Autour des groupes de réflexions
Cours : Michel Broué
TD : Vincent Beck

Master 2 — Mathématiques fondamentales
Université Paris VII — Denis Diderot
Année 2005—2006

Groupes de réflexions complexes

Exercice 1 — Produit en couronne. Soient A et B deux ensembles et G (resp. H) un sous-groupe de $\mathfrak{S}(\mathrm{A})$ (resp. $\mathfrak{S}(\mathrm{B})$). On définit le produit en couronne de G par H que l'on note $\mathrm{G} \wr \mathrm{H}$ comme l'ensemble des applications de la forme

$$\theta\colon \begin{cases} \mathrm{A} \times \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{A} \times \mathrm{B} \\ (a, b) \longmapsto (\gamma_b(a), \eta(b)) \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \eta \in \mathrm{H} \quad \text{et} \quad \gamma_b \in \mathrm{G}\,.$$

a) Montrer que $\mathrm{G} \wr \mathrm{H}$ est un groupe.

b) Montrer que $\mathrm{G} \wr \mathrm{H} = \mathrm{G}^{\mathrm{B}} \rtimes \mathrm{H}$.

c) Soient C un ensemble et K un sous-groupe de $\mathfrak{S}(\mathrm{C})$. Montrer l'associativité du produit en couronne :

$$(\mathrm{G} \wr \mathrm{H}) \wr \mathrm{K} = \mathrm{G} \wr (\mathrm{H} \wr \mathrm{K})\,.$$

Exercice 2 — Produit en couronne : application aux groupes de Sylow du groupe symétrique. Soient $n \in \mathbb{N}$, p un nombre premier et $n = a_0 p^u + a_1 p^{u-1} + \cdots + a_u$ l'écriture de n en base p (c'est-à-dire $a_i \in [\![0\,, p-1]\!]$).

a) Montrer que le cardinal d'un p-Sylow de $\mathfrak{S}_n$ est p^{M_n} avec

$$\mathrm{M}_n = \mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n}{p^2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n}{p^3}\right) + \cdots = a_0 \frac{p^u - 1}{p-1} + a_1 \frac{p^{u-1} - 1}{p-1} + \cdots + a_{u-1} = a_0 \mathrm{M}_{p^u} + \cdots + a_{u-1}\mathrm{M}_p\,.$$

b) En déduire la structure d'un p-Sylow de $\mathfrak{S}_n$ en fonction de celles des p-Sylow de $\mathfrak{S}_{p^j}$.

c) Montrer que $\mathrm{M}_{p^{r+1}} = p\mathrm{M}_{p^r} + 1$.

d) Montrer que les p-Sylow de $\mathfrak{S}_{p^r}$ sont des produits en couronne.

Exercice 3 — Décomposition en produit : étude des groupes de réflexions non irréductibles. Soit G un groupe de réflexions complexes agissant sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie et considérons une décomposition de V en somme directe de G-modules

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}^{\mathrm{G}} \oplus \mathrm{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_\ell \qquad (*)$$

où V_i est un G-module irréductible non trivial.

a) Soient $g \in \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ une pseudoréflexion d'ordre d, ξ une racine d-ième de l'unité. On note $\mathrm{W}_\lambda = \mathrm{Ker}\,(g - \lambda \mathrm{id})$. Soit F un sous-espace de V. Montrer que F est stable par G si et seulement si F contient W_ξ ou est contenu dans W_1.

b) Soient $g \in \mathrm{G}$ une pseudoréflexion d'ordre d, ξ une racine d-ième de l'unité et $v \in \mathrm{V}$ un vecteur propre de g pour la valeur propre ξ. Montrer qu'il existe un unique $i \in [\![1\,, \ell]\!]$ tel que $v \in \mathrm{V}_i$ et que pour $j \neq i$, le sous-espace V_j est formé de points fixes pour g.

c) Pour $i \in [\![1\,, \ell]\!]$, on note R_i l'ensemble des pseudoréflexions de G dont les vecteurs propres non triviaux sont dans V_i et R l'ensemble des réflexions de G. Montrer que les R_i forment une partition de R.

d) Montrer que dans une décomposition comme $(*)$, les V_i ne sont pas des G-modules isomorphes. En déduire qu'une telle décomposition est unique. Montrer que G se décompose alors en $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \times \cdots \times \mathrm{G}_\ell$ où G_i agit sur V_i comme un groupe de réflexion irréductible et trivialement sur les autres facteurs.

e) Soit n_{G} le nombre minimal de réflexions nécessaires pour engendrer G. Montrer que $n_{\mathrm{G}} \geqslant \dim \mathrm{V}/\mathrm{V}^{\mathrm{G}}$ et que $n_{\mathrm{G}} = n_{\mathrm{G}_1} + \cdots + n_{\mathrm{G}_\ell}$. On dit que G est bien engendré si $n_{\mathrm{G}} = \dim(\mathrm{V}/\mathrm{V}^{\mathrm{G}})$. Montrer que G est bien engendré si et seulement si tous les G_i le sont.

f) Montrer que le centralisateur $\mathcal{C}$ de G dans $\mathrm{GL}(\mathrm{V})$ vérifie $\mathcal{C} = \mathrm{GL}(\mathrm{V}^{\mathrm{G}}) \times \mathbb{C}^\times \mathrm{id}_{\mathrm{V}_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^\times \mathrm{id}_{\mathrm{V}_\ell}$ et que le normalisateur $\mathcal{N}$ de G dans $\mathrm{GL}(\mathrm{V})$ vérifie $\mathcal{N} = \mathrm{GL}(\mathrm{V}^{\mathrm{G}}) \times \mathcal{N}_{\mathrm{GL}(\mathrm{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_\ell)}(\mathrm{G}_1 \times \cdots \times \mathrm{G}_\ell)$.

g) Montrer que tout élément unipotent γ de $\mathcal{N}$ est un élément unipotent de $\mathrm{GL}(\mathrm{V}^{\mathrm{G}})$, en particulier γ commute à tout élément de G.

