Vincent Beck

Groupes et polynômes symétriques

Groupe symétrique.

Exercice 1 — Transposition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer par deux méthodes le nombre minimal de transpositions nécessaires pour engendrer $\mathfrak{S}_n$? Donner des exemples de familles de transpositions qui engendrent $\mathfrak{S}_n$ de cardinal minimal.

Exercice 2 — Lien entre les différents groupes symétriques.

a) Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$.

b) Soient $n > m$. Déterminer les nombres et les expressions des morphismes de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathfrak{S}_m$?

c) Montrer que $\mathfrak{S}_n$ s'injecte (en tant que groupe) dans $\mathfrak{A}_{n+2}$.

Définition 1 — Graphe de Cayley. Soient G un groupe et S une partie de G stable par passage à l'inverse. On définit le graphe de Cayley $\Gamma_{\mathrm{G,S}}$ associé à G et S comme le graphe dont les sommets sont les éléments de G et pour $g, g' \in \mathrm{G}$, on dit que $\{g, g'\}$ est une arête si $g'g^{-1} \in \mathrm{S}$.

Exercice 3 — Graphe de Cayley.

a) Soient G un groupe et S une partie de G. Montrer que le graphe de Cayley $\Gamma_{\mathrm{G,S}}$ est connexe si et seulement si tout élément de G est produit d'éléments de S.

b) Déterminer les graphes de Cayley de $\mathfrak{S}_3$ pour les parties $\mathrm{S}_1 = \{(1,2),(2,3)\}$ et $\mathrm{S}_2 = \{(1,2,3),(1,3,2)\}$.

Exercice 4 — Dérangement. On dit que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un dérangement si $\sigma(x) \neq x$ pour tout $x \in [\![1\,,\, n]\!]$. On note $\mathfrak{D}_n$ l'ensemble des dérangement de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathrm{D}_n = |\mathfrak{D}_n|$.

a) Montrer que, pour $n \geqslant 2$, on a $\mathrm{D}_{n+1} = n(\mathrm{D}_n + \mathrm{D}_{n-1})$ (on pourra partitionner l'ensemble E_k des dérangements σ tels que $\sigma(n+1) = k$ en une partie de cardinal D_n et une de cardinal D_{n-1}).

b) En déduire que $\mathrm{D}_n = n\mathrm{D}_{n-1} + (-1)^n$ pour $n \geqslant 2$.

c) Montrer que $\mathrm{D}_n = n!\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}\right)$.

d) Simplifier $\sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_{n-k}^{p-k}$ pour $p \in [\![0\,,\, n]\!]$.

e) Montrer (sans utiliser la question **c**) que $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{D}_{n-k} = n!$.

f) Retrouver le résultat de la question **c**.

g) Déterminer les dérangements de $\mathfrak{S}_3$.

h) Soit $n \neq 3$. Montrer que le graphe de Cayley de $\mathfrak{S}_n$ associé aux dérangements est connexe.

Exercice 5 — Produit en couronne. Soient A et B deux ensembles et G (resp. H) un sous-groupe de $\mathfrak{S}(\mathrm{A})$ (resp. $\mathfrak{S}(\mathrm{B})$). On définit le produit en couronne de G par H que l'on note $\mathrm{G} \wr \mathrm{H}$ comme l'ensemble des applications de la forme

$$\theta\colon \begin{cases} \mathrm{A} \times \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{A} \times \mathrm{B} \\ (a,b) \longmapsto (\gamma_b(a), \eta(b)) \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \eta \in \mathrm{H} \quad \text{et} \quad \gamma_b \in \mathrm{G}\,.$$

a) Montrer que $\mathrm{G} \wr \mathrm{H}$ est un groupe.

b) Montrer que $\mathrm{G} \wr \mathrm{H} = \mathrm{G}^{\mathrm{B}} \rtimes \mathrm{H}$.

c) Soient C un ensemble et K un sous-groupe de $\mathfrak{S}(\mathrm{C})$. Montrer l'associativité du produit en couronne :

$$(\mathrm{G} \wr \mathrm{H}) \wr \mathrm{K} = \mathrm{G} \wr (\mathrm{H} \wr \mathrm{K})\,.$$

