ linéairement indépendant et tel que Q ne s'annule pas et l'arc Γ donné par

$$(\Gamma) \qquad x(t) = \frac{\mathrm{P}_1(t)}{\mathrm{Q}(t)}, \quad y(t) = \frac{\mathrm{P}_2(t)}{\mathrm{Q}(t)}, \quad z(t) = \frac{\mathrm{P}_3(t)}{\mathrm{Q}(t)}.$$

a) Déterminer une équation du plan osculateur à Γ en $\mathrm{M}(t)$

b) Soient $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'en général, il passe par A trois plans osculateurs à Γ. Si $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$ sont les trois points de Γ correspondant à ces plans, montrer que les points $\mathrm{A}, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$ sont coplanaires.

c) Étude du cas $\mathrm{P}_1 = 1, \mathrm{P}_2 = t, \mathrm{P}_3 = t^3, \mathrm{Q} = 1 + t^2$.

Propriétés métriques des courbes planes.

Exercice 7 — Rayon de courbure. Soient $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 2, $\mathscr{P}$ une parabole et $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$. Comparer le rayon de courbure en M à $\mathscr{P}$ et la longueur du segment de la normale compris entre M et la directrice de $\mathscr{P}$.

Exercice 8 — Centre de courbure. Soient $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 2 et $\mathscr{R}$ un repère orthonormal de $\mathscr{E}$. On considère $a \neq 0$ et la famille de conique $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ dont les équations dans $\mathscr{R}$ sont données par

$$\Gamma_\lambda = \left\{ (x, y) \in \mathscr{E}, \quad x^2 + 2\lambda xy - y^2 - ax = 0 \right\}$$

a) Soient $\lambda \neq \lambda' \in \mathbb{R}$. Déterminer les points communs à Γ_λ et Γ'_λ.

b) Déterminer les points communs à toutes les courbes Γ_λ.

c) Déterminer le lieu lorsque λ varie du centre de courbure en $\mathrm{A} = (a, 0)$ à Γ_λ.

Exercice 9 — Centre de courbure. Soient a, b, g des fonctions continues définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x)\,.$$

Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Déterminer le lieu des centres de courbures en $\mathrm{M} = (x_0, y_0)$ aux courbes intégrales de (E) passant par M_0.

Exercice 10 — La courbure détermine la courbe à isométrie près. Démontrer le théorème fondateur suivant. Soit ρ une fonction continue ; montrer qu'il existe un arc $\mathscr{C}^2$ unique à isométrie directe près dont ρ est la courbure.

Exercice 11 — Courbe à courbure constante. Déterminer les courbes planes birégulières à courbure constante ?

Exercice 12 — Examen 2005-2006. Quels sont les arcs réguliers de classe $\mathscr{C}^2$ dans le plan euclidien dont le produit de la courbure et de l'abscisse curviligne vaut 1 ?

Développée.

Exercice 13 — Calcul de développée.

a) Déterminer la développée de l'ellipse $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$

b) Déterminer la développée de la cycloïde $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$

Exercice 14 — Courbure et développée. Montrer que les points singuliers (ou stationnaires) de la développée correspondent aux extrema de la courbure.

Exercice 15 — Développée et courbe parallèle. Soit Γ un arc régulier sans point d'inflexion paramétré par la longueur d'arc $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit l'arc parallèle à Γ par $\Gamma_a : t \mapsto f(t) + a\overrightarrow{n(t)}$ où $\overrightarrow{n}$ est la normale à Γ au point de paramètre t. Montrer que l'ensemble des points singuliers des courbes Γ_a lorsque a varie est la développée.

Enveloppe de droites.

Exercice 16 — Exemples d'enveloppes.

a) Déterminer l'enveloppe des droites $\mathscr{D}_t : 3tx - 2y - t^3 = 0$.

b) Soit D une droite d'un plan affine euclidien et $\mathrm{F} \notin \mathrm{D}$. Quel est l'enveloppe des médiatrices de [FM] lorsque M parcourt D ?

Exercice 17 — Enveloppe et développée. Montrer que l'enveloppe des normales à une courbe paramétrée suffisamment régulière est la développée.

Courbe polaire.

