## Forme quadratique, équation différentielle et topologie

Forme quadratique.

Exercice 1 – Rang et signature. Montrer que les applications suivantes définies sur  $\mathbb{R}^n$  sont des formes quadratiques et déterminer leur rang et leur signature.

a) 
$$(x_1,\ldots,x_n)\mapsto \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j$$
.

a) 
$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} x_i x_j.$$
  
b)  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)^2.$ 

c) 
$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2 + \alpha \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$$
 où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**d)** 
$$(x_1,\ldots,x_n)\mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)^2$$
 où  $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ .

Exercice 2 – Forme quadratique et matrice. Soit k un corps de caractéristique différente de 2.

- a) Montrer que  $A \mapsto \operatorname{tr}(A^2)$  et  $A \mapsto \operatorname{tr}(A^2)$  sont deux formes quadratiques non dégénérées sur  $M_n(k)$ . Déterminer leur forme polaire.
- **b)** Pour  $A \in M_n(k)$ , on note q(A) le coefficient de degré n-2 du polynôme caractéristique  $\chi_A = \det(Xid_n A)$ de A. Montrer que q est une forme quadratique. Calculer sa signature lorsque  $k = \mathbb{R}$ .

**Exercice 3 – Méthode de Gauss.** Soit k un corps de caractéristique différente de 2.

Appliquer la méthode de Gauss pour déterminer le rang et une base orthogonale pour les formes quadratiques  $(x,y,z)\mapsto xy+yz+zx$  et  $(x,y,z,t)\mapsto xy+yz+zt+tx$ . Déterminer la signature si  $k=\mathbb{R}$ .

Exercice 4 - Topologie des formes quadratiques. Soit E un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n. Soient  $p,q \in \mathbb{N}$  tel que p+q=n. Montrer que l'ensemble  $Q_{p,q}$  des formes quadratiques sur E de signature (p,q) est un ouvert de  $\mathfrak{Q}(E)$ . Indication : si  $Q \in Q_{p,q}$ , on pourra introduire un espace de dimension p sur lequel Q est définie positive et un espace de dimension q sur lequel Q est définie négative.

**Exercice 5 – Déterminant de Gram.** Soient k un corps de caractéristique différente de 2, E un k-espace vectoriel de dimension finie n, q une forme quadratique sur E et b la forme polaire associée.

Soient  $\ell \in \mathbb{N}$ . Pour  $(x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathcal{E}$ , on définit

$$\operatorname{Gram}(b)_{x_1,\dots,x_\ell} = [b(x_i,x_j)]_{1\leqslant i,j\leqslant \ell} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{gram}(b)_{x_1,\dots,x_\ell} = \det(\operatorname{Gram}(b)_{x_1,\dots,x_\ell})$$

la matrice de Gram et le déterminant de Gram.

- a) Montrer que gram $(b)_{x_1,\dots,x_\ell} \neq 0$  est équivalent à  $(x_1,\dots,x_\ell)$  est une famille libre et la restriction de q à  $\operatorname{vect}(x_1,\ldots,x_\ell)$  est non dégénérée.
- **b)** Soient  $p_1, \ldots, p_\ell$  des nombres premiers distincts. Montrer que la famille  $\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_\ell}$  est  $\mathbb{Q}$ -libre. Calculer la dimension de  $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\ldots,\sqrt{p_\ell})$ . Indication : introduire la forme quadratique sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\ldots,\sqrt{p_\ell})$  donnée par  $(x,y) \mapsto \operatorname{tr}(xy)$  où  $\operatorname{tr}(x)$  désigne la trace de  $\mu_x$  le  $\mathbb{Q}$ -endomorphisme de  $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\ldots,\sqrt{p_\ell})$  de multiplication par x.

**Exercice 6 – Forme quadratique.** Soit E un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, q une forme quadratique sur E, b la forme polaire associée et  $a \in E$ . Montrer que l'application

$$q' : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto q(a)q(x) - b(a, x)^2 \end{cases}$$

est une forme quadratique et déterminer sa signature en fonction de celle de q.

Équations différentielles.

**Théorème 1 – Sortie de tout compact.** Soient U un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $f: \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$  une application continue localement lipschitzienne en la seconde variable. On considère u une solution maximale de l'équation différentielle

y' = f(t, y(t)) et I l'intervalle de définition de u. Pour tout  $a \in I$  et tout compact K contenu dans U, il existe  $\begin{array}{c} \downarrow t_+ \in \mathcal{I} \text{ avec } t_+ > a \text{ et } t_- \in \mathcal{I} \text{ avec } t_- < a \text{ tel que } (t_+, u(t_+)) \notin \mathcal{K} \text{ et } (t_-, u(t_-)) \notin \mathcal{K}. \end{array}$ 

Définition 2 - Champs de vecteur. Soit U un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Une application  $X:U\to\mathbb{R}^n$  est appelée un champs de vecteur sur U. On dit que  $a \in U$  est un point singulier de X si X(a) = 0.