Exercice 6 — Groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_n$. Soient $n \in \mathbb{N}$, p un nombre premier et $n = a_0 p^u + a_1 p^{u-1} + \cdots + a_u$ l'écriture de n en base p (c'est-à-dire $a_i \in [\![0\,,\, p-1]\!]$).

a) Déterminer les p-Sylow de $\mathfrak{S}_p$ et leur nombre. En déduire à l'aide du théorème de Sylow une démonstration du théorème de Wilson.

b) Montrer que le cardinal d'un p-Sylow de $\mathfrak{S}_n$ est p^{M_n} avec

$$\mathrm{M}_n = \mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n}{p^2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n}{p^3}\right) + \cdots = a_0\frac{p^u - 1}{p-1} + a_1\frac{p^{u-1}-1}{p-1} + \cdots + a_{u-1} = a_0\mathrm{M}_{p^u} + \cdots + a_{u-1}\mathrm{M}_p\,.$$

c) En déduire la structure d'un p-Sylow de $\mathfrak{S}_n$ en fonction de celles des p-Sylow de $\mathfrak{S}_{p^j}$.

d) Montrer que $\mathrm{M}_{p^{r+1}} = p\mathrm{M}_{p^r} + 1$.

e) Montrer que les p-Sylow de $\mathfrak{S}_{p^r}$ sont des produits en couronne.

Exercice 7 — Groupe dérivé. Soit G un groupe. Pour $x, y \in \mathrm{G}$, on note $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ le commutateur de x et y et on définit $\mathrm{D}(\mathrm{G})$ (parfois noté $[\mathrm{G}, \mathrm{G}]$) le sous-groupe engendré par les commutateurs.

a) Soient G, H deux groupes et $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme de groupes. Montrer que φ induit un morphisme de groupe de $\mathrm{D}(\mathrm{G})$ dans $\mathrm{D}(\mathrm{H})$ (surjectif si φ l'est).

b) En déduire que $\mathrm{D}(\mathrm{G})$ est un sous-groupe caractéristique de G.

c) Montrer que $\mathrm{G}/\mathrm{D}(\mathrm{G})$ est commutatif et que tout sous-groupe de G contenant $\mathrm{D}(\mathrm{G})$ est un sous-groupe distingué de G.

d) Soit A un groupe abélien. Montrer que tout morphisme de groupes de G dans A se factorise de façon unique par la surjection canonique $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{D}(\mathrm{G})$.

e) Soit A un groupe abélien et $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{A}$ un morphisme de groupes de G dans A tel que φ induise (par factorisation) un isomorphisme entre $\mathrm{G}/\mathrm{D}(\mathrm{G})$ est A. Montrer que tout morphisme de groupes de G dans un groupe abélien B se factorise de façon unique par φ.

f) Déterminer le sous-groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que tout morphisme de $\mathfrak{S}_n$ dans un groupe abélien A se factorise par la signature $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$. En déduire le nombre de morphismes de groupes $\mathfrak{S}_n$ dans A. Cas où $\mathrm{A} = \mathbb{C}^\times$.

Exercice 8 — Morphisme associé.

a) Soient B un ensemble à n éléments, $k \in \mathbb{N}$ et C l'ensemble des parties à k éléments de B. Soit $f \in \mathfrak{S}_{\mathrm{B}}$. Déterminer la signature de la permutation de C induite par f. On pourra commencer par le cas où $f = (a, b)$ puis utiliser l'exercice précédent.

b) Soient B un ensemble à n éléments ($n \geqslant 2$), F un ensemble fini à p éléments. Soit $f \in \mathfrak{S}_{\mathrm{B}}$. Déterminer la signature de la permutation de $\mathscr{F}(\mathrm{B}, \mathrm{F})$ induite par f. On pourra commencer par le cas où $f = (a, b)$ puis utiliser l'exercice précédent.

