Vincent Beck

G-module

Exercice 1 – Propriété universelle du produit tensoriel. Soit $\mathrm{V}, \mathrm{W}, \mathrm{X}$ trois espaces vectoriels.

a) Décrire une application linéaire de $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}, \mathrm{X})$ dans l'espace vectoriel $\mathrm{Bil}(\mathrm{V} \times \mathrm{W}, \mathrm{X})$ des applications bilinéaires de $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$ dans X. Montrer que cette application linéaire est bijective.

b) En déduire une isomorphisme entre $(\mathrm{V} \otimes \mathrm{V})^*$ et l'ensemble des formes bilinéaires sur V.

c) On suppose dans cette question que $\mathrm{V}, \mathrm{W}, \mathrm{X}$ sont des G-modules. Définir une structure de G-module sur $\mathrm{Bil}(\mathrm{V} \times \mathrm{W}, \mathrm{X})$. Montrer que les isomorphismes des question **a** et **b** sont des isomorphismes de G-modules.

d) On suppose que V est de dimension finie. Décrire un isomorphisme entre $\mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V}^*$ et $(\mathrm{V} \otimes \mathrm{V})^*$. Montrer que c'est un isomorphisme de G-module si V est un G-module.

e) Décrire une application linéaire surjective de $\mathrm{V} \otimes \mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}, \mathrm{W})$ dans W.

f) Montrer que l'application précédente est un morphisme de G-module lorsque V et W en sont.

Exercice 2 – Le groupe $\mathfrak{S}_3$.

a) On considère l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathbb{C}^3$ par permutation des coordonnées :

$$(\sigma, (x_1, x_2, x_3)) \mapsto (x_{\sigma^{-1}}(1), x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)})$$

Vérifier que cela définit une structure de $\mathfrak{S}_3$-module sur $\mathbb{C}^3$ dont la représentation matricielle dans la base canonique est donnée par les matrices de permutation.

b) Montrer que $\mathbb{C}^3$ admet précisément deux sous-G-modules donnée par $\mathbb{C}(1,1,1)$ et $\mathrm{H} = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ que chacun de ces G-module est simple.

c) Décrire une représentation matricielle de la représentation H.

Dans les questions qui suivent, on note $\sigma = (1,2,3)$ et V une représentation de $\mathfrak{S}_3$ et $\tau = (1,2)$.

d) Montrer que V se décompose en $\mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_j \oplus \mathrm{V}_{j^2}$ où V_α est le sous-espace propre de σ associé à la valeur propre j.

e) Montrer que $\tau(\mathrm{V}_\alpha) = \mathrm{V}_{\alpha^2}$ (on utilisera la relation $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^2$). En déduire que V_1 est un sous-G-module de V et $\mathrm{V}_j \oplus \mathrm{V}_{j^2}$ aussi.

f) En déduire que si V est irréductible, on a $\mathrm{V}_1 = \{0\}$ ou $\mathrm{V}_j = \mathrm{V}_{j^2} = 0$.

g) On suppose que V est irréductible et $\mathrm{V}_1 \neq 0$. Montrer que V est de dimension 1 et est soit la représentation triviale soit la représentation associée à la signature.

h) On suppose que V est irréductible et $\mathrm{V}_j \neq 0$. Pour $0 \neq v \in \mathrm{V}_j$. Montrer que l'espace vectoriel engendré par v et $\tau(v)$ est de dimension 2 et G-stable. En déduire que $\mathrm{V} = \mathrm{vect}\,(v, \tau(v))$ est G-isomorphe à H (on pourra considérer les vecteurs $(1, j, j^2)$ et $(j, 1, j^2)$).

i) Généraliser cette méthode au groupe diédral D_n engendré par τ d'ordre 2, σ d'ordre n vérifiant la relation $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$.

Exercice 3 – Suite exacte. On considère trois G-modules $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3$ et $f : \mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_2$ et $f' : \mathrm{V}_2 \to \mathrm{V}_3$ deux G-morphismes. On dit la suite $\mathrm{V}_1 \xrightarrow{f} \mathrm{V}_2 \xrightarrow{f'} \mathrm{V}_3$ est exacte en V_2 si $\mathrm{Ker}\, f' = \mathrm{Im}\, f$.

a) On suppose que la suite $\mathrm{V}_1 \xrightarrow{f} \mathrm{V}_2 \xrightarrow{f'} \mathrm{V}_3$ est exacte. Montrer que f' est injective si et seulement si $f = 0$. Montrer que f est surjective si et seulement si $f' = 0$.

b) On considère la suite $0 \longrightarrow \mathrm{V}_2 \xrightarrow{f'} \mathrm{V}_3$. Montrer qu'elle est exacte si et seulement si f' est injective.

c) On considère la suite $\mathrm{V}_1 \xrightarrow{f} \mathrm{V}_2 \longrightarrow 0$. Montrer qu'elle est exacte si et seulement si f est injective.

