Vincent Beck

Exemples (concrets ?) de variétés

Topologie.

Exercice 1 – Recollement de topologie. Soit M un ensemble. On suppose donné une famille d'espaces topologiques $(\mathrm{M}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ et une famille d'applications $(\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M})_{\alpha\in\mathrm{A}}$ telle que

$$(i) \qquad \forall\, \alpha \in \mathrm{A}, \qquad \varphi_\alpha \text{ est injective};$$

$$(ii) \qquad \mathrm{M} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha);$$

$$(iii) \qquad \forall\,(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2, \qquad \mathrm{U}_{\alpha\beta} := {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)) \text{ est un ouvert de } \mathrm{M}_\alpha;$$

$$(iv) \qquad \forall\,(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2, \qquad \varphi_{\alpha\beta} := {\varphi_\alpha}^{-1} \circ \varphi_\beta : \mathrm{U}_{\beta\alpha} \to \mathrm{U}_{\alpha\beta} \text{ est continue.}$$

a) Montrer qu'il existe sur M une unique topologie telle que

$$(v) \qquad \forall\, \alpha \in \mathrm{A}, \qquad \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \text{ soit un ouvert de } \mathrm{M};$$

$$(vi) \qquad \forall\, \alpha \in \mathrm{A}, \qquad \varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \text{ soit un homéomorphisme.}$$

b) Montrer que cette topologie est la plus fine rendant continue tous les φ_α et la moins fine rendant continue tous les ${\varphi_\alpha}^{-1}$.

Exercice 2 – Encore du recollement de topologie. Soit M un ensemble et $(\mathrm{M}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ une famille d'espaces topologiques.

a) Montrer qu'il revient au même de se donner
- une famille d'applications $(\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M})_{\alpha\in\mathrm{A}}$ vérifiant les points (i) à (iv) de l'exercice **??**.
- un recouvrement $(\mathrm{V}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ de M et des bijections $\psi_\alpha : \mathrm{V}_\alpha \to \mathrm{M}_\alpha$ telle que

$$\forall\,(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2, \qquad \psi_\alpha(\mathrm{V}_\alpha \cap \mathrm{V}_\beta) \text{ soit un ouvert de } \mathrm{M}_\alpha \text{ et}$$

$$\text{et} \quad \forall\,(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2, \qquad \psi_{\alpha\beta} := \psi_\beta{}_{\big|\mathrm{V}_\alpha\cap\mathrm{V}_\beta} \circ (\psi_\alpha{}_{\big|\mathrm{V}_\alpha\cap\mathrm{V}_\beta})^{-1} : \psi_\alpha(\mathrm{V}_\alpha \cap \mathrm{V}_\beta) \to \psi_\beta(\mathrm{V}_\alpha \cap \mathrm{V}_\beta) \text{ est continue.}$$

b) En déduire qu'il existe sur M une unique topologie telle que U_α soit un ouvert de M et $\psi_\alpha : \mathrm{U}_\alpha \to \mathrm{M}_\alpha$ un homéomorphisme.

Calcul différentiel : le retour.

Exercice 3 – Sous-espace affine. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ une application de classe $\mathscr{C}^\infty$. On considère un sous-espace affine E' de E et un sous-espace affine F' de F tel que $f(\mathrm{U} \cap \mathrm{E}') \subset \mathrm{F}'$. Montrer que l'application $g : \mathrm{U} \cap \mathrm{E}' \to \mathrm{F}'$ induite par f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et calculer sa différentielle.

Espace projectif.

Définition 1 – Espace projectif. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ l'ensemble des droites vectoriels de V. On dit que $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ est l'espace projectif de V. Lorsque $\mathrm{V} = \mathbb{R}^n$, on note $\mathbb{P}(\mathrm{V}) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

L'objectif des deux exercices qui suivent est de construire une structure de variété lisse sur $\mathbb{P}(\mathrm{V})$.

