Autour des groupes de réflexions
Cours : Michel Broué
TD : Vincent Beck

Master 2 — Mathématiques fondamentales
Université Paris VII — Denis Diderot
Année 2005—2006

Théorème de Stanley —Théorème de Steinberg
Représentations de MacDonald —Théorème de Gutkin

Exercice 1 — Réflexions qui commutent dans un groupe fini. Soient k un corps, V un k-espace vectoriel de dimension finie et $s, s' \in \mathrm{GL(V)}$ deux réflexions. On note (H, D) (resp. $(\mathrm{H}', \mathrm{D}')$) le couple hyperplan-droite associé à s (resp. s'). On suppose que $|\langle s, s'\rangle|$ est fini et $\mathrm{car}\, k \nmid |\langle s, s'\rangle|$.

Montrer que s et s' commutent si et seulement si $\mathrm{H} = \mathrm{H}'$ ou $\mathrm{D} = \mathrm{D}'$ ou $\mathrm{D} \subset \mathrm{H}'$ ou $\mathrm{D}' \subset \mathrm{H}$.

Exercice 2 — Théorème de Stanley. Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathrm{G} \subset \mathrm{GL(V)}$ un groupe de réflexions complexes. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des réflexions de G et $\mathscr{H}$ l'ensemble des hyperplans des réflexions de G. Pour $\mathrm{H} \in \mathscr{H}$, on considère $\alpha_{\mathrm{H}} \in \mathrm{V}^*$ une forme linéaire de noyau H. Pour $\mathcal{O} \in \mathscr{H}/\mathrm{G}$, on note $\mathrm{Q}_{\mathcal{O}} = \prod_{\mathrm{H} \in \mathcal{O}} \alpha_{\mathrm{H}} \in \mathrm{S(V^*)}$.

a) Montrer que $\mathrm{G_H} = \mathrm{Fix_G(H)} = \{g \in \mathrm{G}, \quad \forall x \in \mathrm{H}, \quad gx = x\}$ est un sous-groupe cyclique de G. On note $e_{\mathrm{H}} = |\mathrm{G_H}|$. Montrer que det réalise un isomorphisme de groupe entre $\mathrm{G_H}$ et $\mathbb{U}_{e_{\mathrm{H}}}$.

On note s_{H} le générateur de $\mathrm{G_H}$ de déterminant $\exp(2i\pi/e_{\mathrm{H}})$;

b) Montrer que la fonction $\mathrm{H} \mapsto e_{\mathrm{H}}$ est constante sur les orbites de l'action de G sur $\mathscr{H}$. Pour $\mathcal{O} \in \mathscr{H}/\mathrm{G}$, on note $e_{\mathcal{O}}$ la valeur commune des e_{H} pour $\mathrm{H} \in \mathcal{O}$.

c) Soient $s \in \mathscr{S}$ et $\mathrm{H} \in \mathscr{H}$. Déterminer l'orbite de H sous $\langle s \rangle$.

d) Soient $\mathrm{H} \in \mathscr{H}$ et $s \in \mathscr{S}$ une réflexion d'hyperplan H. On note D la droite de s. Calculer $s\alpha_{\mathrm{H}}$ et $s\alpha$ pour $\alpha \in \mathrm{V}^*$ une forme linéaire dont le noyau contient D.

e) Soit $s \in \mathscr{S}$. Montrer que $s\mathrm{Q}_{\mathcal{O}} = \det^{-1}(s)\mathrm{Q}_{\mathcal{O}}$ si l'hyperplan de s appartient à $\mathcal{O}$ et que $s\mathrm{Q}_{\mathcal{O}} = \mathrm{Q}_{\mathcal{O}}$ sinon.

f) Montrer que, pour toute famille d'entiers $(a_{\mathcal{O}})_{\mathcal{O} \in \mathscr{H}/\mathrm{G}}$ vérifiant $0 \leqslant a_{\mathcal{O}} < e_{\mathcal{O}}$, il existe un unique caractère linéaire χ de G (c'est-à-dire une représentation de dimension 1 de G) telle que $\chi(s) = \det(s)^{-a_{\mathcal{O}}}$ pour tout $s \in \mathscr{S}$ dont l'hyperplan appartient à $\mathcal{O}$.

