

UNIVERSITÉ DENIS DIDEROT — PARIS 7

**THÈSE DE DOCTORAT**

Spécialité : **MATHÉMATIQUES**

présentée par **Vincent BECK**

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris 7

**Algèbre des invariants relatifs**  
pour les  
**groupes de réflexions**

**Catégorie stable**

Soutenue le 19 Novembre 2008, devant le jury composé de :

<b>M. Cédric BONNAFÉ</b>	Université de Besançon	
<b>M. Michel BROUÉ</b>	Université Paris 7	DIRECTEUR DE THÈSE
<b>M. Patrick DEHORNOY</b>	Université de Caen	
<b>M. Bernhard KELLER</b>	Université Paris 7	
<b>M. Gus LEHRER</b>	University of Sydney	RAPPORTEUR
<b>M. Jean MICHEL</b>	Université Paris 7	

Rapporteur non présent à la soutenance : **Olivier MATHIEU**, Université Lyon 1.



# Merci !

Il est d'usage de commencer par remercier son directeur de thèse. Cédons-y ! Je remercie donc Michel Broué d'avoir accepté de diriger mes recherches pendant cette si (trop ?) longue thèse. Pouvoir profiter de sa formidable capacité à communiquer les mathématiques, tant par ses cours (de DEA ou « particuliers » à l'IHP) que par ses écrits, a été une chance immense.

Je remercie aussi les deux rapporteurs, Olivier Mathieu et Gus Lehrer, d'avoir pris le temps de lire ces presque 200 pages de thèse. Lorsque j'ai demandé à Cédric Bonnafé, Patrick Dehornoy, Bernhard Keller et Jean Michel de faire partie de mon jury de thèse, ils n'ont pas hésité. Merci beaucoup ! Puisse mon exposé et le pot qui suit ne pas vous faire regretter d'être venus.

Je remercie aussi les membres de l'équipe des « Groupes finis » de m'avoir accueilli et tout particulièrement Ivan Marin qui m'a laissé plus d'une fois lui raconter mes sornettes sur les connexions et les représentations de monodromie dont il n'est finalement pas question dans cette thèse. Être membre de cette équipe et plus généralement de l'IMJ est une chance : une chance de rencontrer des mathématiciens tels que Bernhard Keller ou Alberto Arabia qui peuvent vous écouter et vous aider grâce à leurs immenses connaissances. La force de l'IMJ ne réside pas seulement dans son potentiel mathématique mais aussi dans ses secrétaires qui facilitent grandement les démarches administratives : merci Madame Wasse et Madame Prosper-Cojande, tout a été simple avec vous.

J'adresse aussi mes remerciements au département de mathématiques de l'ENS Cachan et au CMLA de m'avoir accueilli en tant qu'agrégré préparateur pour me permettre de continuer la recherche. Moins administrativement, merci à Karine et Patrick d'égayer le couloir du premier étage du Cournot : vous êtes sûrement la principale explication du fait que je me sente si bien à Cachan.

Dans une vie de thésard, ne pas être seul est fondamental : je remercie Magda et Charlotte, mes prédécesseurs dans le rôle de « thésard de Groupes finis » d'avoir facilité mon intégration sur le fameux plateau 7C. En DEA, j'ai eu la chance de rencontrer Daniel qui a la patience d'écouter toutes mes questions et surtout le talent d'y répondre. Ton aide, notamment sur les catégories dérivées, a été précieuse. Yann et Claire, les membres de la Keller's Team, aussi m'ont bien aidé à résoudre quelques questions de catégories triangulées pour finir ce manuscrit. Merci à tous les deux. Quant à toi, Maria, je suis très content d'être ton frère de thèse. Enfin, entre thésards, on ne discute pas que de maths ! Alors merci Cécile, Cécilia, Thomas, Juliette, Nabil et tous les autres.

Cette thèse clot mes années d'études. C'est pourquoi, j'ai envie de remercier les professeurs de mathématiques qui ont développé mon goût pour cette si belle matière. Commençons donc par Monsieur Desseix qui m'a dévoilé les secrets des fractions, Monsieur Tanguy qui m'a vraiment appris ce qu'était une démonstration (son influence se ressent encore dans ce manuscrit), Monsieur Jozan qui m'a appris à « pomper », Madame Peynaud qui m'a fait découvrir Héron d'Alexandrie et enfin Monsieur Chanon, ah Monsieur Chanon, le mythe du lycée Albert Camus. On arrive à présent aux choses sérieuses avec Madame Raoult qui m'a tant fait aimer l'algèbre linéaire ; je me souviendrai aussi toujours qu'on ne somme pas les petits o ! Mon chemin s'est ensuite poursuivi en Bretagne à Ker Lann. Les trois années dans cette école ont été de première importance dans mon parcours mathématique. Je suis très fier d'y être passé et ne pourrais jamais exprimer assez ma reconnaissance. Merci donc à Grégory qui a (presque !) réussi à me faire aimer l'analyse numérique, à Michel Pierre, à Laurent Moret-Bailly et surtout à Daniel Ferrand. C'est lui qui par ses remarques lumineuses et si simples (par exemple, soit  $k$  un corps de caractéristique nulle s'écrit  $\mathbb{Q} \subset k$  ou encore un  $A$ -module tué par  $I$  est un  $A/I$ -module car le morphisme structurel passe au quotient) m'a fait revenir vers l'algèbre. Je l'en remercie profondément.

Mon passage par Ker Lann ne se résume pas à un simple apprentissage de mathématiques, j'y ai aussi eu la chance de rencontrer une pléiade de gens aussi bons amis que mathématiciens : Sylvain (il faut bien commencer par les algébristes !), Karel (la KFP, c'est bien pratique pour avoir des nouvelles fraîches), Matthieu (le géomètre de service), Stef (j'ai toujours mon Graillatovitch sur moi), Jean (eh, d'accord), Cyril (t'inquiète, il y aura du jus d'orange au pot !). Promis, il y aura d'autres Agreg'Academy ! Je n'oublie pas non plus Gwennou (le physicien de service), Florence les cheveux courts (merci de m'avoir fait découvrir bon nombre de BD qui sont aujourd'hui dans ma bibliothèque), Florence les cheveux longs, Clair (le roi des H-matrices), Bertrand (j'attends toujours le titre de champion du PSG...), Louis (l'informaticien de service), Gwenn (la reine des Fest Noz). Enfin, Gabriel et Jérôme, merci, merci, merci de toujours me soutenir, m'encourager et me motiver, m'écouter et recevoir sans vous plaindre mes dizaines de mails qui ne sont pas que des maths ! C'est vraiment génial de vous avoir. J'ai hâte de partager de nouveaux projets avec vous.

Terminons par celles qui éclairent ma vie chaque jour ! Rachel et Emeline vous m'apportez tant de bonheur et de rire, j'ai de la chance d'être votre père. Merci ! Carole, ton amour, par tout ce qu'il m'apporte, me donne une belle idée de l'infini. Je suis si heureux de partager ta vie.



