Vincent Beck

Extension normale

Exercice 1 — Extension de degré 2. Soient k un corps et K une extension de k de degré 2. Montrer que K est une extension normale.

Exercice 2 — Décomposition d'un polynôme dans une extension. Soient k un corps, $j : k \to \mathrm{K}$ une extension de degré m et $\mathrm{P} \in k[\mathrm{X}]$ un polynôme unitaire irréductible de degré n. On note $d = \mathrm{pgcd}\,(m, n)$.

a) Montrer que le degré de tout facteur irréductible de $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ est un multiple de n/d et que P a au plus d facteurs irréductibles dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$. Que se passe-t-il si $d = 1$?

b) On suppose que j est normale. Montrer que si P_1 et P_2 sont deux facteurs irréductibles unitaires de P dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$, il existe σ une k-automorphisme de K tel que $\mathrm{P}_1 = \sigma(\mathrm{P}_2)$. En déduire que tous les facteurs irréductibles de P dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$ ont le même degré.

c) Toujours si j est normale, quelle relation a-t-on entre d et le nombre de facteurs irréductibles de P dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$?

Exercice 3 — Extension normale et transitivité. Soient k un corps, K une extension de k et K' une extension de K.

a) Est-ce que si K est une extension normale de k et K' une extension normale de K alors K' est une extension normale de k.

b) Montrer que si K' est une extension normale de k alors K' est une extension normale de K mais K n'est pas forcément normale sur k.

Exercice 4 — Un critère de normalité. Soit K une extension algébrique de k vérifiant $[\mathrm{K} : k]_{\mathrm{s}} < +\infty$ (par exemple si $[\mathrm{K} : k] < +\infty$). Montrer que $|\mathrm{Gal}(\mathrm{K}/k)| = [\mathrm{K} : k]_{\mathrm{s}}$ si et seulement si $(\mathrm{K} : k)$ est normale.

Exercice 5 — Extension normale et relèvement. Soit $(\mathrm{K} : k)$ une extension algébrique et E et F deux sous-extensions de K.

a) Montrer que si $(\mathrm{E} : k)$ est normale alors $(\mathrm{EF} : \mathrm{F})$ l'est aussi.

b) Montrer que si $(\mathrm{E} : k)$ et $(\mathrm{F} : k)$ sont normales alors $(\mathrm{EF} : k)$ l'est aussi.

c) Plus généralement, si $(\mathrm{E}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille de sous-extensions normales de K alors

$$k\left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_i\right)$$

est une extension normale de k.

Exercice 6 — Extension normale et intersection. Soit $(\mathrm{K} : k)$ une extension.

a) Soit $(\mathrm{E}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de sous-extension normale de k. Montrer que l'intersection $\cap_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{E}_i$ est une extension normale de k.

b) Peut-on en déduire une notion de sous-extension normale engendrée par une partie A (formée d'éléments algébriques) de K ?

c) Reprendre la question **b** avec l'hypothèse supplémentaire $(\mathrm{K} : k)$ est normale. Donner alors une expression pour cette extension normale engendrée par A.

d) Montrer qu'il existe une plus grande sous-extension normale de K. Décrire ses éléments. Cette extension est appelée la fermeture normale de k dans K.

e) Soit Ω une extension algébriquement close de k. Montrer que « la » clôture normale de K est à la fois la fermeture normale de k dans Ω et la sous-extension normale de Ω engendrée par K.

Exercice 7 — Un exemple concret. Soit $\mathrm{K} = \mathbb{Q}(\alpha)$ un corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$ du polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} - 1$ (où $\mathrm{P}(\alpha) = 0$).

a) Vérifier que P est bien irréductible sur $\mathbb{Q}$.

b) Vérifier que $\alpha^2 - 2$ est racine de P.

c) En déduire que P est scindé dans K puis que $(\mathrm{K} : \mathbb{Q})$ est normale.

d) Déterminer $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}/\mathbb{Q})$.

Exercice 8 – Clôture normale. Soit $(\mathrm{K} : k)$ une extension algébrique et N une clôture normale de K sur k.

a) Comparer $|\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg.}}(\mathrm{K}, \mathrm{N})|$ et $[\mathrm{K} : k]_{\mathrm{s}}$.

b) Montrer que si $(\mathrm{K} : k) < +\infty$ alors $(\mathrm{N} : k) < +\infty$.

c) Montrer que si $(\mathrm{K} : k)$ est séparable alors $(\mathrm{N} : k)$ aussi.

Exercice 9 – Clôture normale. Soit $(\mathrm{K} : k)$ une extension algébrique et N une extension de K. Montrer que N est une clôture normale de K sur k si et seulement si $(\mathrm{N} : k)$ est normale et N vérifie la « propriété de morphismes » : pour toute K-extension M qui est normale sur k, il existe un K-morphisme de N dans M.