Vincent Beck

# Sous-variété

## Sous-ensembles remarquables.

**Exercice 1 – Ellipse.** Montrer que $\mathscr{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + 2y^2 = 1\right\}$ est une (sous)-variété de $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 2 – Sphère et cylindre, hyperboloïde.**

**a)** Pour quelles valeurs de R, l'ensemble

$$\mathrm{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2, \quad x^2 + y^2 - 2x = 0\right\}$$

est-il une sous-variété non vide ?

**b)** Montrer que l'ensemble

$$\mathrm{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad x^2 + z^2 = 5\right\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 3 – Cône.** Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathrm{C} \subset \mathrm{E}$. On dit que C est un cône s'il existe $x_0 \in \mathrm{C}$ (appelé sommet du cône) telle que $(yx_0) \subset \mathrm{C}$ pour tout $y \in \mathrm{C}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un cône soit une sous-variété de E.

## Quelques exemples et contre-exemples concrets.

**Exercice 4 – Contre-exemple.** Les sous-ensembles V de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ qui suivent sont-ils des sous-variétés ? Les sous-ensembles $\mathrm{V} \setminus \{0\}$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sont-ils des sous-variétés ?

**a)** $\mathrm{V} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = |x|\right\}$ ;

**b)** $\mathrm{V} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 = y^2\right\}$ ;

**c)** $\mathrm{V} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 = y^3\right\}$ ;

**d)** $\mathrm{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 = z^2\right\}$ ;

**e)** $\mathrm{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^3 + y^3 = 3xy\right\}$ ;

**f)** $\mathrm{V} = \left\{\left(\dfrac{3t}{1+t^3}, \dfrac{3t^2}{1+t^3}\right) \in \mathbb{R}^2, t > -1\right\}$.

**Exercice 5 – Graphe.** Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ une application $\mathscr{C}^\infty$. Montrer que $\{(x, f(x)) \in \mathrm{U} \times \mathrm{F}, x \in \mathrm{U}\}$ est une sous-variété de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.

**Exercice 6 – Théorème du rang constant.** Soit V le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations

$$\begin{cases} t^3 + x^3 + y^3 + z^3 = 0 \\ t + x^2 - y^2 + z^2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ du point $(t,x,y,z) = (0,1,-1,0)$ tel que $\mathrm{V} \cap \mathcal{V}$ soit une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^4$.

**Exercice 7 – Retour sur un exemple déjà vu.** Démontrer que les équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36 \end{cases}$$

définissent une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Calculer sa dimension.

**Exercice 8 – Hypersurface de niveau.** Soient $\mathrm{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ et $c \in \mathbb{R}$. Donner une condition suffisante pour que l'ensemble $\mathrm{G}^{-1}(c)$ soit une hypersurface de $\mathbb{R}^n$.

Matrices et polynômes.

**Exercice 9 – Matrice nilpotente.** On considère l'ensemble $\mathscr{N} = \big\{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \quad \mathrm{M} \neq 0, \quad \mathrm{M}^2 = 0\big\}$.

**a)** Montrer que $\mathrm{M} \in \mathscr{N}$ si et seulement si $\mathrm{M} \neq 0$ et $(\det(\mathrm{M}), \mathrm{tr}\,(\mathrm{M})) = (0, 0)$.

**b)** En déduire que $\mathscr{N}$ est une sous-variété différentiable de dimension 2.

**Exercice 10 – Projecteur.** On considère l'ensemble $\mathscr{P} = \big\{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \quad \mathrm{M} \neq 0, \quad \mathrm{M} \neq \mathrm{Id}, \quad \mathrm{M}^2 = \mathrm{M}\big\}$.

**a)** Montrer que $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ si et seulement si $(\det(\mathrm{M}), \mathrm{tr}\,(\mathrm{M})) = (0, 1)$.

**b)** En déduire que $\mathscr{P}$ est une sous-variété différentiable de dimension 2.

**c)** Montrer que les applications $p \in \mathscr{P} \mapsto \mathrm{Im}\, p \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ et $p \mapsto \mathrm{Ker}\, p \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ sont $\mathscr{C}^\infty$.

**Exercice 11 – Polynôme.** Montrer que l'ensemble D des polynômes de degré exactement 2 ayant une racine double est une sous-variété de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ dont on déterminera la dimension et que l'application $\mathrm{P} \in \mathrm{D} \mapsto \text{racine}(\mathrm{P})$ est $\mathscr{C}^\infty$.

Montrer que l'ensemble $\mathrm{D_u}$ des polynômes unitaires de degré 2 ayant une racine double est une sous-variété de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ dont on déterminera la dimension et que l'application $\mathrm{P} \in \mathrm{D} \mapsto \text{racine}(\mathrm{P})$ est $\mathscr{C}^\infty$.

**Exercice 12 – Matrice.** Montrer que l'ensemble $\mathrm{D} \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices non scalaires ayant une valeur propre double est une sous-variété de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension et que l'application

$$\mathrm{vp} : \mathrm{A} \in \mathrm{D} \longmapsto \text{valeur propre}(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}$$

est une fonction est une fonction $\mathscr{C}^\infty$.