Vincent Beck

Autour du théorème d'inversion locale

Inégalité des accroissements finis.

Exercice 1 On rappelle l'inégalité des accroissements finis. Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et U un ouvert de E. Si $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ est différentiable alors pour tous $x, y \in \mathrm{U}$ tels que $[x, y] \subset \mathrm{U}$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \left(\sup_{v \in [x,y]} \|\mathrm{d}f(v)\| \right) \|x - y\| .$$

Si U est un ouvert **convexe** et $\|\mathrm{d}f(v)\| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $v \in \mathrm{U}$ alors

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \mathrm{M}\|x - y\| .$$

a) Montrer que le premier énoncé n'est plus vrai si on retire la condition $[x, y] \subset \mathrm{U}$.

b) Montrer que le deuxième énoncé n'est plus vrai si on retire la condition U convexe.

Inversion locale.

Exercice 2 – Exemples.

a) On considère l'application

$$\varphi \colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (\exp(2y) + \exp(2z), \exp(2x) - \exp(2z), x - y) . \end{cases}$$

Déterminer $\varphi(\mathbb{R}^3)$ et montrer que φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image.

b) On considère l'application

$$\mathrm{F} \colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (e^{x-y+2z} + e^{-x+y+2z}, e^{2x} + e^{2y} - 2\lambda e^{x-y}, e^{2x} + e^{2y} - 2e^{y-x}) . \end{cases}$$

Exprimer F en fonction de φ. En déduire que F est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image si $\lambda \geqslant 0$.

Exercice 3 – Inversion locale et polynôme. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ (resp. $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$) l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n - 1$ (resp. n) et

$$\mathrm{D}_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x_1 > \cdots > x_n\} .$$

a) Montrer que l'application

$$\varphi \colon \begin{cases} \mathrm{D}_n & \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}] \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - x_i) - \mathrm{X}^n . \end{cases}$$

est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\varphi(\mathbb{R}^n)$. En déduire que l'ensemble des polynômes scindées à racines simples de degré n est un ouvert de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

b) Montrer que l'application φ s'identifie à l'application

$$\begin{cases} \mathrm{D}_n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto (\sigma_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \sigma_n(x_1, \ldots, x_n)) . \end{cases}$$

où σ_i est le i^{e} polynôme symétrique élémentaire.

c) Que se passe-t-il si on remplace D_n par $\mathbb{R}^n$?

Exercice 4 — Inversion locale et matrice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles, $\mathcal{S}_n$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

a) Soient $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un voisinage V de I_n tel que, pour tout $\mathrm{B} \in \mathrm{V}$, il existe une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^k = \mathrm{B}$.

b) Montrer qu'il existe un voisinage V de I_n tel que, pour tout $\mathrm{B} \in \mathrm{V}$, il existe une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\exp(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$.

c) Soit A_0 une matrice symétrique inversible. On considère l'application

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{S}_n \\ \mathrm{M} & \longmapsto {}^t\mathrm{M}\,\mathrm{A}_0\mathrm{M}\,. \end{cases}$$

Montrer qu'elle est différentiable et calculer sa différentielle en I. Montrer que $\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{I}}$ est surjective et calculer son noyau.

d) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de A_0 dans $\mathcal{S}_n$ et une application $\psi : \mathcal{S}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que $\mathrm{A} = {}^t\psi(\mathrm{A})\,\mathrm{A}_0\psi(\mathrm{A})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{V}$.

e) En déduire que l'ensemble des formes quadratiques de signature (p, q) avec $p+q = n$ est un ouvert de l'espace vectoriel des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$.

f) Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n$. Montrer que, pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{++}$, il existe une unique matrice symétrique positive B telle que $\mathrm{A} = \mathrm{B}^2$. Montrer que B est définie positive. On pose $\mathrm{B} = \sqrt{\mathrm{A}}$.

g) Montrer que l'application

$$\begin{cases} \mathcal{S}_n^{++} & \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++} \\ \mathrm{A} & \longmapsto \sqrt{\mathrm{A}} \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 5 — Inversion locale et géométrie. On considère le plan euclidien $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathbb{R}^2$, on note $|\mathrm{MN}|$ la distance entre M et N. On pose $\mathrm{A} = (a, 0)$ et $\mathrm{B} = (-a, 0)$ et on définit les fonctions

$$\varphi_1\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{M} = (x, y) & \longmapsto |\mathrm{MA}|\,, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \varphi_2\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{M} = (x, y) & \longmapsto |\mathrm{MB}|\,, \end{cases}$$

et

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathrm{M} = (x, y) & \longmapsto (\varphi_1(\mathrm{M}), \varphi_2(\mathrm{M})) = (|\mathrm{MA}|\,, |\mathrm{MB}|)\,. \end{cases}$$

a) Faire un dessin.

b) En quels points φ est-elle différentiable ? Montrer qu'en ces points elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

c) Montrer que l'application φ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ sur $\varphi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ et déterminer $\varphi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$. Indication : on rappelle l'inégalité triangulaire

$$\forall\,(\mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}) \in (\mathbb{R}^2)^3, \qquad |\,|\mathrm{CE}| - |\mathrm{DE}|\,| \leqslant |\mathrm{CD}| \leqslant |\mathrm{CE}| + |\mathrm{ED}|\,.$$

d) Pour $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, on note

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \varphi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto (f \circ \varphi^{-1})(u, v)\,. \end{cases}$$

Montrer que $\displaystyle \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta \widehat{f} + \frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial \widehat{f}}{\partial u} + \frac{1}{\varphi_2}\frac{\partial \widehat{f}}{\partial v} + 2\frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right).$

e) Déterminer les fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $\Delta f = 0$ et $\widehat{f}$ soit de la forme $\widehat{f}(u, v) = \alpha(u) + \beta(v)$ pour tout $(u, v) \in \varphi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ où α, β sont des fonctions $\mathscr{C}^2$.