# TABLE DES MATIÈRES

<b>INTRODUCTION</b>	<b>7</b>
<b>PARTIE 1 : GROUPE DE RÉFLEXIONS</b>	<b>9</b>
<b>1 RAPPELS : GROUPE DE RÉFLEXIONS</b>	<b>11</b>
1.1 Rappels d'algèbre commutative . . . . .	11
1.1.1 Anneau et module de fractions et caractère linéaire . . . . .	12
1.1.2 Graduation . . . . .	17
1.2 Rappels d'algèbre linéaire . . . . .	22
1.2.1 L'algèbre linéaire des réflexions . . . . .	22
1.3 Quelques rappels sur les groupes de réflexions . . . . .	25
1.3.1 Groupe de réflexions et invariants . . . . .	25
1.3.2 Hyperplans de réflexion . . . . .	27
1.3.3 Théorème de Gutkin . . . . .	31
1.3.4 Théorème de Gutkin et matrice minimale . . . . .	37
1.3.5 Groupes de réflexions complexes VS groupes de Coxeter . . . . .	40
<b>2 ALGÈBRE DES INVARIANTS RELATIFS</b>	<b>43</b>
2.1 Algèbre extérieure . . . . .	43
2.1.1 Hyperplans . . . . .	43
2.1.2 Construction d'une structure d'algèbre . . . . .	45
2.1.3 Algèbre extérieure . . . . .	47
2.2 Conséquences de la structure d'algèbre extérieure . . . . .	50
2.2.1 Introduction et notations . . . . .	51
2.2.2 Fraction rationnelle . . . . .	52
2.2.3 Entier régulier . . . . .	53
2.3 Exemple 1 : Étude des hyperplans de $\mathfrak{S}_n$ . . . . .	56
2.3.1 Outils combinatoires . . . . .	56
2.3.2 Quelques dénombrements de partitions . . . . .	58
2.3.3 Lien avec les représentations du groupe symétrique . . . . .	61
2.4 Exemple 2 : les groupes de réflexions $G(de, e, r)$ . . . . .	62
2.4.1 Définition et premières propriétés . . . . .	62
2.4.2 Étude des hyperplans de $G(d, 1, r)$ . . . . .	69
2.4.3 Étude des représentations de $G(de, e, 2)$ . . . . .	78
2.5 Exemple 3 : le groupe de réflexions $G_{24}$ . . . . .	80

---

<b>PARTIE 2 : CATÉGORIE STABLE</b>	87
<b>3 RAPPELS : CATÉGORIES</b>	89
3.1 Algèbre symétrique . . . . .	89
3.1.1 Forme linéaire . . . . .	89
3.1.2 Algèbre symétrique . . . . .	90
3.2 Adjonction . . . . .	90
3.2.1 Adjonction : définition, unité et counité . . . . .	91
3.2.2 Unité, counité, monomorphisme et épimorphisme . . . . .	92
3.2.3 Triplet adjoint, trace et objet M-split . . . . .	94
3.3 Catégorie additive et plus... . . . .	97
3.3.1 Catégorie R-linéaire . . . . .	97
3.3.2 Catégorie abélienne . . . . .	98
3.3.3 Catégorie triangulée . . . . .	101
3.4 Complexe dans une catégorie additive . . . . .	109
3.4.1 Les catégories des complexes . . . . .	110
3.4.2 Le complexe Hom . . . . .	114
3.4.3 Le cas des catégories abéliennes . . . . .	118
3.4.4 Extension de foncteurs . . . . .	122
3.4.5 La catégorie homotopique . . . . .	126
3.4.6 Complexes scindés . . . . .	129
<b>4 CATÉGORIE STABLE</b>	135
4.1 Catégorie M-stable d'une catégorie triangulée . . . . .	135
4.1.1 Catégorie M-stable d'une catégorie triangulée . . . . .	136
4.1.2 Contre-exemple . . . . .	139
4.2 Catégorie M-stable d'une catégorie abélienne . . . . .	142
4.2.1 La catégorie M-stable . . . . .	143
4.2.2 Lemme de Schanuel . . . . .	144
4.2.3 Structure triangulée . . . . .	149
4.3 Catégorie M-stable à la Rickard . . . . .	156
4.3.1 Un peu d'algèbre homologique M-split . . . . .	157
4.3.2 M-Résolution . . . . .	159
4.3.3 Théorème de Rickard . . . . .	163
<b>ANNEXE</b>	169
<b>5 CONVENTION DE SIGNE</b>	171
5.1 Le complexe Hom . . . . .	171
5.1.1 Le foncteur . . . . .	171
5.1.2 Transformations naturelles . . . . .	172
5.2 Le foncteur produit tensoriel . . . . .	173
5.2.1 Le foncteur . . . . .	174
5.2.2 Les transformations naturelles . . . . .	174
5.3 Liens entre produit tensoriel et complexe Hom . . . . .	177
5.3.1 Composition et évaluation . . . . .	177
5.3.2 L'isomorphisme cher à Cartan . . . . .	178
Bibliographie . . . . .	183

# INTRODUCTION

Cette thèse est divisée en deux parties et une annexe complètement indépendantes. La première partie tourne autour des groupes de réflexions alors que la deuxième s'intéresse à la notion de catégorie stable. L'annexe étudie quelques problèmes de signes dans les complexes de modules. Chacune des deux parties est divisée en deux chapitres : un chapitre de rappel suivi d'un chapitre présentant mes résultats de recherches.

## Partie 1.

Le chapitre 2 présente mon travail de thèse sur les groupes de réflexions complexes. Le résultat central est la proposition 2.20 : étant donné  $(G, V)$  un groupe de réflexions complexes,  $M$  une représentation de  $G$  de dimension finie et  $\chi$  un caractère linéaire de  $G$ , on peut, sous certaines conditions (hypothèse 2.16 ou 2.17), construire une structure d'algèbre extérieure sur  $(T^{-1}S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi$  (où  $T$  est une partie multiplicative de  $S(V^*)$  convenablement choisie).

Ce travail se place dans la lignée des travaux de Orlik et Solomon [O-S] (qui étudient le cas  $(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^G$ ) et de Shepler [SHE] (qui étudie le cas  $(S(V^*) \otimes \Lambda(V^*))^\chi$ ). L'approche présentée ici est légèrement différente de celle de l'article [BEC] et mène à un résultat un peu plus général. Cette approche permettra certainement de généraliser aussi les résultats de Hartmann et Shepler [H-S].

Lorsqu'on peut choisir  $T = \{1\}$ , on peut utiliser la bigraduation de  $(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi$  pour obtenir quelques conséquences de la structure d'algèbre extérieure, notamment en lien avec la régularité d'un entier. Ce travail est proposé dans la section 2.2 et poursuit les idées de [BLM], [LEH1] et [L-M].

Par ailleurs, l'étude de la structure de  $(T^{-1}S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi$  pousse à définir différents types d'hyperplans (en lien avec la représentation  $M$  et le caractère linéaire  $\chi$ ). Les sections 2.3, 2.4 et 2.5 sont dédiées à l'étude de ces types d'hyperplans pour les groupes  $S_n$ ,  $G(d, 1, r)$ ,  $G(de, e, 2)$  et  $G_{24}$ .

## Partie 2.

Le chapitre 4 présente mon travail de thèse sur les catégories stables. L'objet de ce chapitre est l'étude de la situation suivante : On se donne un triplet adjoint  $(M, L, R)$  entre deux catégories  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  (avec  $M : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ) où  $\mathcal{A}$  vérifie l'hypothèse 3.22 ( $\mathcal{A}$  est triangulée dans la section 4.1 et abélienne dans les sections 4.2 et 4.3). Que se passe-t-il lorsqu'on annule les objets  $M$ -split de  $\mathcal{A}$  (voir la proposition-définition 3.24 pour la définition d'objet  $M$ -split) ?

Dans la section 4.1, on présente une suggestion de construction d'une catégorie  $M$ -stable pour une catégorie triangulée. Considérons le cas où  $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$  est la catégorie des  $A$ -modules où  $A$  est une algèbre symétrique de dimension finie sur un corps  $k$  et  $\mathcal{B} = k\text{-Ev}$ . Si  $M = A \otimes_k \bullet$  est le foncteur d'extension des scalaires alors  $L = R$  est la restriction des scalaires et on a un triplet adjoint  $(M, L, R)$  au niveau des catégories dérivées. La catégorie  $M$ -stable triangulée définie dans la section 4.1 est alors la catégorie stable usuelle (voir l'exemple 4.6). On montre enfin que la catégorie des objets  $M$ -split n'est pas nécessairement triangulée (voir les contre-exemples 4.12 et 4.13).

