Vincent Beck

Module sur un anneau

Exercice 1 — IM. Soient M un A-module et I un idéal de A. On considère le sous-ensemble de M

$$\mathrm{IM} = \left\{ x \in \mathrm{M}, \quad \exists\, n \in \mathbb{N}, \quad \exists\, ((i_1, x_1), \ldots, (i_n, x_n)) \in (\mathrm{I} \times \mathrm{M})^n, \quad x = \sum_{\ell=1}^{n} i_\ell x_\ell \right\}.$$

a) Montrer que IM est un sous-module de M. Que vaut IA ?

b) Soient N et P deux sous-modules de M tels que $\mathrm{M} = \mathrm{N} \oplus \mathrm{P}$. Montrer que $\mathrm{IM} = \mathrm{IN} \oplus \mathrm{IP}$.

c) Montrer que $\mathrm{N} = \mathrm{M}/\mathrm{IM}$ vérifie $\mathrm{IN} = \{0\}$.

d) Soit $f \colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un morphisme de A-modules. Montrer que $f(\mathrm{IM}) \subset \mathrm{IN}$. En déduire que si f réalise un isomorphisme entre M et N, alors f induit un isomorphisme entre IM et IN.

e) Soient M et N deux A-modules et $f \colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application A-linéaire. On désigne par $\pi_{\mathrm{M}} \colon \mathrm{M} \to \mathrm{M}/\mathrm{IM}$ et $\pi_{\mathrm{N}} \colon \mathrm{N} \to \mathrm{N}/\mathrm{IN}$ les surjections canoniques. Montrer qu'il existe une unique application $\widetilde{f} \colon \mathrm{M}/\mathrm{IM} \to \mathrm{N}/\mathrm{IN}$ vérifiant $\widetilde{f} \circ \pi_{\mathrm{M}} = \pi_{\mathrm{N}} \circ f$, autrement dit telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{M}}"'] & \mathrm{N} \arrow[d, "\pi_{\mathrm{N}}"] \\ \mathrm{M}/\mathrm{IM} \arrow[r, dotted, "\widetilde{f}"] & \mathrm{N}/\mathrm{IN} \end{tikzcd}$$

f) Montrer que $\widetilde{f}$ est A-linéaire et A/I-linéaire.

g) De plus, montrer que $\widetilde{f}$ est surjective, si f l'est.

Exercice 2 — Torsion. Soient M un A-module et $x \in \mathrm{M}$; on dit que x est un élément *de torsion* dans M s'il existe $a \in \mathrm{A} \smallsetminus \{0\}$ tel que $a \cdot x = 0$. On note $\mathrm{M}_{\mathrm{tors}}$ l'ensemble des éléments de torsion du module M. Un module M est dit *sans torsion* si $\mathrm{M}_{\mathrm{tors}} = \{0\}$; il est dit de torsion si $\mathrm{M}_{\mathrm{tors}} = \mathrm{M}$.

a) Quels sont les éléments de torsion du A-module A ?

On suppose pour le reste de l'exercice que A est un anneau intègre.

b) Montrer que $\mathrm{M}_{\mathrm{tors}}$ est un sous-module de M. Est-ce encore vrai si A n'est plus supposé intègre ?

c) Montrer que $\mathrm{M}/\mathrm{M}_{\mathrm{tors}}$ est un A-module sans torsion.

d) Soit N un sous-module de M. Exprimer $\mathrm{N}_{\mathrm{tors}}$ en fonction de $\mathrm{M}_{\mathrm{tors}}$. En déduire que $\mathrm{M}_{\mathrm{tors}}$ est un module de torsion.

e) Soient N et P deux sous-modules de M tels que $\mathrm{M} = \mathrm{N} \oplus \mathrm{P}$. Montrer que $\mathrm{M}_{\mathrm{tors}} = \mathrm{N}_{\mathrm{tors}} \oplus \mathrm{P}_{\mathrm{tors}}$. En déduire que A^r est sans torsion.

f) Si $f \colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est un morphisme de A-modules alors $f(\mathrm{M}_{\mathrm{tors}}) \subset \mathrm{N}_{\mathrm{tors}}$. En déduire que si f réalise un isomorphisme entre M et N, alors f induit un isomorphisme entre $\mathrm{M}_{\mathrm{tors}}$ et $\mathrm{N}_{\mathrm{tors}}$. En déduire qu'un module libre de type fini est sans torsion.