Inversion globale.

Exercice 6 — Théorème d'inversion globale. Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ une application. On dit que f est une application ouverte si pour tout ouvert V contenu dans U alors $f(\mathrm{V})$ est ouvert.

a) Dans cette question, on suppose que $f(\mathrm{U})$ est un ouvert de F et que $f : \mathrm{U} \to f(\mathrm{U})$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme avec $k \geqslant 1$. Montrer que f est injective, ouverte et que $\mathrm{d}f_x$ est une bijection pour tout $x \in \mathrm{U}$. Montrer que pour tout V, l'application $f : \mathrm{V} \to f(\mathrm{V})$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme.

b) Dans cette question, on suppose que, pour tout $x \in \mathrm{U}$, il existe un ouvert U_x contenant x tel que l'application $f_{|\mathrm{U}_x}$ soit ouverte. Montrer que f est ouverte.

c) Montrer que f est continue si et seulement si $f^{-1}(\mathrm{V})$ est ouvert pour tout ouvert V de F.

d) Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathrm{d}f_x$ est inversible pour tout $x \in \mathrm{U}$. Montrer que f est une application ouverte.

e) Théorème d'inversion globale. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^k$, injective et que $\mathrm{d}f_x$ est inversible pour tout $x \in \mathrm{U}$. Montrer que f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de U sur $f(\mathrm{U})$.

Exercice 7 — Inversion globale et fonction dilatante. Soient $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé (de dimension finie) et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$. On dit que f est dilatante si et seulement si

$$\exists\, k > 0, \quad \forall\, (x, y) \in \mathrm{E}^2, \qquad \|f(x) - f(y)\| \geqslant k\|x - y\|\,.$$

a) On suppose que f est $\mathscr{C}^1$. Montrer que si f est dilatante alors

$$\exists\, k > 0, \quad \forall\, (x, h) \in \mathrm{E}^2, \qquad \|\mathrm{d}f_x(h)\| \geqslant k\|h\|\,.$$

b) On suppose que f est $\mathscr{C}^1$ et dilatante. Montrer que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de E sur lui-même.

Exercice 8 — Inversion globale et fonction contractante. Soient $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On note aussi $\|\cdot\|$ la norme sur $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathrm{E})$ subordonnée à $\|\cdot\|$ et on pose $\varphi = f - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$

a) On suppose que $\|\mathrm{d}\varphi_x\| < 1$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Montrer que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur son image.

b) Soit $g : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$. Montrer que g est k-lipschitzienne si et seulement si $\|\mathrm{d}g(x)\| \leqslant k$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

c) On suppose que l'application $\varphi = f - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ est k-lipschitzienne avec $k < 1$. Montrer que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de E sur lui-même. On pourra utiliser le théorème du point fixe à une fonction convenablement choisie.

d) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $|g'(t)| \leqslant k < 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que les applications

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x + g(y), y + g(x)) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (y + g(x), x + g(y)) \end{cases}$$

sont des $\mathscr{C}^1$-difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

e) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x + a\sin(y), y + b\sin(x)) \end{cases}$$

soit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image, de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Exercice 9 — Inversion globale et fonction réelle. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On considère l'application

$$\mathrm{F} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x + y, f(x) + g(y))\,. \end{cases}$$

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$.

b) On suppose la condition précédente vérifiée. Montrer que F est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image.

c) On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $f'(x) \geqslant k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même. On suppose de plus que g est bornée et que la condition de la question **a** est vérifiée. Montrer que F est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Un premier pas vers la géométrie.

Exercice 10 – Lemme de Morse en dimension 2. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant 0 et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^3$. On suppose que $f(0) = 0$ et $\mathrm{d}f(0) = 0$.

a) En adaptant la méthode de Gauss de réduction des formes quadratiques, montrer qu'on peut écrire dans un voisinage de l'origine

$$f(x, y) = \varepsilon_1 u(x, y)^2 + \varepsilon_2 v(x, y)^2 \qquad \text{avec} \quad \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$$

et $\varphi : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine tel que $\varphi(0) = 0$. Indication : partir de l'expression de f donnée par le lemme d'Hadamard (feuille 1, exercice 11 question **b**).

b) Dessiner les lignes de niveau de f.

Exercice 11 – Lemme de Morse. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^3$. On suppose que $f(0) = 0$ et $\mathrm{d}f(0) = 0$ et $\mathrm{d}^2 f(0)$ non dégénérée. L'objectif de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier r et un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ entre deux voisinages ouverts de 0 tel que $\varphi(0) = 0$ et dans l'ouvert de définition de φ, on ait

$$f = {\varphi_1}^2 + \cdots + {\varphi_r}^2 - {\varphi_{r+1}}^2 - \cdots - {\varphi_n}^2 .$$

On partira de l'expression de f donnée par le lemme d'Hadamard (feuille 1, exercice 11 question **b**).

a) Soit $x \mapsto \mathrm{A}(x)$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $x \mapsto \mathrm{A}(x)(x)$ est différentiable et calculer sa différentielle en 0.

b) En déduire que l'application $\varphi : x \mapsto \mathrm{A}(x)(x)$ est un difféomorphisme local en 0 tel que $\varphi(0) = 0$ si et seulement si $\mathrm{A}(0)$ est inversible.

c) Conclure à l'aide de la question **d** de l'exercice 4.