Vincent Beck

Module sur un anneau principal

Exercice 1 — Bicommutant. Soit A un anneau principal. On note $\mathscr{P}$ un système de représentant de l'ensemble des nombres premiers de A.

a) Soient $a, b \in \mathrm{A}$. À quels conditions le quotient $a\mathrm{A}/b\mathrm{A}$ a-t-il un sens ? Déterminer a' tel que $a\mathrm{A}/b\mathrm{A} = \mathrm{A}/a'\mathrm{A}$.

b) Soient $a, b \in \mathrm{A}$. Montrer que l'ensemble $\mathrm{I}_{a,b} = \{c \in \mathrm{A}, \quad b \mid ac\}$ est un idéal de A qui contient $\langle b \rangle$. En déterminer un générateur en fonction des décompositions de a et b en nombres premiers.

c) Déterminer les facteurs invariants de $\mathrm{I}_{a,b}$ et de $\mathrm{I}_{a,b}/\langle b \rangle$. Cas particulier : $a = 0$, $b = 0$, $a \mid b$, $b \mid a$, a et b premier entre eux.

d) Soit $a, b \in \mathrm{A}$. Déterminer $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\langle a \rangle, \mathrm{A}/\langle b \rangle)$. Cas particulier : $a = 0$, $b = 0$, $a \mid b$, $b \mid a$, a et b premier entre eux.

e) Soit M un A-module de type fini. Déterminer $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$.

f) Déterminer le centre de $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$. En déduire l'ensemble des endomorphismes de groupe de M qui commutent avec tous les éléments de $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$.

g) Application. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Déterminer la dimension du commutant de u puis l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments qui commutent avec u.

Exercice 2 — Endomorphisme cyclique. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. On note $k[u]$ l'algèbre des polynômes en u et C_u le commutant de u ; π_u le polynôme minimal de u et χ_u le polynôme caractéristique (qu'on suppose unitaire).

a) Montrer que $k[u] = k[\mathrm{X}]/\pi_u$.

b) Déterminer $\dim \mathrm{C}_u$ en fonction des degrés des invariants de similitude de u (utiliser l'exercice précédent).

c) Montrer que $\dim k[u] \leqslant n \leqslant \dim \mathrm{C}_u$.

d) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes

- (i) $\dim k[u] = n$;
- (ii) $\deg \pi_u = n$;
- (iii) $\pi_u = \chi_u$;
- (iv) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice compagnon ;
- (v) Il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit libre ;
- (vi) Il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base ;
- (vii) Le $k[\mathrm{X}]$-module (E, u) est monogène ;
- $(viii)$ u n'admet qu'un seul invariant de similitude ;
- (ix) $\mathrm{C}_u = k[u]$;
- (x) $\dim \mathrm{C}_u = n$;
- (xi) C_u est de dimension minimal ;
- (xii) C_u est commutatif ;
- $(xiii)$ $k[u]$ est un élément maximal dans l'ensemble des sous-algèbre commutative de $\mathrm{End}_k(\mathrm{E})$;
- (xiv) L'application $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{Ker}\,\mathrm{P}(u)$ est une bijection entre l'ensemble des diviseurs unitaire de π_u et l'ensemble des sous-espaces stables par u ;
- (xv) L'application $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{Im}\,\mathrm{P}(u)$ est une bijection entre l'ensemble des diviseurs unitaire de π_u et l'ensemble des sous-espaces stables par u ;

  Si k est infini, les propositions précédentes sont équivalentes à
- (xvi) l'ensemble des sous-espaces stables par u est fini ;

  Si χ_u est scindé, les propositions précédentes sont équivalentes à chacune des deux suivantes
- $(xvii)$ les sous-espaces propres de u sont tous de dimension 1 ;
- $(xviii)$ $\mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{id}) \geqslant n - 1$ pour tout $\lambda \in k$.

Un endomorphisme vérifiant ces propriétés est dit cyclique.

Exercice 3 — Équation à coefficients dans un anneau principal. Soient A un anneau principal et $a_1, a_2, a_3 \in \mathrm{A} \smallsetminus \{0\}$. Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble H des solutions de l'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ d'inconnues (x_1, x_2, x_3).

a) Montrer qu'on peut supposer que a_1, a_2, a_3 sont premiers entre eux dans leur ensemble (ce qu'on fait).

Nature de l'ensemble des solutions.

b) Montrer que H est un sous-module libre de rang 2 de A^3.

On se ramène au cas où les a_i sont premiers entre eux deux à deux.

c) On définit $d_i = \operatorname{pgcd}(a_j, a_k)$ pour $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ distincts. Montrer que $d_id_j \mid a_k$ pour $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ distincts. On note a'_k le quotient de a_k par d_id_j.

d) Montrer que si $(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{H}$ alors $d_i \mid x_i$.

e) Montrer que l'application

$$\begin{cases} \mathrm{H} & \longrightarrow \mathrm{H}' \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto (x_1/d_1, x_2/d_2, x_3/d_3) \end{cases}$$

réalise une bijection de H sur l'ensemble H′ des solutions de l'équation $a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = 0$ d'inconnues (x_1, x_2, x_3).

f) Montrer que les a'_i sont premiers entre deux à deux.

Détermination de l'ensemble des solutions.

g) En déduire une base de H′.

h) Montrer que $h'_1 = (0, a'_3, -a'_2)$, $h'_2 = (-a'_3, 0, a'_1)$ et $h'_3 = (a'_2, -a'_1, 0)$ est un système générateur de H′. À quelles conditions sur (m_1, m_2, m_3) et (n_1, n_2, n_3), a-t-on $m_1h'_1 + m_2h'_2 + m_3h'_3 = n_1h'_1 + n_2h'_2 + n_3h'_3$?

Exemple.

i) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $5x + 7y + 35z = 0$.