g) Montrer que, pour tout caractère linéaire χ de G, il existe une unique famille d'entiers $(a_{\mathcal{O}})_{\mathcal{O} \in \mathscr{H}/\mathrm{G}}$ vérifiant $0 \leqslant a_{\mathcal{O}} < e_{\mathcal{O}}$ et $\chi(s) = \det(s)^{-a_{\mathcal{O}}}$ pour tout $s \in \mathscr{S}$ dont l'hyperplan appartient à $\mathcal{O}$.

h) Soient $\mathrm{P} \in \mathrm{S(V^*)}$, $s \in \mathrm{GL(V)}$ une réflexion d'hyperplan H et d'ordre e et α une forme linéaire de noyau H. On considère $i \in [\![0\,,\, e-1]\!]$. Montrer que si $s\mathrm{P} = \det s^{-i}\mathrm{P}$ alors P est divisible par α^i.

i) Déterminer la composante χ-isotypique $\mathrm{S(V^*)}^{\chi}$ de $\mathrm{S(V^*)}$ pour le caractère χ de la question **d**.

Exercice 3 — Un tout petit peu de théorie des graphes. Soit Δ un graphe connexe fini. Montrer qu'il existe un sommet u de Δ tel que $\Delta \smallsetminus \{u\}$ soit connexe.

Exercice 4 — Algèbre extérieure. Soient k un corps (algébriquement clos) et V un k-espace vectoriel de dimension finie ℓ et W un sous-espace vectoriel de V de codimension 1.

a) Soit $\varphi \in \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$. On note $\Lambda^i(\varphi)$ l'endomorphisme de $\Lambda^i(\mathrm{V})$ induit par φ. Montrer que

$$\sum_{i=0}^{\ell} \mathrm{tr}\,(\Lambda^i(\varphi))\mathrm{X}^i = \det(1 + \varphi\mathrm{X})\,.$$

b) Soit $e \in \mathrm{V} \smallsetminus \mathrm{W}$. Montrer que l'application

$$\Phi_e : \begin{cases} \Lambda^i(\mathrm{W}) \oplus \Lambda^{i-1}(\mathrm{W}) & \longrightarrow \Lambda^i(\mathrm{V}) \\ \qquad (a, b) & \longmapsto a + b \wedge e \end{cases}$$

est un isomorphisme.

c) Soit G un groupe. On suppose que V un G-module, que W un sous-G-module de V et que W admet un supplémentaire G-stable isomorphe au G-module trivial. Montrer qu'il existe $e \in \mathrm{V} \smallsetminus \mathrm{W}$ tel que Φ_e soit un G-isomorphisme.

Exercice 5 — Théorème de Steinberg. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $\ell \in \mathbb{N}$ muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère $(e_1, \ldots, e_\ell)$ une base de V formée de vecteurs unitaires et s_i une réflexion unitaire de vecteur e_i (et donc d'hyperplan $\mathrm{H}_i = {e_i}^\perp$). On pose $\mathrm{G} = \langle s_1, \ldots, s_\ell \rangle \subset \mathrm{GL}(\mathrm{V})$. On définit le graphe Γ dont les sommets sont les entiers $i \in [\![1 \,,\, \ell]\!]$ et les arêtes sont $\{i, j\}$ tel que $\langle e_i, e_j \rangle \neq 0$.

a) Montrer que $\mathrm{V}' = \mathrm{vect}\,(e_1, \ldots, e_{\ell-1})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel hermitien de dimension $\ell - 1$, stable par $\mathrm{G}' = \langle s_1, \ldots, s_{\ell-1} \rangle$ et que pour $i \in [\![1 \,,\, \ell]\!]$, les s_i agissent sur V' comme des réflexions unitaires. Montrer que V' admet un supplémentaire G'-stable isomorphe au G'-module trivial.

b) Montrer que $\Lambda^i(\mathrm{V})^{\mathrm{G}} = \{0\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. On pourra raisonner par récurrence sur ℓ.

On note $\det_{\mathrm{G}}$ (resp. $\det_{\mathrm{G}'}$) le caractère linéaire de G (resp. G') donné par le déterminant et $\Lambda^i(\mathrm{V})^{\det}$ la composante det-isotypique de $\Lambda^i(\mathrm{V})$.

c) Montrer que $\Lambda^{\ell-1}(\mathrm{V}')^{\det_{\mathrm{G}}} = \{0\}$.

d) On note det le caractère linéaire de G donné par le déterminant Montrer que $\Lambda^i(\mathrm{V})^{\det} = \{0\}$ pour tout $i \in \mathbb{N} \smallsetminus \{\ell\}$.

e) Soient $i, j \in [\![0 \,,\, \ell]\!]$, montrer que si $i \neq j$ alors $\Lambda^i(\mathrm{V})$ et $\Lambda^j(\mathrm{V})$ ne sont pas G-isomorphes.

f) Montrer que V est un G-module irréductible si et seulement si Γ connexe et non vide.