La section 4.2 présente un travail qui se place dans le prolongement de celui de Happel [HAP, Chapitre 2] et Linckelmann [LIN] qui définissent la catégorie stable d'une algèbre auto-injective  $A$  comme quotient de la catégorie des  $A$ -modules par les modules projectifs et montrent que cette catégorie stable est triangulée. Happel utilise l'hypothèse d'auto-injectivité pour identifier modules projectifs et modules injectifs et pouvoir ainsi se « déplacer dans les deux sens ». Dans notre travail, cette « identification » est contenue dans la définition des objets  $M$ -split : ce sont les notions de relative injectivité et relative projectivité qui coïncident. De façon un peu plus précise, lorsque  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont abéliennes et vérifient les hypothèses 4.14, alors le quotient de  $\mathcal{A}$  par les morphismes se factorisant par les objets  $M$ -split de  $\mathcal{A}$  est triangulé.

L'exemple fondamental qui a guidé notre travail est le suivant : on considère une algèbre symétrique  $A$  de dimension finie sur un corps  $k$ . Comme  $A$  est auto-injective, la construction de Happel s'applique. De plus, les projectifs ne sont rien d'autre que les facteurs directs des modules induits (qui sont les modules libres). Dans

ce cadre, la construction de Happel s'interprète comme le quotient de la catégorie de  $A$ -modules par les objets  $M$ -split où  $M = A \otimes_k \bullet$  (avec  $M$  qui fait partie du triplet adjoint  $(M, \text{Res}, \text{Res})$  puisque  $A$  est symétrique).

La section 4.3 présente un travail qui se place dans le prolongement de celui de Rickard [RIC, Théorème 2.1]. En effet, Rickard montre que la catégorie stable s'obtient comme quotient de la catégorie dérivée bornée par les complexes parfaits. Toujours en s'inspirant de notre exemple fondamental, on montre que la catégorie  $M$ -stable de la catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  s'obtient comme quotient d'une catégorie  $M$ -dérivée bornée par les complexes bornés d'objets  $M$ -split (voir la proposition 4.49). Ce quotient de la catégorie  $M$ -dérivée s'interprète également comme la catégorie  $M$ -stable au sens triangulé de la catégorie  $M$ -dérivée pour une extension naturelle des foncteurs  $(M, L, R)$  (voir les exemples 4.6 et 4.7).

Dans l'exemple 4.16, on donne quelques situations concrètes dans lesquelles les hypothèses de travail des sections 4.2 et 4.3 sont vérifiées. Les exemples que nous donnons vérifient tous  $L = R$  même si le cadre abstrait présenté ne l'impose pas. Les hypothèses permettent tout de même de regrouper dans le même cadre la construction de la catégorie stable et de la catégorie relativement stable.

Le travail des sections 4.2 et 4.3 est en un certain sens le dual de celui de [GRI] qui étudie le quotient de la catégorie  $\mathcal{B}$  par les facteurs directs des objets de la forme  $LX$  ou  $RX$  lorsque ces deux classes d'objets coïncident (et que  $M$  est fidèle mais que  $L$  et  $R$  ne sont plus nécessairement ni fidèles ni exacts).

### **Annexe.**

L'annexe propose une convention de signe adaptée de [SGA4] pour les complexes  $\text{Hom}$  et produit tensoriel. On étudie comment les transformations naturelles usuelles reliant le produit tensoriel et les homomorphismes au niveau des modules se prolongent au niveau des complexes.

# Partie 1

## Groupe de réflexions



## CHAPITRE 1

# RAPPELS : GROUPE DE RÉFLEXIONS

Ce chapitre propose des rappels en vue du chapitre 2. Il est divisé en trois sections. La section 1.1 est consacrée à quelques rappels d'algèbre commutative : invariants, anneaux de fractions, graduations. La section 1.2 est, quant à elle, consacrée à quelques rappels sur les réflexions. Enfin, la section 1.3 regroupe quelques résultats classiques sur les groupes de réflexions notamment les théorèmes de Chevalley-Shephard-Todd, Gutkin et Stanley. Elle se termine par une nouvelle caractérisation des matrices minimales au sens d'Opdam (voir la proposition-définition 1.65).

## 1.1 RAPPELS D'ALGÈBRE COMMUTATIVE

Dans cette section, on rappelle quelques résultats d'algèbre commutative utiles pour la suite notamment pour l'étude des composantes isotypiques de l'algèbre  $T^{-1}S(V^*) \otimes \Lambda(M^*)$  (voir les sections 2.1 et 2.2).

On commence brièvement par fixer un vocabulaire pour la manipulation des modules sur un anneau (non nécessairement commutatif). On poursuit ensuite, dans la sous-section 1.1.1, avec quelques propriétés des anneaux de fractions en lien avec les actions de groupes : points fixes, composante isotypique pour un caractère linéaire... Enfin, on termine, dans la sous-section 1.1.2, par une étude rapide de la graduation : série de Poincaré, trace graduée, formules de Molien...

### MODULES À GAUCHE, MODULES À DROITE, MULTIMODULES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

**Notation 1.1 – Module.** Soient  $R$  un anneau commutatif unitaire et  $A$  une  $R$ -algèbre associative unitaire. On dit que  $M$  est un  $A$ -module (resp. un module- $A$ ) si  $M$  est un module à gauche sur  $A$  (resp. à droite sur  $A$ ). Si  $M$  et  $N$  sont deux  $A$ -modules (resp. deux modules- $A$ ), on note  $\text{Hom}_A(M, N)$  (resp.  $\text{Hom}(M, N)_A$ ) l'ensemble des applications  $A$ -linéaires de  $M$  dans  $N$ . On dit que  $\text{Hom}_A(M, N)$  (resp.  $\text{Hom}(M, N)_A$ ) est l'ensemble des morphismes de  $A$ -modules (resp. modules- $A$ ) de  $M$  dans  $N$ . Pour l'ensemble des endomorphismes d'un  $A$ -module  $M$  (resp. d'un module- $A$ ), on note  $\text{End}_A(M) = \text{Hom}_A(M, M)$  (resp.  $\text{End}(M)_A = \text{Hom}(M, M)_A$ ).

Pour  $B$  une  $R$ -algèbre associative unitaire, on note  $B^{\text{op}}$  la  $R$ -algèbre associative dont le  $R$ -module sous-jacent est  $B$  et dont le produit est donné par  $b \cdot_{B^{\text{op}}} b' = b' \cdot_B b$  pour tous  $b, b' \in B$  et lorsque  $M$  est un  $A \otimes B^{\text{op}}$ -module, on dit plutôt que  $M$  est un  $A$ -module- $B$  ou un  $(A, B)$ -bimodule. Enfin, pour  $M$  et  $N$  deux  $A$ -modules- $B$ , on note

$$\text{Hom}_A(M, N)_B = \text{Hom}_{A \otimes B^{\text{op}}}(M, N) \quad \text{et} \quad \text{End}_A(M)_B = \text{Hom}_A(M, M)_B.$$

**Définition 1.2 – Action sur les morphismes.** Considérons  $B, C$  deux  $R$ -algèbres associatives unitaires,  $M$  un  $A$ -module- $B$  et  $N$  un  $A$ -module- $C$ . On munit  $\text{Hom}_A(M, N)$  d'une structure de module- $B^{\text{op}} \otimes C$  grâce à l'action

$$(f \cdot (b \otimes c))(m) = f(m \cdot b) \cdot c$$

où  $f \in \text{Hom}_A(M, N)$ ,  $b \in B$ ,  $c \in C$  et  $m \in M$ .