Exercice 4 — Les groupes $\mathrm{G}(de, e, r)$. Pour $d, e, r \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathrm{D}(de, e, r) = \Big\{ \mathrm{diag}\,(\xi_1, \ldots, x_r) \in \mathrm{M}_r(\mathbb{C}), \qquad (\xi_1 \cdots \xi_r)^d = 1, \qquad \forall\, i \in [\![1\,,\, r]\!], \quad {\xi_i}^{de} = 1 \Big\},$$

et P_σ désigne la matrice de permutation associée à $\sigma \in \mathfrak{S}_r$. On rappelle que le groupe $\mathrm{G}(de, e, r)$ désigne l'ensemble des matrices monomiales dont les coefficients non nuls sont des racines de-ième de l'unité dont le produit est une racine d-ième de l'unité. Enfin, on identifie $\mathfrak{S}_r$ au sous-groupe de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ formé des matrices de permutation.

a) Soient $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{\times n}$. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} & & & a_n \\ a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_{n-1} & \end{bmatrix}$$

b) Soient $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_r$. Calculer $\mathrm{P}_\sigma \mathrm{A} {\mathrm{P}_\sigma}^{-1}$.

c) Quand a-t-on $\mathrm{G}(de, e, r) \subset \mathrm{G}(d'e', e', r)$?

d) Montrer que $\mathrm{G}(de, e, r)$ est un produit semi-direct de $\mathfrak{S}_r$ et $\mathrm{D}(de, e, r)$. En déduire le cardinal de $\mathrm{G}(de, e, r)$.

e) Chercher les réflexions du groupe $\mathrm{G}(de, e, r)$, déterminer leur couple racine-coracine et leur ordre. Déterminer les classes de conjugaison de l'ensemble des hyperplans et celle de l'ensemble des réflexions.

f) Pour quels d, e, r, le groupe $\mathrm{G}(de, e, r)$ est-il irréductible ?

g) Calculer $(\mathbb{C}^r)^{\mathrm{G}(de,e,r)}$ et trouver un système générateur formé de réflexions de cardinal minimal. En déduire les valeurs de d, e, r pour lesquelles $\mathrm{G}(de, e, r)$ est bien engendré puis que $\mathrm{G}(de, e, r)$ contient un sous-groupe de réflexions bien engendré (irréductible si $\mathrm{G}(de, e, r)$ l'est).

h) Quels matrices commutent avec toutes les matrices de permutation ? En déduire le centre de $\mathrm{G}(de, e, r)$.

i) Pour quels d, e, r, le groupe $\mathrm{G}(de, e, r)$ est-il abélien ?

j) Calculer le groupe dérivé de $\mathrm{G}(de, e, r)$.

k) Montrer que $\mathrm{G}(d, 1, r)$ est un produit en couronne de C_d le groupe cyclique d'ordre d et $\mathfrak{S}_r$.

l) Quand a-t-on $\mathrm{G}(de, e, r) \overset{\text{gr.}}{\simeq} \mathrm{G}(d'e', e', r')$?

m) Trouver une famille d'invariants fondamentaux pour le groupe $\mathrm{G}(de, e, r)$. En déduire les degrés de $\mathrm{G}(de, e, r)$.

n) Pour quels d, e, r, le groupe $\mathrm{G}(de, e, r)$ est-il un groupe de Coxeter ?

Exercice 5 — $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$. On rappelle que $\mathrm{G}_1 = \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_2)$ est un groupe simple.

a) Quel est le cardinal de G_1 ? Et le nombre d'éléments d'ordre 2 dans G_1 ?

Dans les questions **b** et **c**, H désigne un groupe simple fini non commutatif.

b) Soit $\rho : \mathrm{H} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ une représentation linéaire de dimension finie. Montrer que $\rho(\mathrm{H}) \subset \mathrm{SL}(\mathrm{V})$.

c) Montrer que H n'admet pas de représentation irréductible sur $\mathbb{C}$ de dimension 2.

d) Déterminer les degrés des représentations irréductibles sur $\mathbb{C}$ de G_1.

e) Soient $\rho : \mathrm{G}_1 \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ une représentation irréductible de G_1 de dimension 3 et $y \in \mathrm{G}_1$ d'ordre 2. Montrer que $\mathrm{tr}\,(\rho(y)) = -1$ et que $-\rho(y)$ est une réflexion.

f) Soit $\mathrm{G} = \langle -\rho(y), \quad y \in \mathrm{G}_1 \text{ d'ordre } 2 \rangle$. Montrer que $\mathrm{G} = \rho(\mathrm{G}_1) \times \{-1, 1\}$. Déterminer le nombre de réflexions de G.

g) Déterminer les degrés caractéristiques de G. En déduire que G n'est pas un groupe de Coxeter.

h) Montrer que G est primitif. En déduire que $\mathrm{G} = \mathrm{G}_{24}$.