d) On dit que $0 \longrightarrow \mathrm{V}_1 \xrightarrow{f} \mathrm{V}_2 \xrightarrow{f'} \mathrm{V}_3 \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte si on l'exactitude en V_1, V_2 et V_3. Vérifier qu'une suite de la forme ci-dessus est une suite exacte courte si et seulement si f injective, f' surjective et $\mathrm{Ker}\, f' = \mathrm{Im}\, f$.

e) On suppose que $\mathrm{V}_2 = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_3$. Décrire une suite exacte courte de la forme

$$0 \longrightarrow \mathrm{V}_1 \xrightarrow{f} \mathrm{V}_2 \xrightarrow{f'} \mathrm{V}_3 \longrightarrow 0$$

Montrer que cette suite exacte est scindée (il existe $\varphi : \mathrm{V}_3 \to \mathrm{V}_2$ un morphisme de G-modules tel que $f'\varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{V}_3}$) et admet aussi une rétraction (il existe $\psi : \mathrm{V}_3 \to \mathrm{V}_1$ un morphisme de G-modules tel que $\psi f = \mathrm{id}_{\mathrm{V}_1}$).

f) On considère à présent une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathrm{V}_1 \xrightarrow{f} \mathrm{V}_2 \xrightarrow{f'} \mathrm{V}_3 \longrightarrow 0$$

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

(i) La suite exacte admet une section
(ii) La suite exacte admet une retraction
(iii) V_1 (ou plutôt son image par f qui est aussi $\operatorname{Ker} f'$) admet un supplémentaire G-stable dans V_2.
(iv) Il existe un diagramme commutatif de G-module de la forme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{V}_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_3 \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & \mathrm{V}_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{V}_1 \arrow[r, "f"] & \mathrm{V}_2 \arrow[r, "f'"] & \mathrm{V}_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Montrer que dans un diagramme commutatif de la forme (iv), θ est nécessairement isomorphisme.

Exercice 4 — Extension des scalaires. Dans cet exercice, on donne une construction intrinsèque sur les espaces vectoriels et les endomorphismes du fait qu'une matrice à coefficient dans $\mathbb{R}$ (ou dans un « petit » corps) peut-être vue comme une matrice à coefficient dans $\mathbb{C}$ (ou dans un « gros » corps).

a) Soient k un corps et k' une extension de k et V un k-espace vectoriel. Construire sur $\mathrm{V}_{k'} := k' \otimes \mathrm{V}$ une structure de k'-espace vectoriel (en multipliant la « première composante » du produit tensoriel).

b) Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une k-base de V. Montrer que $\mathscr{B}_{k'} := (1 \otimes e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une k'-base de $\mathrm{V}_{k'}$. En déduire que $\dim_k(\mathrm{V}) = \dim_{k'}(\mathrm{V}_{k'})$.

c) Soient W un k-espace vectoriel et $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ une application k-linéaire. Montrer que $f_{k'} := \mathrm{T}(\mathrm{id}_{k'}, f) : \mathrm{V}_{k'} \to \mathrm{W}_{k'}$ est une application k'-linéaire. On fixe une base $\mathscr{C}$ de W. Comparer la matrice de l'application k-linéaire f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ à la matrice de l'application k'-linéaire $f_{k'}$ dans les k'-bases $\mathscr{B}_{k'}$ et $\mathscr{C}_{k'}$.

d) On suppose que V est un G-module sur k. Construire une structure de G-module sur k' sur $\mathrm{V}_{k'}$ ayant la même représentation matricielle que celle de G. Une représentation de G sur k' qui est de la forme $\mathrm{V}_{k'}$ pour une représentation V de G sur k est dite *réalisable sur k*.

Exercice 5 — Module de permutation. Soit X un G-ensemble (c'est-à-dire un ensemble sur lequel G agit).

a) Montrer que G agit linéairement sur l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$ des fonctions de X dans k (si $f : \mathrm{X} \to k$ et $g \in \mathrm{G}$, on pose $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$).

b) Montrer que le sous-espace vectoriel $k\mathrm{X}$ des fonctions à support fini est un sous-G-module de $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$ dont une base est $(\delta_x)_{x \in \mathrm{X}}$ où $\delta_x(y) = \delta_{x,y}$ pour tout $y \in \mathrm{Y}$.

c) Vérifier $g\delta_x = \delta_{gx}$ pour tous $x \in \mathrm{X}$ et $g \in \mathrm{G}$. On a construit ainsi à partir de X un espace vectoriel dont une base est formée « des éléments de X » et l'action de G sur $k\mathrm{X}$ s'obtient par linéarisation de celle de G sur X. On dit que $k\mathrm{X}$ est le G-module de permutation associé à X. Par exemple le $\mathfrak{S}_3$-module $\mathbb{C}^3$ de l'exercice 2 est le $\mathfrak{S}_3$-module de permutation associé à l'action naturelle de $\mathfrak{S}_3$ sur $\{1, 2, 3\}$.