De façon précise, on note  $\nu_B : B \rightarrow \text{End}_R(M)$  (resp.  $\nu_C : C \rightarrow \text{End}_R(N)$ ) l'anti-homomorphisme de  $R$ -algèbres associés aux structures de module- $B$  (resp. module- $C$ ) de  $M$  (resp.  $N$ ). Par ailleurs, on considère

$$\nu : \begin{cases} \text{End}_A(M) \longrightarrow \text{End}_R(\text{Hom}_A(M, N)) \\ f \quad \longmapsto (f^* : g \mapsto g \circ f) \end{cases}$$

et

$$\mu : \begin{cases} \text{End}_A(N) \longrightarrow \text{End}_R(\text{Hom}_A(M, N)) \\ f \quad \longmapsto (f_* : g \mapsto f \circ g). \end{cases}$$

L'application  $\nu$  est un anti-homomorphisme de R-algèbres et  $\mu$  un morphisme de R-algèbres. L'anti-homomorphisme de R-algèbres associés à l'action à droite de  $B^{\text{op}} \otimes C$  est donné par

$$\forall (b, c) \in B \times C, \quad \nu_{B^{\text{op}} \otimes C}(b \otimes c) = (\nu \circ \nu_C)(c) \circ (\mu \circ \nu_B)(b).$$

**Exemple 1.3 — Action sur les morphismes.** Considérons  $B, C$  et  $D$  trois R-algèbres associatives unitaires,  $M$  un  $A$ -module- $B$  et  $N$  un  $C$ -module- $D$ . En suivant la définition 1.2, on munit  $\text{Hom}_R(M, N)$  d'une structure de  $C \otimes A^{\text{op}}$ -module- $D \otimes B^{\text{op}}$  grâce à l'action

$$((c \otimes a) \cdot f \cdot (d \otimes b))(m) = c \cdot f(a \cdot m \cdot b) \cdot d$$

où  $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ ,  $c \in C$ ,  $d \in D$  et  $m \in M$ . ■

**Exemple 1.4 — Action sur le dual.** En particulier, avec  $M = A$ ,  $N = R$ ,  $B = A$  et  $C = D = R$ , on obtient sur  $A^* = \text{Hom}_R(A, R)$  une structure de  $A^{\text{op}}$ -module- $A^{\text{op}}$ , c'est-à-dire une structure de  $A$ -module- $A$ . L'action de  $a \otimes a' \in A \otimes A^{\text{op}}$  sur  $f \in A^*$  est donnée par  $((a \otimes a') \cdot f)(x) = f(a'xa)$  pour tout  $x \in A$ . ■

### 1.1.1 ANNEAU ET MODULE DE FRACTIONS ET CARACTÈRE LINÉAIRE

On commence par rappeler les propriétés de factorialité des anneaux de fractions d'un anneau factoriel (lemmes 1.5 et 1.6). Celles-ci seront fondamentales (avec  $A = S(V^*)$ ) pour les problèmes de divisibilité dans la section 2.1.

On étudie ensuite l'action d'un groupe  $G$  par automorphisme sur un anneau (lemme 1.7). En particulier, on étudie lorsque cette action est complétée par un morphisme de  $G$  dans le groupe des inversibles du centre de  $A$ . Par la suite, on regarde comment ces propriétés se propagent dans les anneaux de fractions et dans les modules de fractions. Lorsque le groupe  $G$  est fini, ce qui sera notre cas dans les sections 2.1 et 2.2, tout se passe bien.

Avant de commencer, on rappelle que, si  $A$  est un anneau commutatif unitaire et  $S$  une partie multiplicative de  $A$  (c'est-à-dire contenant 1 et stable par produit) alors l'anneau de fractions  $S^{-1}A$  est obtenu comme l'ensemble  $A \times S$  quotienté par la relation d'équivalence  $(a, s) \sim (a', s')$  si et seulement s'il existe  $t \in S$  tel que  $tas' = ta's'$  muni des lois (bien définies)  $a/s + a'/s' = (as' + a's)/ss'$  et  $(a/s) \cdot (a'/s') = (aa')/(ss')$ . De même, si  $M$  est un  $A$ -module, le  $S^{-1}A$ -module de fractions  $S^{-1}M$  est obtenu comme l'ensemble  $M \times S$  quotienté par la relation d'équivalence  $(m, s) \sim (m', s')$  si et seulement s'il existe  $t \in S$  tel que  $ts'm = tsm'$  muni des lois (bien définies)  $m/s + m'/s' = (ms' + ms)/ss'$  et  $(a/s) \cdot (m/s') = am/ss'$ .

#### ANNEAU DE FRACTIONS ET FACTORIALITÉ

**Lemme 1.5 — Anneau de fractions et anneau intègre.** Soient  $A$  un anneau intègre (c'est-à-dire commutatif unitaire et sans diviseur de 0 non nul) et  $S$  une partie multiplicative de  $A$  qui ne contient pas 0.

L'anneau  $S^{-1}A$  est intègre et le morphisme canonique  $i : A \rightarrow S^{-1}A$  est injectif.

De plus, si  $S \subset T$  (avec  $0 \notin T$ ) alors  $S^{-1}A$  s'identifie à un sous-anneau de  $T^{-1}A$ . En particulier  $S^{-1}A$  est un sous-anneau de  $K = \text{Frac}(A)$  le corps des fractions de  $A$ .

**Preuve.** Si  $(a/s)(a/s') = 0$  alors  $(aa')/(ss') = 0$  et donc il existe  $t \in S$  tel que  $taa' = 0$ . Comme  $t \neq 0$  et  $A$  intègre, on en déduit que  $aa' = 0$  et donc  $a$  ou  $a'$  est nul (toujours parce que  $A$  est intègre). Ainsi  $a/s = 0$  ou  $a'/s' = 0$  et  $S^{-1}A$  est intègre.

Si  $i(a) = a/1 = 0$  dans  $S^{-1}A$  alors il existe  $s \in S$  tel que  $sa = 0$ . Or  $s \neq 0$  d'où  $a = 0$  et  $i$  est injectif.

On en déduit que le morphisme de  $A$  dans  $T^{-1}A$  est injectif. Par ailleurs, l'image par  $S$  est contenu dans celle de  $T$  et donc dans  $(T^{-1}A)^\times$ . Ainsi, par la propriété universelle des anneaux de fractions, on construit un morphisme  $\varphi : S^{-1}A \rightarrow T^{-1}A$  vérifiant  $\varphi(a/s) = a/s$  pour tous  $a \in A$  et  $s \in S$ .

Montrons que  $\varphi$  est injectif. Si  $\varphi(a/s) = a/s = 0$ , il existe  $t \in T$  tel que  $ta = 0$ . Comme  $t \neq 0$  et  $A$  intègre, on en déduit que  $a = 0$  et donc  $a/s = 0$  dans  $S^{-1}A$ . Ainsi  $\varphi$  est injectif.

Comme  $S \subset T = A \setminus \{0\}$  et  $K = T^{-1}A$ , on obtient bien que  $S^{-1}A$  est un sous-anneau de  $K$ . ■

**Lemme 1.6 — Anneau de fractions et anneau factoriel.** Soient  $A$  un anneau factoriel et  $S$  une partie multiplicative de  $A$  qui ne contient pas 0. On note  $\mathcal{P}$  une famille de représentants de l'ensemble des éléments premiers de  $A$  et  $i : A \rightarrow S^{-1}A$  le morphisme canonique.

L'anneau  $S^{-1}A$  est factoriel. De façon précise, on pose

$$\mathcal{P}' = \{p \in \mathcal{P}, \quad \exists s \in S, \quad p \mid s\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}'' = \{p \in \mathcal{P}, \quad p/1 \in (S^{-1}A)^\times\}.$$

On a  $\mathcal{P}' = \mathcal{P}''$  et  $i(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}')$  est une famille de représentants de l'ensemble des éléments premiers de  $S^{-1}A$ .