Exercice 18 — Limaçon de Pascal. Soient $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 2 et $\mathscr{R}$ un repère orthonormal de $\mathscr{E}$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on considère $\mathrm{C}_{a,b}$ la courbe d'équation polaire $\rho = a\cos\theta + b$.

a) Étudier suivant a et b la formes de courbes de $\mathrm{C}_{a,b}$. En écrire une équation cartésienne.

b) Déterminer le milieu des cordes de $\mathrm{C}_{a,b}$ vues de O suivant un angle droit.

c) Soient $\{\theta_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant 4\}$ quatre réels tels que les points M_i de coordonnées polaires (ρ_i, θ_i) où $\rho_i = a\cos\theta_i + b$ se situent sur une même droite D. Montrer que $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4$ ne dépend pas de D.

Exercice 19 — Cardioïde. Soient $a \in \mathbb{R}_*^+$. Étudier et tracer l'arc de représentation polaire $\rho = 4a\cos(\theta/3)^3$. Déterminer une équation cartésienne de cet arc. Quelle est la longueur d'arc pour $\theta \in [\,0\,, 3\pi\,]$?

Exercice 20 — Examen 2005-2006.

a) Tracer la courbe d'équation polaire $\rho = \cos(\theta)\sin(2\theta)$.

b) Déterminer l'équation cartésienne de cette courbe.

Propriétés métriques des courbes.

Exercice 21 — Courbure et torsion déterminent la courbe à isométrie près. Démontrer le théorème fondateur suivant. Soient ρ une fonction strictement positive de classe $\mathscr{C}^1$ et τ une fonction continue ; montrer qu'il existe un arc $\mathscr{C}^3$ unique à isométrie directe près dont ρ est la courbure et τ la torsion.

Exercice 22 — Un calcul pratique. Soit γ un arc de classe $\mathscr{C}^3$ régulier et sans point d'inflexion et f une paramétrisation de γ (non nécessairement normale). Montrer que la courbure et la torsion au point de paramètre t sont données par

$$\rho = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \qquad \text{et} \qquad \tau = -\frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}.$$

Exercice 23 — Une caractérisation des segments de droites. Déterminer les arcs réguliers $\mathscr{C}^1$ tel que la tangente passe par un point fixe hors du support de l'arc.

Exercice 24 — Hélice. On dit qu'un arc régulier γ de classe $\mathscr{C}^1$ est une hélice si ses tangentes font un angle constant avec une direction fixe qui est appelée l'axe de l'hélice.

a) Soit γ de classe $\mathscr{C}^3$ sans points d'inflexion et de torsion non nulle. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) γ est une hélice ;
- (ii) les normales principales à γ sont parallèles à un plan fixe ;
- (iii) les binormales à γ font un angle constant avec une direction fixe ;
- (iv) la fonction τ/ρ est constante.

Montrer que si elles sont vérifiées alors la direction de l'hélice est bien définie.

b) Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Montrer que la courbe $t \mapsto (a\cos t, a\sin t, bt)$ est une hélice d'axe $(\mathrm{O}z)$. Calculer sa courbure et sa torsion.

c) Soit $\mathscr{E}$ un espace euclidien de dimension 3, $\mathscr{P} \subset \mathscr{E}$ un plan que l'on oriente par le choix d'un vecteur unitaire normal $\overrightarrow{k}$ et Γ un arc de $\mathscr{P}$ donné par une paramétrisation normale g. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que la courbe donnée par $s \mapsto g_1(s) = g(s) + (as+b)\overrightarrow{k}$ est un hélice. On dit que Γ est la directrice de l'hélice. Comparer la courbure de l'hélice et la courbure de sa directrice.

d) Montrer que toute hélice peut être obtenue par le procédé de la question précédente et admet donc une directrice.

e) Montrer que l'arc défini par

$$(\Gamma) \qquad x(t) = t - \frac{t^3}{3}, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = t + \frac{t^3}{3}$$

est une hélice dont on donnera la direction. Déterminer au point de paramètre t le trièdre de Frenet, la courbure et la torsion.

f) Soit $\mathrm{T}(t)$ le point d'intersection de la tangente en $\mathrm{M}(t)$ à Γ avec le plan d'équation $z = 0$. Déterminer le lieu (C) des points $\mathrm{P}(t)$ et montrer que la trace du plan osculateur en $\mathrm{M}(t)$ à Γ reste tangente en $\mathrm{T}(t)$ à (C).

Exercice 25 — Courbure et torsion fixée. Déterminer les courbes

a) à courbure nulle ;

b) à torsion nulle ;

c) à torsion nulle et courbure constante ;

d) à courbure et torsion constante.