On suppose pour la question **g** que G est fini.

g) Soit $u \in \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$, montrer que

$$\sum_{g \in \mathrm{G}} \det(1 - ug) = |\mathrm{G}| \qquad \text{et} \qquad \sum_{g \in \mathrm{G}} \det(u - g) = |\mathrm{G}| \det u \,.$$

Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que ug n'ait pas de point fixe non nul.

L'objectif des questions **h**, **i**, **j** et **k** est de montrer par récurrence sur $\dim(\mathrm{V})$ que si V est un G-module irréductible alors $\Lambda^i(\mathrm{V})$ est un G-module irréductible pour $i \in [\![0 \,,\, \ell]\!]$.

h) Montrer que si V est de dimension 1 alors $k = \Lambda^0(\mathrm{V})$ et $\mathrm{V} = \Lambda^1(\mathrm{V})$ ne sont pas isomorphes.

On suppose à présent que le résultat est vrai pour un espace de dimension $\ell - 1$ avec $\ell \geqslant 2$. Soit j tel que $\Gamma \smallsetminus \{j\}$ soit connexe (voir exercice 3). Quitte à permuter les sommets du graphe, on suppose pour la commodité des notations que $j = \ell$. Soient $e \in \mathrm{V} \smallsetminus \mathrm{V}'$ unitaire tel que Φ_e réalise un isomorphisme (question **c** de l'exercice 4 et question **a**) et M un sous-G-module de $\Lambda^i(\mathrm{V})$.

i) Montrer que $\mathrm{M} = (\mathrm{M} \cap \Lambda^i(\mathrm{V}')) \oplus (\mathrm{M} \cap \Phi_e(\Lambda^{i-1}(\mathrm{V}')))$. En déduire que $\mathrm{M} \in \big\{\{0\}\,, \Lambda^i(\mathrm{V}'), \Phi_e(\Lambda^{i-1}(\mathrm{V}')), \Lambda^i(\mathrm{V})\big\}$.

j) Soit $1 \leqslant i \leqslant \ell - 1$. Montrer que $\Lambda^i(\mathrm{V}')$ et $\Phi_e(\Lambda^{i-1}(\mathrm{V}'))$ ne sont pas stables par G.

k) Conclure.

l) Montrer que le résultat s'applique lorsque G est un groupe de réflexion complexe bien engendré et non trivial. Étendre le résultat lorsque G n'est plus bien engendré.

Exercice 6 — Représentations de MacDonald. Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathrm{G} \subset \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ un groupe de réflexions complexes, $\mathrm{G}' \subset \mathrm{G}$ un sous-groupe de réflexions et χ un caractère linéaire de G'. On note Q_χ un polynôme tel que $\mathrm{S}(\mathrm{V}^*)^\chi = \mathrm{S}(\mathrm{V}^*)^{\mathrm{G}'}\mathrm{Q}_\chi$ (question **i** exercice 2), V_χ le sous-G-module de $\mathrm{S}(\mathrm{V}^*)$ engendré par Q_χ et e_χ le degré de Q_χ.

a) Montrer que le caractère linéaire χ intervient avec multiplicité 1 dans $\mathrm{S}_{e_\chi}(\mathrm{V}^*)$ et n'intervient pas dans $\mathrm{S}_n(\mathrm{V}^*)$ pour $n < e_\chi$.

b) Montrer que $\mathrm{V}_\chi \subset \mathrm{S}_{e_\chi}(\mathrm{V}^*)$.

c) Soit M_1 un sous-G-module de V_χ et M_2 un supplémentaire G-stable de M_1. On décompose $\mathrm{Q}_\chi = \mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2$ avec $\mathrm{Q}_i \in \mathrm{M}_i$ pour $i = 1, 2$. Montrer que $\mathrm{Q}_i \in \mathrm{S}(\mathrm{V}^*)^\chi$.

d) En déduire que V_χ est irréductible.

e) Montrer que la représentation V_χ apparait avec multiplicité 1 dans S_{e_χ} et n'apparaît pas dans $\mathrm{S}_n(\mathrm{V}^*)$ pour $n < e_\chi$.

