Vincent Beck

Surfaces

Courbes tracées sur une surface.

Définition 1 — Courbes remarquables. On dit qu'un arc régulier γ de classe $\mathscr{C}^2$ tracé sur une nappe régulière Σ est

(i) une *ligne de courbure* si sa torsion géodésique τ_g est nulle le long de γ.
(ii) une *ligne asymptotique* si sa courbure normale ρ_n est nulle le long de γ.
(iii) une *géodésique* si sa courbure géodésique ρ_g est nulle le long de γ.

Exercice 1 — Ligne de courbure. Soient Σ une nappe régulière et γ un arc régulier de classe $\mathscr{C}^2$ tracé sur Σ.

a) Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes

(i) γ est une ligne de courbure de Σ ;
(ii) En tout point de γ, la direction de la tangente à γ est direction principale de Σ ;
(iii) La nappe réglée dont les génératrices sont les normales à Σ en tous les points de γ est développable.

b) Montrer que les les méridiens et les parallèles d'une surface de révolution sont des lignes de courbure.

c) Déterminer les lignes de courbure de la surface d'équation $z = \ln(\cos x \cos y)$.

d) Déterminer les lignes de courbure de la surface d'équation $\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}z^2 = 1$ avec $\mathrm{ABC} \neq 0$.

e) Déterminer les lignes de courbure de la surface donnée par

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto (\operatorname{sh} v \sin u, \operatorname{sh} v \cos u, u)\,. \end{cases}$$

f) Déterminer les lignes de courbure de la surface donnée par

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto (\operatorname{ch} v \cos u, \operatorname{ch} v \sin u, v)\,. \end{cases}$$

Exercice 2 — Ligne asymptotique. Soient Σ une nappe régulière et γ un arc régulier de classe $\mathscr{C}^2$ tracé Σ.

a) Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes

(i) γ est une ligne asymptotique de Σ ;
(ii) En tout point de γ, la direction de la tangente à γ est direction asymptotique de Σ (c'est-à-dire que le vecteur tangent est isotrope pour la deuxième forme fondamentale) ;
(iii) En tout point birégulier de γ, le plan osculateur à γ est confondu avec le plan tangent à Σ.

b) On suppose que le support de γ est une droite contenue dans Σ. Montrer γ est une asymptotique. En déduire qu'une surface réglée n'a aucun point elliptique.

c) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Déterminer les asymptotiques de la nappe donnée par

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto (av\cos u, av\sin u, bu)\,. \end{cases}$$

Exercice 3 — Géodésique. Soient Σ une nappe régulière et γ un arc régulier de classe $\mathscr{C}^2$ tracé Σ.

a) Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes

(i) γ est une géodésique ;
(ii) En tout point birégulier de γ, le plan osculateur à γ contient la normale à Σ ;
(iii) L'application $\overrightarrow{n_\Sigma} \wedge \dfrac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}s}$ est nulle.

b) Déterminer les géodésiques d'une nappe plane.

c) Soit γ une courbe paramétrée par sa longueur d'arc s tracée sur une surface Σ. Montrer que f est une géodésique si et seulement si $f''(s)$ est dirigé selon la normale.

d) Montrer que les géodésiques d'une sphère sont les grands cercles.

e) Déterminer les géodésiques de la nappe définie par

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto \left(\cos u \cos v, \cos u \sin v, 4\left(\sin \dfrac{u}{2} - \cos \dfrac{u}{2}\right)\right) . \end{cases}$$

f) Soit T le tore de révolution obtenu en faisant tourner le cercle $(x-a)^2 + z^2 = r^2$ et $y = 0$ avec $a > r > 0$ autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$. Parmi les quatres parallèles tracés par les points $(a \pm r, 0, 0)$ et $(a, 0, \pm r)$, lesquels sont des géodésiques.

Exercice 4 — Géodésique, ligne de courbure et ligne asymptotique. Soit Σ une nappe de classe $\mathscr{C}^2$ régulière.

a) Montrer que toute géodésique de Σ qui est aussi une ligne de courbure est une courbe plane.

b) Montrer que toute géodésique de Σ sans point d'inflexion qui est plane est une ligne de courbure.

c) Montrer que toute géodésique de Σ qui est aussi une asymptotique est plane.