Exercice 4 – Construction des cartes. Soit f une forme linéaire sur V non nulle. On définit

$$\mathrm{U}_f = \{\mathrm{D} \in \mathbb{P}(\mathrm{V}), \quad \mathrm{D} \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}\} = \{\mathrm{D} \in \mathbb{P}(\mathrm{V}), \quad f(\mathrm{D}) \neq 0\} = \{\mathrm{D} \in \mathbb{P}(\mathrm{V}), \quad \mathrm{D} \oplus \operatorname{Ker} f = \mathrm{V}\}$$

et l'hyperplan affine $\mathrm{H}_f = \{x \in \mathrm{V}, \quad f(x) = 1\}$.

a) Montrer que l'application $\varphi_f : \mathrm{U}_f \to \mathrm{H}_f$ qui, à $\mathrm{D} \in \mathrm{U}_f$ associe l'intersection de D avec H_f est bijective. Décrire la bijection réciproque.

b) Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{V}) = \bigcup_{f \in \mathrm{V}^* \setminus \{0\}} \mathrm{U}_f$.

c) Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V, $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale et $i \in [\![1\,,\, n]\!]$. On pose $\mathrm{U}_i = \mathrm{U}_{e_i^*}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(\mathrm{V}) = \bigcup_{i \in [\![1\,,\, n]\!]} \mathrm{U}_i\,.$$

Exercice 5 — Changement de cartes. Soient f, f' deux formes linéaires sur V.

a) Montrer que $\varphi_f(\mathrm{U}_f \cap \mathrm{U}_{f'})$ est un ouvert dense de H_f.

b) Montrer que l'application

$$\varphi_{f'} \circ (\varphi_f)^{-1} : \varphi_f(\mathrm{U}_f \cap \mathrm{U}_{f'}) \longrightarrow \varphi_{f'}(\mathrm{U}_f \cap \mathrm{U}_{f'})$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

c) En déduire une structure « sympathique » d'espace topologique sur $\mathbb{P}(\mathrm{V})$.

d) Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ est séparé (on pourra montrer que deux droites rencontrent un même hyperplan affine).

e) Conclure.

f) Montrer que U_f est un ouvert dense de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. En déduire que $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ est connexe.

Exercice 6 — Applications entre espaces projectifs. Soient V, V' deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ une application linéaire.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f induise une application de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ dans $\mathbb{P}(\mathrm{V}')$.

b) On suppose que la condition nécessaire et suffisante de la question précédente est vérifiée. Montrer que l'application $\widetilde{f}$ induite par f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

c) On munit V d'une norme euclidienne et on note S la sphère unité pour la norme euclidienne. Montrer que les applications

$$\pi : \begin{cases} \mathrm{V} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{V}) \\ x \longmapsto \mathbb{R}x \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \pi_{\mathrm{S}} : \begin{cases} \mathrm{S} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{V}) \\ x \longmapsto \mathbb{R}x \end{cases}$$

sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ et surjectives (la structure de variété sur S a été construite en cours).

d) En déduire que $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ est connexe, connexe par arc et compact.

e) « Dessiner » $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

f) Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ et $\mathrm{G}_1(\mathrm{V})$ sont $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphes (voir ci-dessous pour la structure de prévariété sur $\mathrm{G}_1(\mathrm{V})$).

Grassmannienne.

Définition 2 Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{G}_m(\mathrm{V})$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension m de V. On dit que $\mathrm{G}_m(\mathrm{V})$ est la grassmannienne d'indice m de V.

L'objectif des deux exercices qui suivent est de construire une structure de variété lisse sur $\mathrm{G}_m(\mathrm{V})$.

