Extension séparable

Exercice 1 – Extension de degré 2. Soient k un corps et K une extension de k de degré 2. L'extension $(\mathrm{K} : k)$ est-elle séparable ?

Exercice 2 – Extension séparable et points fixes. Soient k un corps, $j : k \hookrightarrow \mathrm{K}$ une extension séparable et $x \in \mathrm{K}$. Montrer que $x \in k$ si et seulement si $\sigma(x) = x$ pour tout k-morphisme de K dans $\overline{\mathrm{K}}$.

Exercice 3 – Extension monogène. Déterminer $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i, j) : \mathbb{Q}]$. Montrer que l'extension est monogène et déterminer un générateur de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i, j)$ sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 4 – Extension séparable. Soit k un corps de caractéristique p et K une extension de k dont le degré est premier à p. Montrer que K est séparable sur k.

Exercice 5 – Élément primitif.

a) Soient k un corps de caractéristique nulle et K une extension finie de k et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $[\mathrm{K} : k] \leqslant n$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[k(x) : k] \leqslant n$ pour tout $x \in \mathrm{K}$. En particulier, si le degré des éléments de K est borné, celui de K l'est aussi.

b) Montrer que, dans la question **a**, on peut remplacer l'hypothèse k est de caractéristique nulle par K est une extension séparable de k.

c) Montrer que dans les question **a** et **b**, on peut retirer l'hypothèse $[\mathrm{K} : k]$ est fini c'est-à-dire montrer que si K est une extension séparable de k telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[k(x) : k] \leqslant n$ pour tout $x \in \mathrm{K}$ alors $[\mathrm{K} : k] \leqslant n$.

d) Soit K une extension d'un corps k. A-t-on l'équivalence : $[k(x) : k] < +\infty$ pour tout $x \in \mathrm{K}$ si et seulement si $[\mathrm{K} : k] < +\infty$?

e) Soient p un nombre premier, k un corps de caractéristique p et X, Y deux indéterminées sur k. On considère $\mathrm{K} = k(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et $\mathrm{L} = k(\mathrm{X}^p, \mathrm{Y}^p) \subset \mathrm{K}$. Déterminer $[\mathrm{K} : \mathrm{L}]$. Pour $x \in \mathrm{K}$, déterminer $[\mathrm{L}(x) : \mathrm{L}]$. En déduire que l'extension $\mathrm{L} \subset \mathrm{K}$ n'est pas monogène ni séparable.

f) Montrer que le résultat des questions **a** et **b** est faux si on ne suppose pas l'extension $k \subset \mathrm{K}$ séparable.

g) A-t-on l'équivalence, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[k(x) : k] \leqslant n$ pour tout $x \in \mathrm{K}$ si et seulement si $[\mathrm{K} : k] < +\infty$ (on pourra adapter l'exemple de la question **e** avec une infinité d'indéterminée).

Exercice 6 – Un exemple d'extension non monogène. Soient p un nombre premier, k un corps de caractéristique p et X, Y deux indéterminées sur k. On considère $\mathrm{K} = k(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et $\mathrm{L} = k(\mathrm{X}^p, \mathrm{Y}^p) \subset \mathrm{K}$.

a) Déterminer $[\mathrm{K} : \mathrm{L}]$.

b) Pour $x \in \mathrm{K}$, déterminer $[\mathrm{L}(x) : \mathrm{L}]$. En déduire que l'extension $\mathrm{L} \subset \mathrm{K}$ n'est pas monogène ni séparable.

c) Déterminer l'ensemble des éléments de K qui sont séparables sur L.

d) Montrer que l'extension $\mathrm{L} \subset \mathrm{K}$ est normale. Déterminer $\mathrm{Aut}_{\mathrm{L}}(\mathrm{K}) = \mathrm{Gal}(\mathrm{K} \mid \mathrm{L})$.

Exercice 7 – Ensemble totalement ordonné. Soit K une extension de k telle que l'ensemble des sous-extensions de K soit totalement ordonné (c'est-à-dire si M et N sont des sous-extensions de K alors $\mathrm{M} \subset \mathrm{N}$ ou $\mathrm{N} \subset \mathrm{M}$).

a) Montrer que K est algébrique sur k.

b) On suppose que le degré des éléments de K est borné. Montrer que K est monogène sur k.

c) Montrer que le résultat de la question **b** est faux si on ne suppose pas le degré des éléments de K borné (on pourra considérer $\mathbb{Q}(\sqrt[2^n]{2}, n \in \mathbb{N})$). Pour montrer que les sous-corps de $\mathbb{Q}(\sqrt[2^n]{2})$ sont les $\mathbb{Q}(\sqrt[2^k]{2})$ avec $k \leqslant n$, on pourra considérer le polynôme minimal de $\sqrt[2^n]{2}$ sur ce corps intermédiaire, le factoriser dans $\mathbb{R}$ et en déduire le résultat.

Exercice 8 – Degré séparable. Soient K une extension finie de k, L, M des sous-extensions de K et $\mathrm{N} = \mathrm{LM}$ la sous-extension de K engendrée par L et M. Vérifier que $[\mathrm{N} : \mathrm{L}]_{\mathrm{s}} \leqslant [\mathrm{M} : k]_{\mathrm{s}}$ puis que $[\mathrm{N} : k]_{\mathrm{s}} \leqslant [\mathrm{L} : k]_{\mathrm{s}}[\mathrm{M} : k]_{\mathrm{s}}$.

Exercice 9 – Extension séparable et puissance p. Soit k un corps de caractéristique p première et K une extension de k

a) Pour $a \in \mathrm{K}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) a est séparable sur k ;
(ii) $k(a) = k(a^p)$;
(iii) il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $k(a^{p^n}) = k(a)$;
(iv) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $k(a^{p^n}) = k(a)$.

b) On considère $x \in \mathrm{K}$ séparable sur k et $y \in \mathrm{K}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y^{p^n} \in k$. Montrer que

$$k(x, y) = k(xy) = k(x + y).$$