Exercice 5 — Cylindre, hélice et géodésique. Soit Σ une nappe de classe $\mathscr{C}^2$ régulière.

a) Soit f une paramétrisation d'un arc régulier γ de classe $\mathscr{C}^2$ tracé sur Σ à vitesse constante (c'est-à-dire tel que $\|f'\|$ soit constante ou encore dont le paramètre est une fonction affine de l'abscisse curviligne). On suppose que γ est une géodésique, montrer que f'' est normal au plan tangent.

b) Soit f une paramétrisation d'un arc régulier γ de classe $\mathscr{C}^2$ tracé sur Σ tel que f'' soient normal au plan tangent. Alors f est à vitesse constante et γ est une géodésique.

c) Soit γ une courbe plane régulière dans le plan $\mathscr{P}$ (paramétrée par sa longueur d'arc) et $\overrightarrow{k}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\mathscr{P}$. On considère le cylindre $\mathscr{C}$ de direction $\overrightarrow{k}$ et de directrice γ paramétrée par

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s,u) & \longmapsto \gamma(s) + u\,\overrightarrow{k} . \end{cases}$$

Déterminer les géodésiques de $\mathscr{C}$.

Exercice 6 — Surface de révolution. Soient g, h deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère la courbe paramétrée $\gamma : t \in \mathrm{I} \mapsto (0, g(t), h(t)) \in \mathbb{R}^3$ avec $g(t) > 0$.

a) Déterminer une équation paramétrique de la surface $\mathscr{S}$ obtenu en faisant tourner γ autour de l'axe $(0z)$.

b) Montrer que tous les points de $\mathscr{S}$ sont réguliers si ceux de γ le sont.

On suppose que γ et $\mathscr{S}$ sont réguliers.

c) Calculer les courbures normales et géodésiques et la torsion géodésique des méridiens et des parallèles de $\mathscr{S}$. En déduire que les méridiens sont des lignes de courbures et des géodésiques et que les parallèles sont des lignes de courbures. Déterminer les parallèles qui sont des géodésiques.

d) Loxodromie (c'est-à-dire courbe faisant un angle constant avec les méridiens) du tore à collier nul.

e) Soit $a > 0$. Montrer que la courbe

$$t \longmapsto (a\cos t \cos(\tan\alpha \ln(\tan(t/2+\pi/4))), a\cos t \sin(\tan\alpha \ln(\tan(t/2+\pi/4))), a\sin t)$$

est une loxodromie de la sphère de rayon a.

f) Déterminer l'équation des géodésiques.

Formes fondamentales.

Exercice 7 — Surface cartésienne. Déterminer les courbures principales k_1, k_2, la courbure moyenne H et la courbure totale de Gauss K à l'origine pour les surfaces données par

a) $z = ax^2 + by^2$;

b) $z = 66x^2 - 24xy + 59y^2$;

c) $z = 2x^2 + 3y^2 + 5y^3 + 7x^4$;

Exercice 8 – Selle de cheval. On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation $z = xy$.

a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'image par l'application de Gauss des droites $(y = a) \cap \mathscr{S}$.

b) Déterminer les points ombilics de $\mathscr{S}$.

Exercice 9 – Surface implicite.

a) Déterminer les courbures principales k_1, k_2, la courbure moyenne H et la courbure totale de Gauss K en tout point de la sphère de centre 0 de rayon $\mathrm{R} > 0$.

b) Déterminer la première forme fondamentale en (x_0, y_0, z_0) de la surface définie par $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$.

c) Déterminer la courbure de Gauss de la quadrique $x^2/a + y^2/b + z^2/c = 1$.

