Vincent Beck

Théorèmes de point fixe

Exercice 1 – Théorème de Picard, exemple et contre-exemple.

a) Montrer que le théorème de Picard n'est plus vrai si on ne suppose pas X complet.

b) Montrer que le théorème de Picard n'est plus vrai si on ne suppose pas l'application contractante (même avec l'inégalité $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{X}$). Donner un exemple où f n'a pas de point fixe et un exemple ou f a au moins 2 points fixes.

c) Montrer que le théorème de Picard n'est plus vrai si on ne suppose pas $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$. Si ôter cette hypothèse paraît absurde en théorie (pour avoir un point fixe x, il faut bien que $f(x)$ soit dans l'ensemble de départ), dans la pratique, il ne faut pas l'oublier. En effet, on est souvent confronté à la situation suivante : on dispose de $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$ et d'une partie X sur laquelle f est contractante (grâce par exemple à l'inégalité de la moyenne). Il s'agit alors pour obtenir un point fixe de vérifier que $f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$.

Exercice 2 – Version faible du théorème de Picard et applications.

a) Soient (X, d) un espace métrique complet non vide et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ une application (qu'on ne suppose pas continue). On suppose qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in [\,0\,,1\,[$ tels que $d(f^{\mathrm{N}}(x), f^{\mathrm{N}}(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{X}$ c'est-à-dire que f^{N} est une contraction. Montrer que f a un unique point fixe x_0 et que, pour tout $x \in \mathrm{X}$, la suite définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers x_0. Quelle est la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Applications. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} = [\,a\,,b\,]$ un intervalle compact. On considère une fonction $\mathrm{K} : \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et φ une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$.

b) On suppose que $(b - a)\|\mathrm{K}\|_\infty < 1$. Montrer qu'il existe une unique application continue $x : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ telle que

$$x(t) = \varphi(t) + \int_a^b \mathrm{K}(s, t)x(s)\mathrm{d}\,s\,. \tag{1}$$

L'équation (**1**) est appelée équation intégrale de Fredholm.

c) Que se passe-t-il lorsque K est constante ?

d) Montrer qu'il existe une unique fonction $x : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ telle que

$$x(t) = \varphi(t) + \int_a^t \mathrm{K}(s, t)x(s)\mathrm{d}\,s\,. \tag{2}$$

L'équation (**2**) est appelée équation intégrale de Volterra.

Exercice 3 – Point fixe à paramètres. Soient X un espace métrique complet non vide, Λ un espace topologique et $\mathrm{F} : \mathrm{X} \times \Lambda \to \mathrm{X}$ une application continue.

a) On suppose qu'il existe $\alpha \in [\,0\,,1\,[$ tel que $d(\mathrm{F}(x, \lambda), \mathrm{F}(y, \lambda)) \leqslant \alpha d(x, y)$ pour tout $x, y \in \mathrm{X}$ et $\lambda \in \Lambda$. Montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'équation $\mathrm{F}(x, \lambda) = x$ admet une unique solution notée x_λ. Montrer que l'application $\lambda \mapsto x_\lambda$ est continue.

b) **Application.** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que le système d'équation

$$(\mathscr{S}_t) \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\sin(x + y) + t - 1 \\ y = \dfrac{1}{2}\cos(x - y) - t + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

admet une unique solution (x_t, y_t) et que la fonction $t \mapsto (x_t, y_t)$ est continue (le théorème des fonctions implicites nous permettra d'obtenir des conditions de régularité plus fortes sur la fonction $t \mapsto (x_t, y_t)$).

Exercice 4 – Point fixe de Picard et approximation. Soit X un espace métrique complet et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ une application contractante de rapport α et de point fixe x_0. On fixe $\varepsilon > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X vérifiant $d(f(u_k), x_{u+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad d(u_n, x_0) \leqslant \alpha^n d(u_0, x_0) + \frac{\varepsilon}{1-\alpha}\,.$$

Exercice 5 — Inversion globale et point fixe.

a) Soit (Y, d) un espace métrique complet et $\mathrm{B} = \mathrm{B}(y_0, r)$ la boule ouverte de centre y_0 et de rayon r. On considère $f : \mathrm{B} \to \mathrm{Y}$ une application contractante de rapport $\alpha < 1$. Montrer que si $d(f(y_0), y_0) < (1-\alpha)r$ alors f a un point fixe (on pourra introduire la boule fermé de centre y_0 et de rayon $\varepsilon < r$ avec ε bien choisi qui est alors un espace complet).