Exercice 9 — Décomposition en cycle à support disjoint. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer pour $k \in \mathbb{Z}$, la décomposition en cycle à support disjoint de σ^k. Exemple sur $\sigma = (1, 2, 3)$, $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ et $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Exercice 10 — Un théorème de Brauer. Soit k un corps de caractéristique nulle. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\mathrm{P}_\sigma \in \mathrm{GL}_n(k)$ la matrice de permutation associée et u_σ l'endomorphisme de k^n correspondant.

a) À une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on associe la suite d'entiers $\delta(\sigma)$ formée par la suite décroissante des longueurs des cycles qui interviennent dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Montrer que pour $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$,

$$\sigma \text{ et } \tau \text{ sont conjuguées dans } \mathfrak{S}_n \iff \delta(\sigma) = \delta(\tau).$$

b) À une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on associe la suite $c(\sigma)$ où, pour $d \in \mathbb{N}^*$, $c_d(\sigma)$ désigne le nombre de cycles de longueur d dans la décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Montrer que pour $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$,

$$\sigma \text{ et } \tau \text{ sont conjuguées dans } \mathfrak{S}_n \iff c(\sigma) = c(\tau).$$

c) Donner les classes de conjugaison et calculer les fonctions c et δ de $\mathfrak{S}_n$ pour $n = 4$ et $n = 5$.

d) Considérons P_σ et P_τ associées à $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que si σ et τ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$, alors P_σ et P_τ sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_n(k)$.

e) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Calculer le polynôme caractéristique de P_σ.

f) Soit k un corps de caractéristique nulle. En considérant la multiplicité des racines de l'unité dans le polynôme caractéristique de P_σ et P_τ, montrer que si P_σ et P_τ sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_n(k)$, alors pour tout $d \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{\ell,\ d|\ell} c_\ell(\sigma) = \sum_{\ell,\ d|\ell} c_\ell(\tau).$$

En déduire que $c_d(\sigma) = c_d(\tau)$, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

g) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Calculer $\operatorname{tr}(\mathrm{P}_\sigma)$ puis $\operatorname{tr}({\mathrm{P}_\sigma}^\ell)$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$.

h) Soit k un corps de caractéristique nulle. En considérant les traces des puissances successives de P_σ et P_τ, montrer que si P_σ et P_τ sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_n(k)$, alors pour tout $d \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{\ell,\ \ell|d} \ell c_\ell(\sigma) = \sum_{\ell,\ \ell|d} \ell c_\ell(\tau)\,.$$

En déduire que $c_d(\sigma) = c_d(\tau)$, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

i) Calculer $\dim \operatorname{Ker}(\mathrm{P}_\sigma - \mathrm{id})$ puis $\dim \operatorname{Ker}({\mathrm{P}_\sigma}^\ell - \mathrm{id})$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$.

j) On ne suppose plus k de caractéristique nulle. En considérant les traces des puissances successives de P_σ et P_τ, montrer que si P_σ et P_τ sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_n(k)$, alors pour tout $d \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_\ell \operatorname{pgcd}(\ell, d) c_\ell(\sigma) = \sum_\ell \operatorname{pgcd}(\ell, d) c_\ell(\tau)\,.$$

En déduire que $c_d(\sigma) = c_d(\tau)$, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

k) Montrer le théorème de Brauer : soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, σ et τ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ si, et seulement si, P_σ et P_τ sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_n(k)$ (c'est-à-dire que ces matrices sont semblables sur k).

Polynôme symétrique.

Définition 2 — Partition. Une *partition* est une suite décroissante d'entiers naturels strictement positifs : $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ avec $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > 0$. On dit que r est la longueur de la partition λ et $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$ le poids de la partition λ.

On désigne par $\mathscr{P}(n)$ l'ensemble des partitions de longueur inférieure ou égale à n. Un élément de $\mathscr{P}(n)$ est « donc » une suite décroissante de n entiers naturels positifs dont les derniers sont éventuellement nuls.