**Preuve.** L'ensemble  $\mathcal{P}'$  est l'ensemble des éléments premiers de  $A$  apparaissant dans les factorisations des éléments de  $S$  et  $\mathcal{P}''$  est l'ensemble des éléments premiers de  $A$  dont l'image dans  $S^{-1}A$  est inversible.

Soit  $p \in \mathcal{P}'$ . Il existe  $s \in S$  et  $q \in A$  tel que  $s = pq$ . On a donc  $i(p)i(q)/s = i(s)/s = 1$  Ainsi  $i(p) \in (S^{-1}A)^\times$ .

Réciproquement, si  $i(p)$  est inversible alors il existe  $a/s \in S^{-1}A$  tel que  $(p/1)(a/s) = 1$ . On en déduit qu'il existe  $t \in S$  tel que  $t(pa - s) = 0$ . Comme  $t \neq 0$ , on en déduit que  $pa = s$  c'est-à-dire  $p \mid s$ .

Soit  $p \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$ . Montrons que  $i(p)$  est premier. Soient  $a/s, a'/s' \in S^{-1}A$  tel que  $p/1 \mid (a/s)(a'/s')$ . Il existe donc  $b/s'' \in S^{-1}A$  tel que  $(p/1)(b/s'') = aa'/ss'$ . Ainsi, on a  $t \in S$  vérifiant  $t(pbss' - aa's'') = 0$ . On en déduit que  $p \mid aa's''t$ . Or  $p \nmid s''t$  car  $p \notin \mathcal{P}'$ , on en déduit que  $p \mid aa'$  puis  $p \mid a$  ou  $p \mid a'$ . Il existe donc  $c \in A$  tel que  $pc = a$  ou  $pc = a'$  et donc  $(p/1)(c/s) = a/s$  ou  $(p/1)(c/s') = a'/s'$ . Ainsi  $p/1$  est premier.

Soient  $p, p' \in \mathcal{P}'$ . Supposons que  $p/1$  et  $p'/1$  sont associés dans  $S^{-1}A$  alors il existe  $a/s \in S^{-1}A$  tel que  $p/1 = (a/s)(p'/1)$ . On en déduit qu'il existe  $t \in S$  tel que  $pst = tap'$ . Ainsi  $p' \mid pst$ . Comme  $p' \nmid st$ , la primalité de  $p$  donne  $p' \mid p$  et donc  $p = p'$ .

Soient  $a/s \in S^{-1}A \setminus \{0\}$ . On a  $a \neq 0$  et on peut écrire

$$a = \varepsilon \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(a)} = \varepsilon \left( \prod_{p \in \mathcal{P}'} p^{\nu_p(a)} \right) \left( \prod_{p \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'} p^{\nu_p(a)} \right)$$

avec  $\nu_p(a) \in \mathbb{N}$  et nul sauf pour un nombre fini d'éléments premiers et  $\varepsilon \in A^\times$ . On obtient donc

$$\frac{a}{s} = \frac{\varepsilon}{s} \left( \prod_{p \in \mathcal{P}'} \left( \frac{p}{1} \right)^{\nu_p(a)} \right) \left( \prod_{p \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'} \left( \frac{p}{1} \right)^{\nu_p(a)} \right) = \varepsilon' \left( \prod_{p \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'} \left( \frac{p}{1} \right)^{\nu_p(a)} \right)$$

avec  $\varepsilon' \in (S^{-1}A)^\times$ . Tout élément de  $S^{-1}A$  se décompose donc en produit d'éléments premiers. Ainsi  $S^{-1}A$  est factoriel et on a bien le résultat souhaité. ■

## ANNEAU DE FRACTIONS ET GROUPE D'AUTOMORPHISMES

**Lemme 1.7 – Morphisme d'anneaux.** Soient  $G$  un groupe,  $A$  un anneau unitaire et  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(A)$  un morphisme de groupes de  $G$  dans les automorphismes de l'anneau  $A$ . Alors l'ensemble

$$A^G = \{x \in A, \quad \forall g \in G, \quad gx = x\}$$

est un sous-anneau de  $A$ . De plus, on a  $(A^G)^\times = A^G \cap A^\times$ .

Soit  $\chi : G \rightarrow (ZA)^\times$  un morphisme de groupes. L'ensemble

$$A^\chi = \{x \in A, \quad \forall g \in G, \quad gx = \chi(g)x\}$$

est un sous- $(A^G, A^G)$ -bimodule de  $A$ .

Par ailleurs, si  $G$  est fini et  $A$  commutatif alors  $A$  est entier sur  $A^G$ .

**Preuve.** On a  $g1 = 1$  pour tout  $g \in G$  et donc  $1 \in A^G$ . De plus, pour tous  $x, y \in A^G$ , on a

$$g(x+y) = gx+gy = x+y \quad \text{et} \quad g(xy) = (gx)(gy) = xy$$

et donc  $xy \in A^G$  et  $x+y \in A^G$ . Ainsi  $A^G$  est bien un sous-anneau de  $A$ .

Si  $x \in (A^G)^\times$  alors il existe  $y \in A^G \subset A$  tel que  $xy = yx = 1$  et donc  $x \in A^G \cap A^\times$ . Réciproquement, si  $x \in A^G \cap A^\times$  alors il existe  $y \in A$  tel que  $xy = yx = 1$ . Comme  $x \in A^G$ , on a alors, pour tout  $g \in G$ ,

$$x(gy) = (gx)(gy) = g(xy) = g1 = 1 = g(yx) = (gy)(gx) = (gy)x.$$

Ainsi  $gy$  est aussi l'inverse de  $x$  dans  $A$  et donc  $gy = y$  pour tout  $g \in G$ . Finalement  $y \in A^G$  et  $x \in (A^G)^\times$ .

On a  $g0 = 0 = \chi(g)0$  pour tout  $g \in G$  et donc  $0 \in A^\chi$ . De plus, pour tous  $x, y \in A^\chi$  et  $z \in A^G$ , on a

$$g(x+y) = gx+gy = \chi(g)x + \chi(g)y = \chi(g)(x+y), \quad g(zx) = (gz)(gx) = z\chi(g)x = \chi(g)zx$$

et

$$g(xz) = (gx)(gz) = \chi(g)xz.$$

Ainsi  $x+y, zx, xz \in A^\chi$  et  $A^\chi$  est bien un sous- $(A^G, A^G)$ -bimodule de  $A$ .

On suppose que  $G$  est fini. Si  $x \in A$  alors

$$\prod_{g \in G} (T - g(x)) \in A^G[T]$$

est bien défini car  $G$  est fini et est un polynôme unitaire à coefficients dans  $A^G$  dont  $x$  est racine. ■

On suppose à présent  $A$  commutatif et on s'intéresse aux anneaux de fractions de  $A$ . Le cas le plus riche est celui où  $G$  est fini.

**Proposition 1.8 — Groupe, anneau et partie multiplicative.** Soient  $G$  un groupe,  $A$  un anneau commutatif unitaire,  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(A)$  un morphisme de groupes,  $S$  une partie multiplicative de  $A$  stable par  $G$  (c'est-à-dire telle que  $gS \subset S$  pour tout  $g \in G$ ).

On pose  $S^G = S \cap A^G$ . L'ensemble  $S^G$  est une partie multiplicative de  $A^G$ . Le morphisme  $\varphi$  s'étend en un morphisme  $\tilde{\varphi} : G \rightarrow \text{Aut}(S^{-1}A)$  et on a un morphisme canonique  $\psi : (S^G)^{-1}A^G \rightarrow (S^{-1}A)^G$ .

Si  $G$  est fini alors  $\psi$  est un bijetif.