Dans les questions qui suivent, on considère X un espace de Banach, U un ouvert de X et $\mathrm{F} : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ une application contractante (de constante α). Pour $x \in \mathrm{U}$, on pose $f(x) = x - \mathrm{F}(x)$.

b) Soient $x \in \mathrm{U}$ et $r > 0$ tels que $\mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{U}$. Montrer que $\mathrm{B}(f(x), (1-\alpha)r) \subset f(\mathrm{B}(x, r))$ (pour $y \in \mathrm{B}(f(x), (1-\alpha)r)$, on pourra introduire la fonction $\mathrm{G} : u \mapsto \mathrm{F}(u) + y$ et utiliser la question **a**).

c) Montrer que si V est un ouvert de U alors $f(\mathrm{V})$ est ouvert.

d) Montrer que f est un homéomorphisme de U sur $f(\mathrm{U})$.

e) On suppose que $\mathrm{U} = \mathrm{X}$. Montrer que $f(\mathrm{U}) = \mathrm{X}$ et que f est un homéomorphisme de X sur lui-même.

Exercice 6 — Point fixe et compacité. Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ tel que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{X}$.

a) Montrer que f a un unique point fixe.

b) Pour tout $x \in \mathrm{X}$, montrer que la suite définie par $u_0 = x$ et $u_n = f(u_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$ converge vers le point fixe de f.

c) Montrer que dans la question **a**, on peut remplacer l'hypothèse (X, d) compact par (X, d) complet et il existe x_0 tel que la suite $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

Exercice 7 — Suite de points fixes. Soient (X, d) un espace métrique complet et $f_n : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ une suite de fonctions continues. On suppose que f_n admet un point fixe x_n.

Pour les questions **a**, **b** et **c**, on suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X.

a) On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers x_0). Montrer que x_0 est un point fixe pour f.

b) On suppose que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers x_0). Montrer que x_0 est un point fixe pour f.

c) On suppose que f est contractante. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique point fixe de f.

Pour les questions **d**, **e** et **f**, on suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X. On suppose aussi qu'il existe $\alpha > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n soit α-lipschiztienne.

d) Montrer que f est α-lipschiztienne.

e) On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0. Montrer que x_0 est un point fixe de f.

f) On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique point fixe de f.

g) Montrer que, dans la question **f**, on ne peut pas remplacer la condition $\alpha < 1$ par la condition $\alpha_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (où f_n est α_n-lipschitzienne). On pourra considérer l'opérateur $f_n : \ell^2 \to \ell^2$ défini par

$$f_n((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (0, \ldots, 0, (1-1/n)x_n + 1/n, 0, \ldots).$$

h) **Application.** Soient X un compact non vide d'un espace vectoriel normé qu'on suppose étoilé par rapport à l'un de ses points x_0 (c'est le cas par exemple si X est convexe). On suppose que $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|$ pour tous $x, y \in \mathrm{X}$. Montrer que f à un point fixe (on pourra introduire une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et les fonctions $f_n(x) = (1-t_n)f(x) + t_n x_0$). Peut-on retirer l'hypothèse de compacité ? (Pensez à une translation sur $\mathbb{R}$). Peut-on retirer l'hypothèse « étoilé » ? (Pensez à une rotation sur le cercle).

Exercice 8 — Accélération de convergence. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit $\Delta((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $y_n = x_{n+1} - x_n$. Puis, par récurrence, $\Delta^k((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \Delta\Delta^{k-1}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

a) Calculer le terme général de la suite $\Delta^2((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

b) **Méthode d'Aitken.** On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. On note $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Delta((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Delta^2((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$. On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, que $x_n \neq x$ pour tout n et qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ tel que $|\mathrm{A}| < 1$ et $(x_{n+1} - x)/(x_n - x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{A}$. On définit

$$w_n = x_n - \frac{{y_n}^2}{z_n} = x_n - \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}\,.$$

On suppose que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien défini. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x et que $w_n/x_n \to 0$ (c'est-à-dire que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge plus vite vers x que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Exercice 9 — Attraction, répulsion. Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle ouvert I et $a \in \mathrm{I}$ un point fixe de f.

a) On suppose que $|f'(a)| < 1$. Montrer qu'il existe un intervalle fermé J stable par f de centre a tel que, pour tout $x_0 \in \mathrm{J}$, la suite définie par $u_0 = x_0$ et $u_n = f(u_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$ converge vers a.

b) Sous les hypothèses de **a**, on suppose de plus que f' ne s'annule pas sur J. Montrer que si $x_0 \neq a$ alors $u_n \neq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_{n+1} - a \sim f'(a)(u_n - a)$.

c) Toujours sous les hypothèses de **a**, on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ que $f'(a) = 0$ et que f'' ne s'annule pas sur J. Montrer que, si $x_0 \in \mathrm{J}$ et $x_0 \neq a$ alors $u_n \neq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_{n+1} - a \sim f''(a)(u_n - a)^2$.

d) On suppose que $|f'(a)| > 1$. Montrer qu'il existe un intervalle fermé J de centre a tel que pour tout $x_0 \in \mathrm{J}$ et $x_0 \neq a$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sort de J.