On désigne par $\mathscr{P}_+(n)$ le sous-ensemble de $\mathscr{P}(n)$ formé des suites strictement décroissantes et on note $\rho = (n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0) \in \mathscr{P}_+(n)$.

Exercice 11 — Un peu de combinatoire autour des partitions. Montrer que l'application

$$\begin{cases} \mathscr{P}(n) & \longrightarrow \mathscr{P}_+(n) \\ \lambda & \longmapsto \lambda + \rho \end{cases}$$

réalise une bijection.

Exercice 12 — Fonction de Schur. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'anneau $\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ et l'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$.

a) Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ et $i, j \in [\![1\,,\, n]\!]$. Donner une condition nécessaire et suffisante (en terme de substitution dans P) pour que $\mathrm{X}_i - \mathrm{X}_j$ divise P.

b) Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ tel que $\sigma \cdot \mathrm{P} = \varepsilon(\sigma)\mathrm{P}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que P est divisible par

$$\mathrm{Q} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\mathrm{X}_i - \mathrm{X}_j)$$

et que le quotient de P est un polynôme symétrique.

c) Déterminer tous les polynômes antisymétriques $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ (c'est-à-dire tels que $\sigma \cdot \mathrm{P} = \varepsilon(\sigma)\mathrm{P}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$). Peut-on remplacer $\mathbb{Z}$ par un anneau commutatif unitaire quelconque ?

d) Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ tel que $\sigma \cdot \mathrm{P} = \mathrm{P}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{A}_n$. Montrer que l'orbite de P sous $\mathfrak{S}_n$ a au plus deux éléments. Que se passe-t-il si cet orbite est réduite à un point ?

e) On suppose que l'orbite de P sous $\mathfrak{S}_n$ a deux éléments P et Q. Que peut-on dire de $\mathrm{P} + \mathrm{Q}$ et $\mathrm{P} - \mathrm{Q}$? En déduire la forme des éléments de $\mathbb{Q}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]^{\mathfrak{A}_n}$. Peut-on remplacer $\mathbb{Z}$ par un anneau commutatif unitaire quelconque ?

f) Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{P}(n)$. On pose

$$a_\lambda = \det([{\mathrm{X}_i}^{\lambda_j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}) \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]\,.$$

Montrer que a_λ est un polynôme antisymétrique homogène de degré $|\lambda|$. Que dire de a_λ si $\lambda \in \mathscr{P}(n) \smallsetminus \mathscr{P}_+(n)$?

g) Factoriser a_ρ.

h) Pour $k \in [\![0\,,\, n-1]\!]$. On note $\rho_k = (n, n-1, \ldots, k+2, k+1, k-1, k-2, \ldots, 1, 0) \in \mathscr{P}_+(n)$. Calculer a_{ρ_k}.

i) Montrer que la famille $(a_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{P}_+(n)}$ est une $\mathbb{Z}$-base du groupe abélien des polynômes antisymétriques.

j) Soit $\lambda \in \mathscr{P}(n)$. Montrer que a_λ / a_ρ est un polynôme symétrique.

k) Soit $\lambda \in \mathscr{P}(n)$. On dit que $s_\lambda = a_{\rho+\lambda}/a_\rho$ est la *fonction de Schur associée à la partition* λ. Montrer que les fonctions de Schur forment une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]^{\mathfrak{S}_n}$.

Exercice 13 – Somme de Newton.

a) Soient k un corps de caractéristique nulle, $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(k)$ telle que $\mathrm{tr}\,(\mathrm{A}^i) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{B}^i)$ pour tout $i \in [\![1\,,\, n]\!]$. Montrer que A et B ont même polynôme caractéristique.

b) Soient k un corps de caractéristique nulle, $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(k)$ tel que $\mathrm{tr}\,(\mathrm{A}^i) = 0$ pour tout $i \in [\![1\,,\, n]\!]$. Montrer que A est nilpotente.

c) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{tr}\,(\mathrm{A}^i) = 0$ pour tout $i \in [\![1\,,\, n-1]\!]$. Montrer que A est nilpotente ou diagonalisable.