Exercice 10 – Surface de révolution. Soient g, h deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère la courbe paramétrée $\gamma : t \in \mathrm{I} \mapsto (0, g(t), h(t)) \in \mathbb{R}^3$ avec $g(t) > 0$.

a) Déterminer une équation paramétrique de la surface $\mathscr{S}$ obtenu en faisant tourner γ autour de l'axe $(0z)$.

b) Montrer que tous les points de $\mathscr{S}$ sont réguliers si ceux de γ le sont.

c) Déterminer la courbure de Gauss. Cas particulier où $h(t) = t$ pour tout t et où $h'(t) \neq 0$ pour tout t.

d) En contemplant un tore de révolution, déterminer les points où la courbure de Gauss est positive, négative et nulle. Vérifier par le calcul.

Exercice 11 – Points ombilics.

a) Déterminer les surfaces dont tous les points sont ombilics.

b) Déterminer les surfaces minimales à courbure de Gauss positive.

c) Montrer qu'un ellipsoïde a en général quatre points ombilics.

Géométrie riemannienne.

Exercice 12 – Disque hyperbolique. On considère le disque $\mathbb{D}_{\mathrm{H}} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 2\right\}$ muni des coordonnées locales

$$\varphi : (u, v) \in [\,0\,, 2\,[\, \times [\,0\,, 2\pi\,[\, \longmapsto (u \cos v, u \sin v)$$

et de métrique $\qquad \forall\, p = \varphi(u, v) \in \mathbb{D}_{\mathrm{H}}, \quad \forall\, (w_1, w_2) \in \mathrm{T}_p\mathbb{D}_{\mathrm{H}}, \qquad b(w_1, w_2) = \dfrac{\langle w_1, w_2 \rangle}{1 - u^2/4}\,.$

Calculer la courbure de Gauss.

Exercice 13 – Ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit M un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$. On définit sur M la métrique

$$\forall\, p = \varphi(u, v) \in \mathrm{M}, \quad \forall\, (w_1, w_2) \in \mathrm{T}_p\mathrm{M}, \qquad b(w_1, w_2) = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{f(p)^2}\,.$$

a) Montrer que la courbure de M est donnée par $\mathrm{K} = (f_{uu} + f_{vv})f - ({f_u}^2 + {f_v}^2)$.

b) Soit $\mathrm{M} = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0, 0)\}$ et $f : (u, v) \mapsto 1/2 \ln(u^2 + v^2)$. Calculer K et déterminer les courbes de M sur lesquelles K est constante.

Calcul des variations.

Exercice 14 – Calcul différentiel en dimension infinie. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{I} = [\,a\,, b\,]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et E l'espace des fonctions $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathrm{I}} |f(x)| + \sup_{x \in \mathrm{I}} |f'(x)|\,.$$

On considère une fonction $\mathscr{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et on définit la fonction

$$\mathscr{F} : \begin{cases} \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \displaystyle\int_a^b \mathscr{L}(x, f(x), f'(x))\mathrm{d}x\,. \end{cases}$$

a) Montrer que $\mathscr{F}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa différentielle.

On suppose dans la suite que $f \in \mathrm{E}$ réalise le minimum de $\mathscr{F}$ à extrémités fixées : soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; on a $\mathscr{F}(f) \leqslant \mathscr{F}(g)$ pour toute $g \in \mathrm{E}$ telle que $g(a) = f(a) = \alpha$ et $g(b) = f(b) = \beta$.

b) Montrer que $\mathrm{d}\mathscr{F}(f)(h) = 0$ pour toute fonction $h \in \mathrm{E}$ telle que $h(a) = h(b) = 0$.

c) Soit F une fonction réelle continue sur I telle que

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)h'(x)\mathrm{d}x = 0$$

pour toute $h \in \mathrm{E}$ telle que $h(a) = h(b) = 0$. Montrer que F est constante sur I.

d) En intégrant par partie l'expression de $\mathrm{d}\mathscr{F}(f)(h)$, montrer que f est solution de l'équation différentielle d'Euler

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_3\mathscr{L}(x, f(x), f'(x)) = \partial_2\mathscr{L}(x, f(x), f'(x)).$$

e) Étude du cas où $\mathscr{L}(x, f(x), f'(x)) = \sqrt{1 + f'^2(x)}$.