Exercice 10 — Méthode de Newton. Soit $f : [\,c\,,d\,] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [\,c\,,d\,]$. On considère la suite récurrente $x_0 \in [\,c\,,d\,]$ et $x_{n+1} = \mathrm{F}(x_n)$ pour $n \neq 0$ avec

$$\mathrm{F}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

a) Montrer que f a un unique zéro $a \in [\,c\,,d\,]$.

b) Calculer $\mathrm{F}'(a)$.

c) Montrer que pour tout $x \in [\,c\,,d\,]$, il existe $z \in [\,a\,,x\,]$ tel que

$$\mathrm{F}(x) - a = \frac{f''(z)}{2f'(x)}(x-a)^2\,.$$

d) En déduire qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que $|\mathrm{F}(x) - a| \leqslant \mathrm{C}|x-a|^2$ pour tout $x \in [\,c\,,d\,]$.

e) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $[\,a-\alpha\,,a+\alpha\,]$ est stable par F et que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quadratiquement vers a.

f) On suppose de plus que $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [\,c\,,d\,]$ et $x_0 \in \,]\,a\,,d\,]$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et strictement positive et montrer que

$$(x_{n+1} - a) \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2\,.$$

g) Montrer qu'on peut calculer l'inverse (approché) de $a > 0$ en utilisant uniquement des additions, soustraction et multiplication grâce à la méthode de Newton.

h) Montrer qu'on peut calculer $\sqrt{a}$ pour $a > 0$ avec la méthode de Newton appliqué à la fonction $x \mapsto x^2 - a$. Donner une expression exacte de x_n en fonction de n et x_0 (on pourra effectuer le changement de variable $y = (x - \sqrt{a})/(x + \sqrt{a})$).

Exercice 11 — Méthode de Newton et polynôme de degré 2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On considère alors la fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$ donnée par $f(z) = z^2 + az + b$. Le but de l'exercice est d'étudier ce que donne la méthode de Newton pour calculer les racines de f. On définit alors

$$\mathrm{N}(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

et on définit la suite $z_0 \in \mathbb{C}$ et $z_{n+1} = \mathrm{N}(z_n)$.

a) On suppose que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et converge. Quel peut-être sa limite ?

b) Dans cette question, on suppose que f a une racine double r. Exprimer $\mathrm{N}(z)$ en fonction de r. En déduire que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r. Donner une expression de z_n en fonction de z_0 et n.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que f admet deux racines distinctes r_1 et r_2.

c) Exprimer $\mathrm{N}(z)$ en fonction de r_1 et r_2. Pour quelles valeurs de z, $\mathrm{N}(z)$ n'est-il pas défini ?

Pour pallier à cet inconvénient, on ajoute un « point à l'infini » à l'ensemble $\mathbb{C}$ noté ∞. Cet ensemble $\mathbb{S} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ est appelé la *Sphère de Riemann* et est en bijection avec la sphère usuelle de $\mathbb{R}^3$ grâce à la projection stéréographique. Ainsi, on prolonge alors l'application N à l'ensemble $\mathbb{S} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ et en posant $\mathrm{N}((r_1 + r_2)/2) = \infty$ et $\mathrm{N}(\infty) = \infty$.

d) On considère alors l'application g définie par

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{r_2\}\,, \qquad g(z) = \frac{z - r_1}{z - r_2}$$

et $g(r_2) = \infty$ et $g(\infty) = 1$. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{S}$ sur lui-même. Calculer g^{-1}.

e) Déterminer l'ensemble des points $z \in \mathbb{S}$ tels que, respectivement, $|g(z)| = 1$, $|g(z)| < 1$ et $|g(z)| > 1$ (on supposera que $|\infty| > 1$).

f) Calculer $g \circ \mathrm{N} \circ g^{-1}$.

g) En déduire les valeurs de z_0 tel que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r_1 (resp. vers r_2).