**Exercice 7 – Point singulier.** Soient U un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et X un champs de vecteur continue sur U. On considère une application dérivable  $f:[t_0,+\infty[\to U \text{ telle que } f'(t)=X(f(t)) \text{ et } f(t) \text{ tend vers } a\in U.$  Montrer que a est un point singulier de X.

**Exercice 8 – Champs de gradient.** Soit  $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathscr{C}^2$  telle que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} F(x) = +\infty$$

et  $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ . On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -\nabla F(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- a) Montrer que le problème de Cauchy admet une unique solution maximale. On note T-, T+ son intervalle de définition.
- **b)** Montrer que  $t \mapsto F(x(t))$  est décroissante. En déduire que  $T_+ = +\infty$ .
- c) Avec  $F(x) = x^4/4$ , montrer qu'on peut avec  $T_- > -\infty$ .

Exercice 9 – En vue du théorème d'Hadamard. On considère l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^n$  dont on note  $\|\cdot\|$  la norme. Soit  $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$  une application de classe  $\mathscr{C}^2$  telle que  $\mathrm{d}f(x)$  est inversible, pour tout  $x\in\mathbb{R}^n$  et telle que  $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$ .

- a) Pour tout compact K de  $\mathbb{R}^n$ , montrer que  $f^{-1}(K)$  est compact.
- **b)** On considère la fonction

$$\varphi \colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto \mathrm{d} f(x)^{-1}(f(x)) \end{cases}$$

et le problème de Cauchy

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} x'(t) = \varphi(x(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Montrer que  $(\mathscr{C})$  admet une unique solution maximale. On note  $\delta:t\mapsto\delta(t)$  cette solution maximale et  $I = T_-, T_+$  son intervalle de définition.

c) Soit F la fonction

$$F \colon \left\{ \begin{matrix} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \|f(x)\|^2 \, . \end{matrix} \right.$$

Déterminer la fonction  $t \mapsto F(\delta(t))$ . En déduire que  $T_+ = +\infty$  et  $T_- = -\infty$ .

Soit  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathscr{C}^1$  telle que Exercice 10 - Solutions maximales.  $\forall x \in \mathbb{R},$  $|f(x) - \cos x| \leq 1$ .

Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle x'(t) = f(x(t)) sont bornées et définies sur  $\mathbb{R}$ .

Topologie.

## Exercice 11 - Un tout petit peu de topologie.

- a) Soient  $(E, \mathscr{T})$ ,  $(F, \mathscr{T}')$  deux espaces topologiques et  $f: E \to F$  une application constante. Montrer que f est continue.
- b) Déterminer toutes les topologies sur un ensemble à un élément. Montrer que toute application qui part d'un espace à un élément et qui arrive dans un espace topologique est continue. Montrer que toute application qui part d'un espace topologique et arrive dans un espace à un élément est continue.
- c) Déterminer toutes les topologies sur un ensemble à deux éléments. Combien y-a-t-il de classe d'homéomorphisme d'ensemble à deux éléments?

- **d)** Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que l'ensemble formé des réunions de boules ouvertes est une topologie sur E. Montrer que si (E, d) et (F, d') sont deux espaces métriques alors la notion d'application continue entre E et F au sens de la prépa correspond à la notion définie en cours vendredi.
- e) Soient  $(E, \mathscr{T})$  un espace topologique et F une partie de E. Montrer qu'il existe sur F une unique topologie rendant continue l'inclusion  $i: F \to E$  et telle que pour tout espace topologique X, toute application  $g: X \to E$  continue à valeurs dans F se « factorise » par i en une application continue. En d'autres termes, montrer une unique topologie rendant continue l'inclusion  $i: F \to E$  et telle que pour tout espace topologique X et toute application  $g: X \to E$  continue à valeurs dans F, l'application  $g: X \to F$  soit continue. Montrer que cette topologie est la moins fine rendant continue i.

**Exercice 12 – Homéomorphisme et espace normé.** Soient E un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur E. Pour  $i \in \{1,2\}$ ,  $a \in E$  et  $r \in \mathbb{R}_+$ , on note  $B_i(a,r)$  la boule ouverte de centre a de rayon r pour la norme  $N_i$ ,  $B_{f,i}(a,r)$  la boule ouverte de centre a de rayon r pour la norme  $N_i$  et  $S_i(a,r)$  la sphère de centre a de rayon r pour la norme  $N_i$ . On considère  $a_1, a_2 \in E$  et  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ .

- **a)** Montrer que  $B_1(a_1,r_1)$  et  $B_2(a_2,r_2)$  sont homéomorphes
- **b)** Montrer que  $B_{f,1}(a_1,r_1)$  et  $B_{f,2}(a_2,r_2)$  sont homéomorphes.

Remarque. On peut montrer plus généralement que tout convexe compact d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie est homéomorphe à une boule fermé et que tout convexe ouvert est homéomorphe à d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie est homéomorphe à une boule ouverte.

- c) Montrer que  $S_1(a_1, r_1)$  et  $S_2(a_2, r_2)$  sont homéomorphes.
- **d)** Montrer que  $B_{f,1}(a_1,r_1)$  n'est jamais homéomorphe à  $B_2(a_2,r_2)$ .
- e) Montrer que  $B_1(a_1, r_1)$  n'est jamais homéomorphe à  $S_2(a_2, r_2)$ .

Remarque. Il est aussi vrai que  $B_{f,1}(a_1,r_1)$  n'est jamais homéomorphe à  $S_2(a_2,r_2)$ . Mais je ne vois pas comment vous le faire démontrer simplement. Si vous suivez un cours de topologie algébrique au second semestre, vous avez de grande chance de voir une démonstration de ce résultat.

- f) Montrer que toute boule ouverte est homéomorphe à E. Montrer que si  $N_1$  est une norme euclidienne, toute boule ouverte pour  $N_1$  est  $\mathscr{C}^{\infty}$ -difféomorphe à E.
- **g)** Montrer que le groupe des homéomorphismes de la sphère (resp. boule ouverte) opère transitivement sur elle-même c'est-à-dire que pour tous x, y, il existe un homéomorphisme f de la sphère (resp. boule ouverte) telle que f(x) = y.
- **h)** Montrer que la sphère privée de  $\mathbb{R}^{n+1}$  d'un point est homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ .
- i) Montrer que T et A ne sont pas homéomorphes.

**Exercice 13 – Topologie produit.** Soient I un ensemble et  $(X_i, \mathscr{T}_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. Pour  $i \in I$ , on note

$$p_i \colon \begin{cases} \mathbf{X} = \prod_{j \in \mathbf{I}} \mathbf{X}_j \longrightarrow \mathbf{X}_i \\ (x_j)_{j \in \mathbf{I}} \longmapsto x_i \end{cases}$$

la  $i^{\rm e}$  projection.

a) Montrer qu'il existe sur X une unique topologie (appelée topologie produit) telle que, pour tout  $i \in I$ , l'application  $p_i$  soit continue et pour tout espace topologique Y et toute famille d'application continue  $(f_i : Y \to X_i)_{i \in I}$ , l'application

$$(f_i)_{i \in \mathcal{I}} : \begin{cases} \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X} = \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{X}_i \\ y \longmapsto (f_i(y))_{i \in \mathcal{I}} \end{cases}$$

soit continue. Montrer que cette topologie est la moins fine rendant continue toute les applications  $p_i$ . Comparer avec la question  $\mathbf{e}$  de l'exercice 11.

- **b)** Soit f une application continue de X dans Y. On note  $\Gamma(f) = \{(x,y) \in X \times Y, y = f(x)\}$ . Montrer que l'application  $x \mapsto (x, f(x))$  est un homéomorphisme de X sur  $\Gamma(f)$ . L'ensemble  $\Gamma(f)$  est-il fermé dans  $X \times Y$ ?
- c) Montrer que X est séparé si et seulement si la diagonale  $\Delta = \{(x, x) \in X \times X, x \in X\}$  de  $X \times X$  est fermé (pour la topologie produit).

Exercice 14 – Topologie quotient. Soient X un espace topologique et  $\mathscr{R}$  une relation d'équivalence sur X. On note  $\pi: X \to X/\mathscr{R}$  la surjection canonique.

a) Montrer qu'il existe sur  $X/\mathscr{R}$  une unique topologie (appelée topologie quotient) telle que l'application  $\pi$  soit continue et pour tout espace topologique Y et toute famille d'application continue  $f: X \to Y$  telle que f(x) = f(y) si  $x\mathscr{R}y$ , l'application

$$\overline{f} \colon \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}/\mathscr{R} & \longrightarrow \mathbf{Y} \\ y = \pi(x) \longmapsto \overline{f}(y) = f(x) \end{array} \right.$$

soit continue. Montrer que cette topologie est la plus fine rendant continue  $\pi$ . Comparer avec la question  $\mathbf{e}$  de l'exercice 11.