g) Montrer que si la suite $0 \longrightarrow \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{P}$ est exacte alors la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{M}_{\mathrm{tors}} \longrightarrow \mathrm{N}_{\mathrm{tors}} \longrightarrow \mathrm{P}_{\mathrm{tors}}$$

l'est aussi. En déduire que si N est un sous-module de M alors $\mathrm{N}_{\mathrm{tors}} = \mathrm{M}_{\mathrm{tors}} \cap \mathrm{N}$.

h) Montrer qu'il existe une unique application A-linéaire $\widetilde{f}$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{M}}"'] & \mathrm{N} \arrow[d, "\pi_{\mathrm{N}}"] \\ \mathrm{M}/\mathrm{M}_{\mathrm{tors}} \arrow[r, dotted, "\widetilde{f}"] & \mathrm{N}/\mathrm{N}_{\mathrm{tors}} \end{tikzcd}$$

où π_{M} et π_{N} désignent les surjections canoniques.

i) Soit M un $\mathbb{Z}$-module. Donner une caractérisation des éléments de torsion de M en fonction de leur ordre.

j) Montrer que $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Z}$-module sans torsion, qui n'est pas de type fini et tel que toute famille à plus de deux éléments est liée. En particulier, $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre.

k) Montrer que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module de torsion qui n'est pas de type fini.

l) Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{Z}_p = \{a/p^n \in \mathbb{Q}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}\}$ et H_p l'image de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par la surjection canonique. Montrer que H_p est de torsion et n'est pas de type fini. Montrer que tous les sous-$\mathbb{Z}$-modules stricts de H_p sont monogènes et les déterminer. Montrer que H_p est un $\mathbb{Z}$-module artinien c'est-à-dire tel que toute suite décroissante de sous-module soit stationnaire.

Définition 1 — Suite exacte. On considère la situation suivante : trois A-modules M, N et P et deux applications A-linéaires $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ et $g : \mathrm{N} \to \mathrm{P}$. On dit que la suite $\mathrm{M} \xrightarrow{f} \mathrm{N} \xrightarrow{g} \mathrm{P}$ est exacte en N si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$. En particulier $g \circ f = 0$.

Plus généralement, on dit que la suite

$$\cdots \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_{i-1}} \mathrm{M}_i \xrightarrow{f_i} \mathrm{M}_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \mathrm{M}_{i+2} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots \longrightarrow \cdots$$

est exacte si elle est exacte en chacun de ses termes.

Exercice 3 — k[X]-module. Soit k un corps (commutatif).

a) Soit E un $k[\mathrm{X}]$-module. Montrer que E « est » un k-espace vectoriel.

b) Soit E un k-espace vectoriel. Montrer qu'il revient au même de se donner un endomorphisme u de E ou une structure de $k[\mathrm{X}]$-module sur u qui « prolonge » la structure de k-espace vectoriel sur E.

c) Déterminer en fonction de u les sous-$k[\mathrm{X}]$-module de E.

d) Soient (E, u) et (F, v) deux $k[\mathrm{X}]$-modules. Déterminer $\mathrm{Hom}_{k[\mathrm{X}]}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ en fonction de u et v. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $(\mathrm{E}, u) \overset{k[\mathrm{X}]\text{-mod}}{\simeq} (\mathrm{F}, v)$.

e) On note π_u le polynôme minimal de u. Montrer que (E, u) est en fait un $k[\mathrm{X}]/\langle \pi_u \rangle$-module. Déterminer les sous-$k[\mathrm{X}]/\langle \pi_u \rangle$-modules de E et $\mathrm{End}_{k[\mathrm{X}]/\langle \pi_u \rangle}(\mathrm{E})$.

f) On suppose que π_u est irréductible. Montrer que tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

g) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $u^2 + u + 1 = 0$. Démontrer que $\dim \mathrm{E}$ est paire et déterminer la dimension de $\mathrm{C}(u) = \{v \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}), \quad uv = vu\}$.