**Preuve.** Par définition  $S^G \subset A^G$ . Comme  $1 \in S$  et  $1 \in A^G$ , on a  $1 \in S^G$ . Si  $x, y \in S^G$  alors  $xy \in S$  (car  $S$  est multiplicative) et  $xy \in A^G$  (car  $A^G$  est un sous-anneau) donc  $S^G$  est une partie multiplicative de  $A^G$ .

On a  $gS \subset S$  pour tout  $g \in G$ . On en déduit successivement  $g^{-1}S \subset S$  puis  $S \subset gS$  et donc  $gS = S$  pour tout  $g \in G$ . Ainsi  $\varphi$  est à valeurs dans le sous-groupe

$$\text{Aut}_S(A) = \{\delta \in \text{Aut}(A), \quad \delta(S) = S\}$$

de  $\text{Aut}(A)$ . Or la propriété universelle de  $S^{-1}A$  assure l'existence d'un morphisme de groupe de  $\text{Aut}_S(A)$  dans  $\text{Aut}(S^{-1}A)$ . Par composition, on obtient ainsi le morphisme  $\tilde{\varphi}$  souhaité. Par construction, on a

$$\forall (a, s, g) \in A \times S \times G, \quad \tilde{\varphi}(g) \left( \frac{a}{s} \right) = \frac{ga}{gs}.$$

Le morphisme canonique  $i : A \rightarrow S^{-1}A$  commute avec l'action de  $G$ . En effet, Pour  $g \in G$  et  $a \in A$ , on a

$$i(ga) = \frac{ga}{1} = \frac{ga}{g1} = g \frac{a}{1} = gi(a).$$

On en déduit immédiatement que  $i$  induit un morphisme d'anneau de  $A^G$  dans  $(S^{-1}A)^G$ . En effet, pour  $a, b \in A^G$  et  $g \in A^G$ , on a

$$gi(a) = i(ga) = i(a), \quad i(a+b) = i(a) + i(b), \quad i(ab) = i(a)i(b) \quad \text{et} \quad i(1) = 1.$$

De plus, si  $s \in S^G$  alors  $i(s)$  est inversible dans  $S^{-1}A$  et appartient à  $(S^{-1}A)^G$ . Le lemme 1.7 montre que  $i(s) \in ((S^{-1}A)^G)^\times$ . La propriété universelle de  $(S^G)^{-1}A^G$  permet de construire le morphisme  $\psi$  souhaité. Il est donné par

$$\forall (a, s) \in A^G \times S^G, \quad \psi \left( \frac{a}{s} \right) = \frac{a}{s}.$$

Supposons à présent que  $G$  est fini et montrons la bijectivité de  $\psi$ . Commençons par l'injectivité. Soit  $(a, s) \in A^G \times S^G$  tel que  $a/s \in \text{Ker } \psi$ . On a donc  $a/s = 0$  dans  $(S^{-1}A)^G \subset S^{-1}A$ . Par définition, il existe  $t \in S$  tel que  $ta = 0$ . Comme  $G$  est fini, on peut poser

$$t' = \prod_{g \in G} (gt) \in A.$$

Par construction  $t' \in A^G$  et comme  $gS \subset S$  pour tout  $g \in G$ , on a  $t' \in S$ . Ainsi  $t' \in S^G$ . Par ailleurs, on a  $t'a = 0$  et donc  $a/s = 0$  dans  $(S^G)^{-1}A^G$ . Ainsi  $\psi$  est injective.

Passons à la surjectivité de  $\psi$ . Soit  $a/s \in (S^{-1}A)^G$  avec  $a \in A$  et  $s \in S$ . Comme  $G$  est fini, on peut définir

$$s' = \prod_{g \in G} (gs) \in A, \quad s'' = \prod_{g \in G \setminus \{1\}} (gs) \in A \quad \text{et} \quad a' = as'' \in A.$$

Par construction  $s' \in A^G$  et comme  $gS \subset S$  pour tout  $g \in G$ , on a  $s' \in S$ . Ainsi  $s' \in S^G$ . Par ailleurs, on a  $a/s = (as'')/(ss'') = a'/s'$ . Comme  $a/s$  est fixe par  $G$  et  $s'$  aussi, on en déduit que

$$\forall g \in G, \quad g(a/s) = g(a'/s') = (ga')/(gs') = (ga')/s' = a/s = a'/s'.$$

On en déduit qu'il existe  $t_g \in S$  tel que  $t_g(ga' - a') = 0$ . On définit alors

$$t'_g = \prod_{g' \in G} g'(t_g) \in S^G \quad \text{et} \quad t' = \prod_{g \in G} t'_g \in S^G.$$

Par construction de  $t'$ , on a  $t'(ga' - a') = 0$  pour tout  $g \in G$ . On en déduit que, pour tout  $g \in G$ ,

$$g(t'a') = g(t')g(a') = t'(ga') = t'a'.$$

Finalement  $a/s = a'/s' = t'a'/t's'$  avec  $t's' \in S^G$  et  $t'a' \in A^G$ . On obtient donc  $a/s = \psi(a't'/s't')$  ce qui donne la surjectivité de  $\psi$ . ■

On ajoute à présent à la situation précédente un morphisme de  $G$  dans  $A^\times$ .

**Proposition 1.9 — Groupe, anneau et partie multiplicative et caractère.** Soient  $G$  un groupe,  $A$  un anneau commutatif unitaire,  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(A)$  un morphisme de groupes,  $\chi : G \rightarrow A^\times$  un morphisme de groupes,  $S$  une partie multiplicative de  $A$  stable par  $G$  et  $S^G = S \cap A^G$ .

Le morphisme  $\chi$  s'étend en un morphisme de groupes (encore noté  $\chi$ ) de  $G$  dans  $S^{-1}A$ . Le morphisme canonique  $i : A \rightarrow S^{-1}A$  induit un morphisme de  $A^G$ -modules de  $A^\chi$  dans  $(S^{-1}A)^\chi$  et s'étend, de façon unique, en un morphisme  $j$  de  $(S^G)^{-1}A^G$ -modules de  $(S^G)^{-1}A^\chi$  dans  $(S^{-1}A)^\chi$ .

Si  $G$  est fini alors  $j$  est bijectif.

**Preuve.** On note  $i : A \rightarrow S^{-1}A$  le morphisme canonique. L'application  $i$  induit un morphisme de groupes de  $A^\times$  dans  $(S^{-1}A)^\times$  et donc par composition un morphisme de  $G$  dans  $(S^{-1}A)^\times$ . Ainsi  $(S^{-1}A)^\chi$  est bien défini et un  $(S^{-1}A)^G$ -module (lemme 1.7). C'est donc aussi, d'après la proposition 1.8, un  $(S^G)^{-1}A^G$ -module.

Par ailleurs, pour  $g \in G$  et  $a \in A^\chi$ , on a

$$gi(a) = g(a/1) = (ga)/(g1) = (ga)/1 = i(ga) = i(\chi(g)a) = (\chi(g)a)/1 = (\chi(g)/1)(a/1) = \chi(g)i(a).$$

Ainsi  $i$  induit bien une application de  $A^\chi$  dans  $(S^{-1}A)^\chi$ . De plus, pour  $a, b \in A^\chi$  et  $c \in A^G$ , on a

$$i(a+b) = i(a) + i(b) \quad \text{et} \quad i(ca) = (ca)/1 = (c/1)(a/1) = ci(a)$$

et  $i$  est bien  $A^G$ -linéaire.

