Vincent Beck

Équations différentielles

Théorème 1 — Sortie de tout compact. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $f:\mathrm{U}\to\mathbb{R}^n$ une application continue localement lipschitzienne en la seconde variable. On considère u une solution maximale de l'équation différentielle $y'=f(t,y(t))$ et I l'intervalle de définition de u. Pour tout $a\in\mathrm{I}$ et tout compact K contenu dans U, il existe $t_+\in\mathrm{I}$ avec $t_+>a$ et $t_-\in\mathrm{I}$ avec $t_-<a$ tel que $(t_+,u(t_+))\notin\mathrm{K}$ et $(t_-,u(t_-))\notin\mathrm{K}$.

Définition 2 — Champs de vecteur. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une application $\mathrm{X}:\mathrm{U}\to\mathbb{R}^n$ est appelée un champs de vecteur sur U. On dit que $a\in\mathrm{U}$ est un point singulier de X si $\mathrm{X}(a)=0$.

Exercice 1 — Point singulier. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et X un champs de vecteur continue sur U. On considère une application dérivable $f:[\,t_0\,,+\infty\,[\,\to\mathrm{U}$ telle que $f'(t)=\mathrm{X}(f(t))$ et $f(t)$ tend vers $a\in\mathrm{U}$. Montrer que a est un point singulier de X.

Exercice 2 — Champs de gradient. Soit $\mathrm{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que

$$\lim_{\|x\|\to+\infty}\mathrm{F}(x)=+\infty$$

et $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= -\nabla\mathrm{F}(x(t))\\ x(t_0) &= x_0\end{cases}$$

a) Montrer que le problème de Cauchy admet une unique solution maximale. On note $]\,\mathrm{T}_-\,,\mathrm{T}_+\,[$ son intervalle de définition.

b) Montrer que $t\mapsto\mathrm{F}(x(t))$ est décroissante. En déduire que $\mathrm{T}_+=+\infty$.

c) Avec $\mathrm{F}(x)=x^4/4$, montrer qu'on peut avec $\mathrm{T}_->-\infty$.

Exercice 3 — En vue du théorème d'Hadamard. On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ dont on note $\|\cdot\|$ la norme. Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\mathrm{d}f(x)$ est inversible, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ et telle que $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty}\|f(x)\|=+\infty$.

a) Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, montrer que $f^{-1}(\mathrm{K})$ est compact.

b) On considère la fonction

$$\varphi:\begin{cases}\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n\\ x &\longmapsto \mathrm{d}f(x)^{-1}(f(x))\end{cases}$$

et le problème de Cauchy
$$(\mathscr{C})\begin{cases} x'(t) &= \varphi(x(t))\\ x(0) &= x_0\,.\end{cases}$$

Montrer que $(\mathscr{C})$ admet une unique solution maximale. On note $\delta:t\mapsto\delta(t)$ cette solution maximale et $\mathrm{I}=]\,\mathrm{T}_-\,,\mathrm{T}_+\,[$ son intervalle de définition.

c) Soit F la fonction

$$\mathrm{F}:\begin{cases}\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \|f(x)\|^2\,.\end{cases}$$

Déterminer la fonction $t\mapsto\mathrm{F}(\delta(t))$. En déduire que $\mathrm{T}_+=+\infty$ et $\mathrm{T}_-=-\infty$.

Exercice 4 — Solutions maximales. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall\,x\in\mathbb{R},\qquad |f(x)-\cos x|\leqslant 1\,.$$

Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $x'(t)=f(x(t))$ sont bornées et définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 — Encore des solutions maximales. On considère le problème de Cauchy

$$(\mathcal{C})\begin{cases} x'(t) &= -x(t) + \alpha(t)x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

où α est une fonction continue de $[\,0\,,+\infty\,[$ vérifiant $|\alpha(t)| \leqslant 1$ pour tout $t \geqslant 0$. Le but de l'exercice est de montrer que si $|x_0| < 1$ alors la solution maximale de $\mathcal{C}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. On note $[0, \mathrm{T}^*[$ le domaine d'existence de la solution maximale de $\mathcal{C}$ et on suppose que $\mathrm{T}^* < +\infty$. On pose $|x_0| = 1 - \delta_0$ avec $\delta_0 \in \,]\,0\,,1\,[$ et on considère $\delta \in \,]\,0\,,\delta_0\,[$. On pose alors

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{T} \in [\,0\,,\mathrm{T}^*\,[\,, \qquad \forall\, t \in [\,0\,,\mathrm{T}\,]\,, \quad |x(t)| \leqslant 1 - \delta\}\,.$$

a) Montrer que $0 \in \mathrm{A}$ et que A est un intervalle. On suppose que $\sup \mathrm{A} < \mathrm{T}^*$.

b) Montrer que, pour $t \in [\,0\,,\mathrm{T}^*\,[$, on a

$$x(t) = \exp(-t)x_0 + \int_0^t \exp(-(t-s))\alpha(s)x^2(s)\mathrm{d}s$$

c) En déduire, grâce au lemme de Grönwall que pour $\mathrm{T} \in \mathrm{A}$, on a $|x(t)| \leqslant |x_0|\exp(-\delta t)$ pour tout $t \in [\,0\,,\mathrm{T}\,]$.

d) Montrer que $|x(t)| \leqslant 1 - \delta_0$ pour tout $t \in [\,0\,,\alpha\,]$. Aboutir à une contradiction.

e) Conclure.

Exercice 6 — Équation différentielle et matrice définie négative. Soient $(\mathrm{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $\mathrm{d}f_x$ soit un endomorphisme symétrique défini négatif pour tout $x \in \mathrm{X}$.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{X}$, on a $\langle x, f(x)\rangle \leqslant 0$ (on pourra introduire la fonction $t \mapsto \langle x, f(tx)\rangle$).

b) En déduire que toute solution de l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$ est bornée, définie sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0.

Exercice 7 — Équation différentielle et matrice. Soit $f \in \mathrm{I} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $t_0 \in \mathrm{I}$ tel que $f(t_0) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et f vérifie une équation différentielle de la forme $f'(t) = \mathrm{A}(t)f(t)$ où $\mathrm{A}(t)$ est une matrice antisymétrique, pour tout $t \in \mathrm{I}$.

b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $t_0 \in \mathrm{I}$ tel que $f(t_0) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et f vérifie une équation différentielle de la forme $f'(t) = \mathrm{A}(t)f(t)$ où $\mathrm{tr}\,(\mathrm{A}(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathrm{I}$.