Exercice 4 — Chasse au diagramme. On considère le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}_1 \arrow[r, "u_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "f_1"] & \mathrm{M}_2 \arrow[r, "v_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "f_2"] & \mathrm{M}_3 \arrow[r, "w_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "f_3"] & \mathrm{M}_4 \arrow[d, "f_4"] \\
\mathrm{N}_1 \arrow[r, "u_{\mathrm{N}}"] & \mathrm{N}_2 \arrow[r, "v_{\mathrm{N}}"] & \mathrm{N}_3 \arrow[r, "w_{\mathrm{N}}"] & \mathrm{N}_4
\end{tikzcd}$$

a) Montrer que si f_1 est surjective et f_2 et f_4 injective alors f_3 est injective.

b) Montrer que si f_4 est injective et f_1 et f_3 surjective alors f_2 est surjective.

c) En déduire le « lemme des cinq » : si le diagramme suivant est commutatif, que sont lignes sont exactes et que f_2 et f_4 sont des isomorphismes, que f_1 est surjectif et f_5 injectif alors f_3 est un isomorphisme.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}_1 \arrow[r, "u_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "f_1"] & \mathrm{M}_2 \arrow[r, "v_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "f_2"] & \mathrm{M}_3 \arrow[r, "w_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "f_3"] & \mathrm{M}_4 \arrow[r, "x_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "f_4"] & \mathrm{M}_5 \arrow[d, "f_5"] \\
\mathrm{N}_1 \arrow[r, "u_{\mathrm{N}}"] & \mathrm{N}_2 \arrow[r, "v_{\mathrm{N}}"] & \mathrm{N}_3 \arrow[r, "w_{\mathrm{N}}"] & \mathrm{N}_4 \arrow[r, "x_{\mathrm{N}}"] & \mathrm{N}_5
\end{tikzcd}$$

d) « Lemme des 9 ». On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{M}_1 \arrow[r, "f_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "u_1"] & \mathrm{M}_2 \arrow[r, "g_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "u_2"] & \mathrm{M}_3 \arrow[r] \arrow[d, "u_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{N}_1 \arrow[r, "f_{\mathrm{N}}"] \arrow[d, "v_1"] & \mathrm{N}_2 \arrow[r, "g_{\mathrm{N}}"] \arrow[d, "v_2"] & \mathrm{N}_3 \arrow[r] \arrow[d, "v_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{P}_1 \arrow[r, "f_{\mathrm{P}}"] \arrow[d] & \mathrm{P}_2 \arrow[r, "g_{\mathrm{P}}"] \arrow[d] & \mathrm{P}_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

On suppose que les trois lignes sont exactes et que deux colonnes le sont. Montrer que la troisième colonne est aussi exacte.

Exercice 5 — Lemme du serpent.

a) Soient M, N deux A-modules et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application A-linéaire. On considère M' un sous-module de M et N' un sous-module de N tel que $f(\mathrm{M}') \subset \mathrm{N}'$. Montrer qu'il existe une unique application $\widetilde{f}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}' \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "i_{\mathrm{M}}"'] & \mathrm{N}' \arrow[d, "i_{\mathrm{N}}"] \\
\mathrm{M} \arrow[r, "f"] & \mathrm{N}
\end{tikzcd}$$

et que de plus $\widetilde{f}$ est linéaire. De même, montrer qu'il existe une unique application $\overline{f}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_{\mathrm{M}}"'] & \mathrm{N} \arrow[d, "p_{\mathrm{N}}"] \\
\mathrm{M}/\mathrm{M}' \arrow[r, "\overline{f}"] & \mathrm{N}/\mathrm{N}'
\end{tikzcd}$$

et que cette application $\overline{f}$ est linéaire.

b) On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}_1 \arrow[r, "f_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "u"'] & \mathrm{M}_2 \arrow[d, "v"] \\
\mathrm{N}_1 \arrow[r, "f_{\mathrm{N}}"] & \mathrm{N}_2
\end{tikzcd}$$

Montrer qu'il existe une unique application $\widetilde{f_{\mathrm{M}}} \colon \operatorname{Ker} u \to \operatorname{Ker} v$ (resp. $\overline{f_{\mathrm{N}}} \colon \operatorname{Coker} u \to \operatorname{Coker} v$) qui rendent commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} u \arrow[r, "i_u"] \arrow[d, "\widetilde{f_{\mathrm{M}}}"] & \mathrm{M}_1 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f_{\mathrm{M}}"] & \mathrm{N}_1 \arrow[r, "p_u"] \arrow[d, "f_{\mathrm{N}}"] & \operatorname{Coker} u \arrow[d, "\overline{f_{\mathrm{N}}}"] \\
\operatorname{Ker} v \arrow[r, "i_v"] & \mathrm{M}_2 \arrow[r, "v"] & \mathrm{N}_2 \arrow[r, "p_v"] & \operatorname{Coker} v
\end{tikzcd}$$