Montrons à présent l'existence de  $j$ . Elle va résulter de l'adjonction des foncteurs restriction et extension des scalaires pour les anneaux  $A^G$  et  $(S^G)^{-1}A^G$ . De façon précise, on a l'isomorphisme

$$\text{Hom}_{A^G}(A^\chi, (S^{-1}A)^\chi) \simeq \text{Hom}_{(S^G)^{-1}A^G}((S^G)^{-1}A^\chi, (S^{-1}A)^\chi).$$

On définit alors  $j$  comme le morphisme correspondant à  $i$  dans cette bijection. En suivant les flèches, on obtient que  $j$  vérifie  $j(a/s) = a/s$  pour tout  $a \in A^\chi$  et  $s \in S^G$ .

Montrons à présent la bijectivité de  $j$  lorsque  $G$  est fini. Commençons par l'injectivité. Si  $j(a/s) = 0$  alors  $a/s = 0$  dans  $(S^{-1}A)^\chi \subset S^{-1}A$  et donc il existe  $t \in S$  tel que  $ta = 0$ . Comme  $G$  est fini, on peut définir

$$t' = \prod_{g \in G} (gt) \in A.$$

Par construction  $t' \in A^G$  et comme  $gS \subset S$  pour tout  $g \in G$ , on a  $t' \in S$ . Ainsi  $t' \in S^G$ . Par ailleurs, on a  $t'a = 0$  et donc  $a/s = 0$  dans  $(S^G)^{-1}A^\chi$ . Ainsi  $j$  est injective.

Passons à la surjectivité de  $j$ . Soit  $a/s \in (S^{-1}A)^\chi$  (avec  $a \in A$  et  $s \in S$ ). Comme  $G$  est fini, on peut définir

$$s' = \prod_{g \in G} (gs) \in A, \quad s'' = \prod_{g \in G \setminus \{1\}} (gs) \in A \quad \text{et} \quad a' = s''a \in A.$$

Par construction  $s' \in A^G$  et comme  $gS \subset S$  pour tout  $g \in G$ , on a  $s' \in S$ . Ainsi  $s' \in S^G$ . Par ailleurs, on a  $a/s = a'/s'$ . Comme  $a/s \in (S^{-1}A)^\chi$  et que  $s' \in S^G$ , on en déduit que

$$g(a/s) = g(a'/s') = (ga')/(gs') = (ga')/s' = \chi(g)(a/s) = \chi(g)a'/s' = (\chi(g)a')/s'.$$

On en déduit qu'il existe  $t_g \in S$  tel que  $t_g(ga' - \chi(g)a) = 0$ . On définit alors

$$t'_g = \prod_{g' \in G} g'(t_g) \in S^G \quad \text{et} \quad t' = \prod_{g \in G} t'_g \in S^G.$$

Par construction, on a  $t'(ga' - \chi(g)a') = 0$  pour tout  $g \in G$  et donc  $g(t'a') = g(t')g(a') = t'(ga') = \chi(g)t'a'$  pour tout  $g \in G$ . On a alors  $a/s = a'/s' = t'a'/t's'$  avec  $t's' \in S^G$  et  $t'a' \in A^\chi$ . Ainsi  $a/s = j(t'a'/s't')$  ce qui donne la surjectivité de  $j$ . ■

## MODULE DE FRACTIONS ET GROUPE D'AUTOMORPHISMES

On étudie pour finir le cas d'un module. On introduit, pour cela, la notation suivante : lorsque  $M$  est un groupe,  $\text{Aut}_{\text{gr}}(M)$  désigne les automorphismes du groupe  $M$ .

**Proposition 1.10 – Groupe, module, anneau et partie multiplicative et caractère.** Soient  $G$  un groupe,  $A$  un anneau unitaire et  $M$  un  $A$ -module. On suppose donné  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(A)$  un morphisme de groupes,  $\chi : G \rightarrow (ZA)^\times$  un morphisme de groupes,  $\lambda : G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(M)$  un morphisme de groupes vérifiant

$$\forall (a, m) \in A \times M, \quad g(am) = (ga)(gm).$$

On définit  $M^\chi = \{m \in M, \forall g \in G, gm = \chi(g)m\}$ . C'est un sous- $A^G$ -modules de  $M$ .

On suppose que  $A$  est commutatif, on considère  $S$  une partie multiplicative de  $A$  stable par  $G$  et on pose  $S^G = S \cap A^G$ . On note  $\tilde{\varphi} : G \rightarrow \text{Aut}(S^{-1}A)$ , le « prolongement » de  $\varphi$  (voir la proposition 1.8).

Le morphisme  $\lambda$  s'étend en un morphisme de groupes de  $\tilde{\lambda} : G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(S^{-1}M)$  vérifiant

$$\forall (g, a, s, s', m) \in G \times A \times S \times S \times M, \quad \tilde{\lambda}(g) \left( \frac{a}{s} \frac{m}{s'} \right) = \tilde{\varphi}(g) \left( \frac{a}{s} \right) \tilde{\lambda}(g) \left( \frac{m}{s'} \right).$$

On note encore  $\chi : G \rightarrow (S^{-1}A)^\chi$  le « prolongement » de  $\chi : G \rightarrow A^\chi$  (proposition 1.9). Le morphisme canonique  $i_M : M \rightarrow S^{-1}M$  induit un morphisme de  $A^G$ -modules de  $M^\chi$  dans  $(S^{-1}M)^\chi$  et s'étend, de façon unique, en un morphisme  $j_M$  de  $(S^G)^{-1}A^G$ -modules de  $(S^G)^{-1}M^\chi$  dans  $(S^{-1}M)^\chi$ .

Si  $G$  est fini alors  $j_M$  est bijectif.

**Preuve.** Pour  $g \in G$  et  $m, m' \in M^\chi$  et  $a \in A^G$ , on a  $g0 = \chi(g)0 = 0$  et

$$g(m + m') = gm + gm' = \chi(g)m + \chi(g)m' = \chi(g)(m + m') \quad \text{et} \quad g(am) = (ga)(gm) = a\chi(g)m = \chi(g)am.$$

Ainsi  $M^\chi$  est bien un sous- $A^G$ -module de  $M$ .

Construisons  $\tilde{\lambda}$ . On identifie pour cela  $S^{-1}M$  et  $S^{-1}A \otimes_A M$ . Pour  $g \in G$ , on a  $\tilde{\varphi}(g) \in \text{End}_{\text{gr}}(S^{-1}A)$  et  $\lambda(g) \in \text{End}_{\text{gr}}(M)$ . On peut donc considérer l'endomorphisme  $\tilde{\varphi}(g) \otimes \lambda(g)$  du groupe abélien  $S^{-1}A \otimes_{\mathbb{Z}} M$  puis le composer avec la surjection canonique  $\pi$  de  $S^{-1}A \otimes_{\mathbb{Z}} M$  dans  $S^{-1}A \otimes_A M$ . On note alors  $\delta_g = \pi \circ (\tilde{\varphi}(g) \otimes \lambda(g))$ . Par construction, on a

$$\forall (a, s, m) \in A \times S \times M, \quad \delta_g(a/s \otimes m) = g(a/s) \otimes gm.$$

De plus, pour  $a, a' \in A$ ,  $s \in S$  et  $m \in M$ , on a

$$\delta_g(a'(a/s) \otimes m) = g(a'a/s) \otimes gm = g(a/s)(ga') \otimes gm = g(a/s) \otimes (ga')gm = g(a/s) \otimes g(a'm) = \delta_g((a/s) \otimes a'm).$$

On en déduit que  $\delta_g$  passe au quotient par le sous-groupe  $\langle xa \otimes y - x \otimes ay, \quad x \in S^{-1}A, \quad y \in M, \quad a \in A \rangle$  et définit donc un endomorphisme  $\tilde{\lambda}(g)$  de  $S^{-1}A \otimes_A M = S^{-1}M$ . Par construction, on a,

$$\forall (g, m, s) \in G \times M \times S, \quad \tilde{\lambda}(g)(m/s) = gm/gs.$$