Exercice 7 — Construction des cartes. Soit V′ un sous-espace vectoriel de dimension finie $n-m$. On considère l'ensemble $\mathrm{U}_{\mathrm{V}'}$ des supplémentaires de V′ de E :

$$\mathrm{U}_{\mathrm{V}'} = \{\mathrm{W} \in \mathrm{G}_m(\mathrm{V}), \quad \mathrm{W} + \mathrm{V}' = \mathrm{V}\} = \{\mathrm{W} \in \mathrm{G}_m(\mathrm{V}), \quad \mathrm{W} \cap \mathrm{V}' = \{0\}\} = \{\mathrm{W} \in \mathrm{G}_m(\mathrm{V}), \quad \mathrm{W} \oplus \mathrm{V}' = \mathrm{E}\}\,.$$

Si E et F sont deux sous-espaces supplémentaires de V, on note $p_{\mathrm{E},\mathrm{F}}$ le projecteur sur E de noyau F.

a) Montrer que l'application

$$\varphi_{\mathrm{V}'} : \begin{cases} \mathrm{U}_{\mathrm{V}'} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \\ \mathrm{W} \longmapsto p_{\mathrm{V}',\mathrm{W}} \end{cases}$$

réalise une bijection de $\mathrm{U}_{\mathrm{V}'}$ sur un sous-espace affine $\mathrm{F}_{\mathrm{V}'}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{V}, \mathrm{V}')$ qu'on déterminera.

b) Montrer que $\mathrm{G}_m(\mathrm{V}) = \bigcup_{\mathrm{V}' \in \mathrm{G}_{n-m}(\mathrm{V})} \mathrm{U}_{\mathrm{V}'}$.

c) Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V et $\mathrm{I} = \{i_1, \ldots, i_{n-m}\}$ une partie à $n-m$ éléments de $[\![1\,,\, n]\!]$. On note $\mathrm{U}_\mathrm{I} = \mathrm{U}_{\mathrm{vect}\,(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-m}})}$. Montrer que

$$\mathrm{G}_m(\mathrm{V}) = \bigcup_{\mathrm{I} \in \mathscr{P}_{n-m}([\![1\,,\, n]\!])} \mathrm{U}_\mathrm{I}\,.$$

Exercice 8 — Changement de cartes. Soient $\mathrm{V}', \mathrm{V}''$ deux sous-espaces vectoriels de dimension finie $n-m$.

a) Montrer que $\varphi_{\mathrm{V}'}(\mathrm{U}_{\mathrm{V}'} \cap \mathrm{U}_{\mathrm{V}''})$ est un ouvert dense de $\mathrm{F}_{\mathrm{V}'}$.

b) Montrer que l'application

$$\varphi_{\mathrm{V}''} \circ (\varphi_{\mathrm{V}'})^{-1} : \varphi_{\mathrm{V}'}(\mathrm{U}_{\mathrm{V}'} \cap \mathrm{U}_{\mathrm{V}''}) \longrightarrow \varphi_{\mathrm{V}''}(\mathrm{U}_{\mathrm{V}'} \cap \mathrm{U}_{\mathrm{V}''})$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

c) En déduire une structure « sympathique » d'espace topologique sur $\mathrm{G}_m(\mathrm{V})$.

d) Montrer que $\mathrm{G}_m(\mathrm{V})$ est séparé (on pourra montrer que deux sous-espaces vectoriels de V de dimension m ont un supplémentaire commun).

e) Conclure.

f) Montrer que $\mathrm{U}_{\mathrm{V}'}$ est un ouvert dense de $\mathrm{G}_m(\mathrm{V})$. En déduire que $\mathrm{G}_m(\mathrm{V})$ est connexe.

Exercice 9 — Application entre grassmanniennes. Soient V, V' deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ une application linéaire.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f induise une application de $\mathrm{G}_m(\mathrm{V})$ dans $\mathrm{G}_m(\mathrm{V}')$.

b) On suppose que la condition nécessaire et suffisante de la question précédente est vérifiée. Montrer que l'application $\widetilde{f}$ induite par f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

c) On considère $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}^m$ l'ensemble des familles formées de m vecteurs libres de V. Montrer que U est un ouvert de V^m puis que la fonction

$$\varphi : \begin{cases} \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{G}_m(\mathrm{V}) \\ x \longmapsto \mathrm{vect}\,(x) \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et surjective.

d) En déduire que $\mathrm{G}_m(\mathrm{V})$ est connexe et compact.