Vincent Beck

Module semisimple

Exercice 1 — Semisimplicité et surjectivité. Soit V un G-module semi-simple. Pour S un G-module simple de type fini, on note $n_{\mathrm{S}}(\mathrm{V})$ la multiplicité de S dans V. Soit W un G-module et $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ un G-morphisme surjectif.

a) Montrer que W est un G-module semi-simple de type fini.

b) Comparer $n_{\mathrm{S}}(\mathrm{W})$ et $n_{\mathrm{S}}(\mathrm{V})$.

c) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est un G-module semi-simple de type fini. Exprimer $n_{\mathrm{S}}(\operatorname{Ker} f)$ en fonction $n_{\mathrm{S}}(\mathrm{W})$ et $n_{\mathrm{S}}(\mathrm{V})$.

d) Montrer que f admet une section : il existe un G-morphisme $\psi : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ tel que $f\psi = \mathrm{id}_{\mathrm{W}}$.

Exercice 2 — Semisimplicité et injectivité. Soit V un G-module semi-simple. Pour S un G-module simple de type fini, on note $n_{\mathrm{S}}(\mathrm{V})$ la multiplicité de S dans V. Soit W un G-module et $f : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ un G-morphisme surjectif.

a) Montrer que W est un G-module semi-simple de type fini.

b) Comparer $n_{\mathrm{S}}(\mathrm{W})$ et $n_{\mathrm{S}}(\mathrm{V})$.

c) Montrer que $\operatorname{Coker} f : \mathrm{V} \to \mathrm{V}/f(\mathrm{W})$ est un G-module semi-simple de type fini. Exprimer $n_{\mathrm{S}}(\operatorname{Coker} f)$ en fonction $n_{\mathrm{S}}(\mathrm{W})$ et $n_{\mathrm{S}}(\mathrm{V})$.

d) Montrer que f admet une rétraction : il existe un G-morphisme $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ tel que $\varphi f = \mathrm{id}_{\mathrm{W}}$.

Exercice 3 — Groupe quaternionique. On considère le groupe $\mathbb{H}_8 := \{1, -1, i, j, k, -i = (-1)i, -j = (-1)j, -k = (-1)k\}$ où la loi est donnée par

$$(-1)^2 = 1,\ i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k = -ji\,.$$

On admettra qu'on a bien ainsi un groupe.

a) Montrer que $\mathbb{H}_8$ est engendré par i et j et que i, j vérifient $i^2 = j^2$ et $i^4 = 1$ et $i^3 j = ji$.

b) Soit G un groupe, vérifier que pour se donner un morphisme de groupes de $\mathbb{H}_8$ dans G, il suffit de se donner deux éléments x et y de G vérifiant $x^2 = y^2$, $x^4 = 1$ et $x^3 y = yx$.

c) Montrer que les matrices

$$\mathrm{M}_i = \begin{bmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}_j = \begin{bmatrix} & & -1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & -1 & & \end{bmatrix}$$

définissent une représentation linéaire simple sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{H}_8$. Calculer l'anneau des G-endomorphismes de ce G-module.

d) Cette représentation est-elle simple sur $\mathbb{C}$?

e) Construire une représentation simple de dimension 2 de $\mathbb{H}_8$ sur $\mathbb{C}$. Calculer l'anneau des endomorphismes de ce G-module.

Exercice 4 — Groupe cyclique et $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On va s'intéresser aux représentations de dimension finie de $\mathrm{G} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$.

a) Déterminer les représentations de dimension 1 de G.

b) Soit P un diviseur irréductible de $\mathrm{X}^n - 1$. Montrer que la multiplication par X (ou plutôt la classe de X) dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]/\mathrm{P}$ définit un G-module simple qu'on note V_{P}.

c) Montrer que V_{P} est isomorphe V_{Q} si et seulement si $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ (où P et Q sont des diviseurs de $\mathrm{X}^n - 1$).

On note $f = \rho(\overline{1}) \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathrm{V})$ l'automorphisme de V définissant la structure de G-module sur V.

d) Soit P un diviseur irréductible de degré 1 de $\mathrm{X}^n - 1$. Montrer que toute droite de $\operatorname{Ker} \mathrm{P}(f)$ est G-stable. En déduire que $\operatorname{Ker} \mathrm{P}(f)$ est semisimple.

e) Soit P un diviseur irréductible de degré 2 de $\mathrm{X}^n - 1$. Montrer que, pour tout $x \in \operatorname{Ker} \mathrm{P}(f)$, $(x, f(x))$ engendre un G-module irréductible isomorphe à V_{P}. En déduire que $\operatorname{Ker} \mathrm{P}(f)$ est semisimple.

f) Montrer que V est semi-simple et que les simples sont les V_{P} (on pourra utiliser le lemme des noyaux).

g) Déterminer la composante $\mathrm{V_P}$-isotypique de V.

h) Calculer le nombre de représentations irréductibles de G sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 — Un module non semisimple. Soient G un groupe fini, p un nombre premier et k un corps de caractéristique p.

a) Montrer que la droite de $k[\mathrm{G}]$ engendrée par $\sum_{g\in\mathrm{G}} g \in k[\mathrm{G}]$ est un sous-G-module de $k[\mathrm{G}]$ qui n'admet pas de supplémentaire.

b) En déduire que $k[\mathrm{G}]$ n'est pas un G-module semi-simple.

Exercice 6 — Algèbre de groupe. Soit G un groupe.

a) Calculer $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(k[\mathrm{G}])$ (on pourra considérer les endomorphismes de multiplication à droite par les éléments de $k[\mathrm{G}]$).

b) Montrer que $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$ est semisimple. Déterminer les composantes isotypiques de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$.

c) En déduire que $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3] \overset{\mathbb{C}\text{-alg.}}{\simeq} \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.