Vincent Beck

Théorème des fonctions implicites et du rang constant

Immersion, submersion et rang constant.

Définition 1 — Système de coordonnées locales. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour $i \in [\![1\,,\,n]\!]$, on considère $f_i : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$.

Si l'application $(f_1, \ldots, f_n)$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de V sur un ouvert W de $\mathbb{R}^n$, on dit que $(f_1, \ldots, f_n)$ est un système de coordonnées ou un changement de coordonnées sur V.

Soient $a \in \mathrm{V}$. On dit que l'application $(f_1, \ldots, f_n)$ est un système de coordonnées locales ou un changement de coordonnées locales en a, s'il existe un voisinage V' de a tel que $(f_1, \ldots, f_n)$ soient un système de coordonnées sur V'. Le théorème d'inversion locale assure que $(f_1, \ldots, f_n)$ est un système de coordonnées locales en a si et seulement si l'application linéaire $\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est inversible.

Exercice 1 — Submersion. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_p) : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in \mathrm{U}$. On suppose que $\mathrm{d}f(a)$ est surjective : on dit alors que f est une submersion en a.

a) Montrer que $n \geqslant p$. Montrer qu'on peut « compléter » la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ en un système de coordonnée locales $(f_1, \ldots, f_n)$ en a. On note V l'ouvert contenant a sur lequel $(f_1, \ldots, f_n)$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

b) Montrer qu'à un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme près à la source, l'application f s'écrit

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_p)\,.$$

Pouvait-on appliquer le théorème du rang constant ? Qu'aurait-il donné ?

c) Montrer que la restriction de f à V est ouverte.

d) Montrer qu'il n'existe aucune fonction autre que 0 telle que $\varphi(f_1, \ldots, f_p) = 0$.

e) Montrer que f localement admet un inverse à droite c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ouvert W de $f(a)$ et une fonction $g : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $g(f(a)) = a$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{W}}$.

f) Soit h une application définie dans un voisinage de $f(a)$ à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie F. Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ en $f(a)$ si et seulement si $h \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en a.

g) On suppose à présent que f est une submersion en tout point de U : on dit que f est un submersion. Montrer que f est une application ouverte et qu'une application $h : f(\mathrm{U}) \to \mathrm{F}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si $h \circ f$ l'est.

h) Applications. On considère une équation aux dérivés partielles linéaire du premier ordre en n variables

$$\sum_{i=1}^{n} v_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$$

où $(v_1, \ldots, v_n)$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ donnée définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles et l'inconnue f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U à valeur réelles. On suppose que les fonctions v_i ne s'annulent pas simultanément et on considère $(f_1, \ldots, f_p)$ des solutions particulière de l'équation telle que la famille $(\mathrm{d}f_1(a), \ldots, \mathrm{d}f_p(a))$ soit libre. Montrer que $p < n$ et qu'au voisinage de a, l'équation se ramène en une équation du même type en $n - p$ variables. Que se passe-t-il si $p = n - 1$.

i) Résoudre l'équation aux dérivés partielles

$$(y - z)\frac{\partial f}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial f}{\partial y} + (x - y)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

en appliquant la méthode précédente.

Exercice 2 — Immersion. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_p) : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in \mathrm{U}$. On suppose que $\mathrm{d}f(a)$ est injective : on dit alors que f est une injection en a.

a) Montrer que $n \leqslant p$ puis qu'à un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme près au but, l'application f s'écrit

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)\,.$$

Pouvait-on appliquer le théorème du rang constant ? Qu'aurait-il donné ?

b) Montrer que f localement admet un inverse à gauche c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ouvert W de $f(a)$ et une fonction $g : \mathrm{W} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$.

c) Soient W un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie F, $w \in \mathrm{W}$ et $h : \mathrm{W} \to \mathbb{R}^n$ une application telle que $h(w) = a$. Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ en w si et seulement si $f \circ h$ l'est.

d) Soient h un fonction définie au voisinage de a. Pour que h soit de classe $\mathscr{C}^1$ en a il faut et il suffit qu'il existe une fonction h' définie sur un voisinage de $f(a)$ de classe $\mathscr{C}^1$ en $f(a)$ telle que $h' \circ f = h$.

e) Soient W un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie F, $h : \mathrm{W} \to \mathbb{R}^n$ une application telle que $h(\mathrm{W}) \subset \mathrm{U}$. Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si $f \circ h$ l'est.

Théorème des fonctions implicites.

Exercice 3 – Premiers exemples.

a) Montrer que l'équation $z^3 + 2z + \exp(z - x - y^2) = \cos(x - y + z)$ définit implicitement une fonction $(x, y) \mapsto z = \varphi(x, y)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans un voisinage de $(0, 0)$. Calculer la différentielle et la différentielle seconde de φ en $(0, 0)$.

b) Démontrer que les équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36 \end{cases}$$

définissent implicitement une fonction $\mathscr{C}^\infty$ d'une variable à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que l'équation $xy^4 - x^3 + y = 0$ définit implicitement une fonction $x \mapsto y = \varphi(x)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant $\varphi(0) = 0$. Donner un développement limité de φ à l'ordre 25 en $(0, 0)$.

d) Montrer que l'équation $\sin y + xy^4 + x^2 = 0$ définit implicitement une fonction $x \mapsto y = \varphi(x)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant $\varphi(0) = 0$. Donner un développement limité de φ à l'ordre 10 en $(0, 0)$.

Exercice 4 – Fonction racine.

a) Soient $\mathrm{P}_0 \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ une racine simple de P_0. Montrer qu'il existe une fonction « racine » de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans un voisinage de P_0. De façon précise, montrer qu'il existe un voisinage V de P_0 dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, un voisinage W de x_0 et une fonction $\mathrm{rac} : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ tel que $\mathrm{rac}(\mathrm{P})$ soit une racine de P pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{V}$.

Exercice 5 – Fonction valeur propre.

a) Soient $\mathrm{A}_0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ une valeur propre simple. Montrer qu'il existe une fonction « valeur propre » de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans un voisinage de A_0. De façon précise, montrer qu'il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, un voisinage W de λ_0 et une fonction $\mathrm{vp} : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ tel que $\mathrm{vp}(\mathrm{A})$ soit une valeur propre de A pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{V}$.