Exercice 7 — Théorème de Gutkin. Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ℓ et $\mathrm{G} \subset \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ un groupe de réflexions complexes. On note $\mathscr{S}_{\mathrm{G}}$ l'ensemble des réflexions de G et $\mathscr{H}_{\mathrm{G}}$ l'ensemble des hyperplans des réflexions de G. Pour $\mathrm{H} \in \mathscr{H}$, on définit $\mathrm{G}_{\mathrm{H}} = \mathrm{Fix}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \{g \in \mathrm{G}, \quad \forall\, x \in \mathrm{H}, \quad gx = x\}$. C'est un sous-groupe cyclique de G. On note $e_{\mathrm{H}} = |\mathrm{G}_{\mathrm{H}}|$ et s_{H} le générateur de G_{H} de déterminant $\exp(2i\pi/e_{\mathrm{H}})$. Les caractères

irréductibles de $\mathrm{G_H}$ sont donnés par $\det^j$ pour $j \in [\![0\,,\, e_\mathrm{H} - 1]\!]$. Soit M un G-module de caractère χ de degré r, $f_\chi \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ le degré fantôme de M et $m_{\chi,1}, \ldots, m_{\chi,r}$ les exposants de M. On définit le M-exposant de G comme

$$m(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{r} m_{\chi,i}.$$

On rappelle que
$$f_\chi = |\mathrm{G}|^{-1} \prod_{i=1}^{\ell} (1 - \mathrm{X}^{d_i}) \sum_{g \in \mathrm{G}} \frac{\chi(g)}{\det(1 - g\mathrm{X})}\,.$$

a) Montrer que $m(\mathrm{M}) = {f_\chi}'(1)$.

b) En déduire que $m(\mathrm{M}) = \chi(1)\dfrac{|\mathscr{S}_\mathrm{G}|}{2} - \displaystyle\sum_{s \in \mathscr{S}_\mathrm{G}} \frac{\chi(s)}{1 - \det s}\,.$

c) Montrer que $m(\mathrm{M}) = \displaystyle\sum_{\mathrm{H} \in \mathscr{H}} m(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G_H}}(\chi))$.

d) Simplifier les expressions

$$\sum_{s \in \mathscr{S}_\mathrm{G}} \frac{\det(s^{-1})}{1 - \det s}, \qquad \sum_{s \in \mathscr{S}_\mathrm{G}} \frac{\det s}{1 - \det s} \qquad \text{et} \qquad \sum_{s \in \mathscr{S}_\mathrm{G}} \frac{1}{1 - \det s}\,.$$

e) Calculer $m(\mathrm{V})$, $m(\Lambda^\ell(\mathrm{V}))$, $m(\mathrm{V}^*)$ et $m(\Lambda^\ell(\mathrm{V}^*))$.

f) Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et ζ une racine d-ième primitive de l'unité. Montrer que, pour $j \in [\![0\,,\, d-1]\!]$, on a

$$\sum_{n=1}^{d-1} \frac{\zeta^{-nj}}{1 - \zeta^n} = \frac{d-1}{2} - j\,.$$

Pour $j \in [\![0\,,\, e_\mathrm{H} - 1]\!]$, on note $n_{j,\mathrm{H}}$ la multiplicité de $\det^{-j}$ dans $\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G_H}}(\chi)$. C'est aussi la multiplicité de la valeur propre $\exp(2ij\pi/e_\mathrm{H})$ de l'endomorphisme de M^* associé à s_H.

g) Montrer que $m(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G_H}}(\chi)) = \displaystyle\sum_{j=0}^{e_\mathrm{H}-1} j\, n_{j,\mathrm{H}}$.

h) En déduire que $m(\Lambda^r(\mathrm{M})) \leqslant m(\mathrm{M})$.

i) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $m(\mathrm{M}) = m(\Lambda^r(\mathrm{M}))$.

j) Montrer que $m(\mathrm{M}) = m(\Lambda^r(\mathrm{M}))$ et $m(\mathrm{M}^*) = m(\Lambda^r(\mathrm{M}^*))$ si et seulement si s_H agit sur M comme l'identité ou une réflexion pour tout $\mathrm{H} \in \mathscr{H}$.