Montrer que $\widetilde{f_{\mathrm{M}}}$ et $\overline{f_{\mathrm{N}}}$ sont linéaires. Montrer que $\widetilde{f_{\mathrm{M}}}$ est injective si f_{M} l'est et que $\overline{f_{\mathrm{N}}}$ est surjective si f_{N} l'est.

c) On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}_1 \arrow[r, "f_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "u"] & \mathrm{M}_2 \arrow[r, "g_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "v"] & \mathrm{M}_3 \arrow[d, "w"] \\
\mathrm{N}_1 \arrow[r, "f_{\mathrm{N}}"] & \mathrm{N}_2 \arrow[r, "g_{\mathrm{N}}"] & \mathrm{N}_3
\end{tikzcd}$$

Montrer que $\widetilde{g_{\mathrm{M}} \circ f_{\mathrm{M}}} = \widetilde{g_{\mathrm{M}}} \circ \widetilde{f_{\mathrm{M}}}$ et que $\overline{g_{\mathrm{N}} \circ f_{\mathrm{N}}} = \overline{g_{\mathrm{N}}} \circ \overline{f_{\mathrm{N}}}$. En déduire que, si $g_{\mathrm{M}} \circ f_{\mathrm{M}} = 0$ alors $\widetilde{g_{\mathrm{M}}} \circ \widetilde{f_{\mathrm{M}}} = 0$ et que si $g_{\mathrm{N}} \circ f_{\mathrm{N}} = 0$ alors $\overline{g_{\mathrm{N}}} \circ \overline{f_{\mathrm{N}}} = 0$.

d) Toujours avec le diagramme commutatif précédent, montrer que si la première ligne est exacte et si f_{N} est injective alors $\operatorname{Ker} \widetilde{g_{\mathrm{M}}} = \operatorname{Im} \widetilde{f_{\mathrm{M}}}$. Montrer que si la deuxième ligne est exacte et si g_{M} est surjective alors $\operatorname{Ker} \overline{g_{\mathrm{N}}} = \operatorname{Im} \overline{f_{\mathrm{N}}}$.

e) On considère le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{M}_1 \arrow[r, "f_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "u"] & \mathrm{M}_2 \arrow[r, "g_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "v"] & \mathrm{M}_3 \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{N}_1 \arrow[r, "f_{\mathrm{N}}"] & \mathrm{N}_2 \arrow[r, "g_{\mathrm{N}}"] & \mathrm{N}_3 &
\end{tikzcd}$$

Construire une application linéaire $\delta : \operatorname{Ker} w \to \operatorname{Coker} u$. Montrer que $\operatorname{Ker} \delta = \operatorname{Im} \widetilde{g_{\mathrm{M}}}$ et que $\operatorname{Im} \delta = \operatorname{Ker} \overline{f_{\mathrm{N}}}$ et qu'on a ainsi la suite exacte

$$\operatorname{Ker} u \xrightarrow{\widetilde{f_{\mathrm{M}}}} \operatorname{Ker} v \xrightarrow{\widetilde{g_{\mathrm{M}}}} \operatorname{Ker} w \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} u \xrightarrow{\overline{f_{\mathrm{N}}}} \operatorname{Coker} v \xrightarrow{\overline{g_{\mathrm{N}}}} \operatorname{Coker} w$$

qui se prolonge en la suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} u \xrightarrow{\widetilde{f_{\mathrm{M}}}} \operatorname{Ker} v \xrightarrow{\widetilde{g_{\mathrm{M}}}} \operatorname{Ker} w \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} u \xrightarrow{\overline{f_{\mathrm{N}}}} \operatorname{Coker} v \xrightarrow{\overline{g_{\mathrm{N}}}} \operatorname{Coker} w \longrightarrow 0$$

si f_{M} est injective et g_{N} est surjective.