On a alors, pour  $g \in G$ ,  $a \in A$ ,  $s, s' \in S$  et  $m \in M$ ,

$$\tilde{\lambda}(g) \left( \frac{a m}{s s'} \right) = \tilde{\lambda}(g) \left( \frac{am}{ss'} \right) = \frac{g(am)}{g(ss')} = \frac{(ga)(gm)}{(gs)(gs')} = \frac{ga}{gs} \frac{gm}{gs'} = \tilde{\varphi}(g) \left( \frac{a}{s} \right) \tilde{\lambda}(g) \left( \frac{m}{s'} \right).$$

Enfin, on a  $\tilde{\lambda}(1_G) = \text{id}_{S^{-1}M}$  et pour  $g, g' \in G$ ,  $m \in M$  et  $s \in S$ , on a

$$\tilde{\lambda}(gg')(m/s) = (gg'm)/(gg's) = g(g'm/g's) = \tilde{\lambda}(g)\tilde{\lambda}(g')(m/s)$$

Ainsi  $\tilde{\lambda}(g) \in \text{Aut}_{\text{gr}}(S^{-1}M)$  et  $\tilde{\lambda}$  est un morphisme de groupes.

Passons à l'étude de  $i_M$ . Pour  $g \in G$  et  $m \in M^\chi$ , on a

$$gi_M(m) = g(m/1) = (gm)/(g1) = gm/1 = i_M(gm) = i_M(\chi(g)m) = (\chi(g)m)/1 = (\chi(g)/1)(m/1) = \chi(g)i_M(m).$$

Ainsi  $i_M$  induit bien une application de  $M^\chi$  dans  $(S^{-1}M)^\chi$ . De plus, pour  $m, m' \in M^\chi$  et  $a \in A^G$ , on a

$$i_M(m + m') = i_M(m) + i_M(m') \quad \text{et} \quad i_M(am) = (am)/1 = (a/1)(m/1) = ai_M(m)$$

et  $i_M$  est bien  $A^G$ -linéaire.

Montrons à présent l'existence de  $j_M$ . Elle va résulter de l'adjonction des foncteurs restriction et extension des scalaires pour les anneaux  $A^G$  et  $(S^G)^{-1}A^G$ . De façon précise, on a l'isomorphisme

$$\text{Hom}_{A^G}(M^\chi, (S^{-1}M)^\chi) \simeq \text{Hom}_{(S^G)^{-1}A^G}((S^G)^{-1}M^\chi, (S^{-1}M)^\chi).$$

On définit alors le morphisme  $j_M$  comme le morphisme correspondant à  $i_M$  dans cette bijection. En suivant les flèches, on obtient que  $j_M(m/s) = m/s$  pour tout  $m \in A^\chi$  et  $s \in S^\chi$ .

Montrons à présent la bijectivité de  $j_M$  lorsque  $G$  est fini. Commençons par l'injectivité. Soit  $(m, s) \in M^\chi \times S^G$  tel que  $j_M(m/s) = 0$ . On a  $m/s = 0$  dans  $(S^{-1}M)^\chi \subset S^{-1}M$  et donc il existe  $t \in S$  tel que  $tm = 0$ . Comme  $G$  est fini, on peut définir

$$t' = \prod_{g \in G} (gt) \in A.$$

Par construction  $t' \in A^G$  et comme  $gS \subset S$  pour tout  $g \in G$ , on a  $t' \in S$ . Ainsi  $t' \in S^G$ . Par ailleurs, on a  $t'm = 0$  et donc  $m/s = 0$  dans  $(S^G)^{-1}M^\chi$ . Ainsi  $j_M$  est injective.

Passons à la surjectivité de  $j_M$ . Soit  $m/s \in (S^{-1}M)^\chi$  avec  $m \in A$  et  $s \in S$ . Comme  $G$  est fini, on peut définir

$$s' = \prod_{g \in G} (gs) \in A, \quad s'' = \prod_{g \in G \setminus \{1\}} (gs) \in A \quad \text{et} \quad m' = s''m \in M.$$

Par construction, on a  $s' \in A^G$  et comme  $gS \subset S$  pour tout  $g \in G$ , on a  $s' \in S$ . Ainsi  $s' \in S^G$ . Par ailleurs, on a  $m/s = (ms'')/ss'' = m'/s'$ . Comme  $m/s \in (S^{-1}M)^\chi$  et que  $s'$  est fixé par  $G$ , on en déduit que

$$(\chi(g)m')/s' = \chi(g)(m'/s') = \chi(g)m/s = g(m/s) = g(m'/s') = (gm')/(gs') = (gm')/s'.$$

On en déduit qu'il existe  $t_g \in S$  tel que  $t_g(gm' - \chi(g)m') = 0$ . On définit alors

$$t'_g = \prod_{g' \in G} g'(t_g) \in S^G \quad \text{et} \quad t' = \prod_{g \in G} t'_g \in S^G.$$

Par construction, on a  $t'(gm' - \chi(g)m') = 0$  pour tout  $g \in G$  et donc  $g(t'm') = g(t')g(m') = t'(gm') = \chi(g)t'm'$  pour tout  $g \in G$ . Finalement, on a  $m/s = m'/s' = t'm'/t's'$  avec  $t's' \in S^G$  et  $t'm' \in M^\chi$ . On a donc  $m/s = j_M(t'm'/s't')$  et  $j_M$  est bien surjective. ■

**Remarque 1.11 –  $\chi = 1$ .** On reprend la proposition 1.10 dans le cas où  $\chi : G \rightarrow (ZA)^\times$  est donné par  $\chi(g) = 1$  pour tout  $g \in G$ . L'ensemble  $M^\chi$  est alors par définition  $\{m \in M, gm = m\}$  et se note plutôt  $M^G$ . C'est un sous- $A^G$ -module de  $M$ .

Par ailleurs, le prolongement de  $\chi$  à  $(S^{-1}A)^\times$  vérifie encore  $\chi(g) = 1$  pour tout  $g \in G$ . Ainsi  $i_M$  induit un morphisme de  $M^G$  dans  $(S^{-1}M)^G$  qui se prolonge de façon unique en un morphisme  $j_M$  de  $(S^G)^{-1}M^G$  dans  $(S^{-1}M)^G$ . Lorsque  $G$  est fini,  $j_M$  est bijectif. ■

**Exemple 1.12 –  $M = A$ .** Les résultats de la proposition 1.10 appliqués à  $M = A$  redonnent les résultats de la proposition 1.9. ■

## 1.1.2 GRADUATION

Dans cette sous-section, on étudie les propriétés de graduation, essentiellement en vue de la section 2.2 dans laquelle on utilisera la bigraduation de l'algèbre  $S(V^*) \otimes \Lambda(M^*)$ . Toujours dans cet objectif, on donne des exemples de calculs pour les algèbres extérieures et symétriques, en particulier les formules 1.20 de Molien. L'outil principal développé dans cette section est la notion de série de Poincaré (voir la définition 1.15). On finit en donnant deux énoncés dus à Springer (corollaire 1.22 et lemme 1.23) en vue de la démonstration du théorème 1.35 de Chevalley-Shephard-Todd.

### DÉFINITIONS

On définit deux types de graduations : graduation de type  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{N}^2$ . Ce deuxième type de graduation est appelé bigraduation. Dans [BBKA, II.11], on trouvera une étude bien plus riche de ces problèmes de graduation.

**Définition 1.13 – Graduation et bigraduation.** Soit  $k$  un corps. Un  $k$ -espace vectoriel gradué est un  $k$ -espace vectoriel  $M$  muni d'une décomposition en somme directe

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$$

où  $M_i$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Pour  $i \in \mathbb{N}$ , on dit que  $M_i$  est la *composante homogène de degré  $i$  de  $M$* . Un endomorphisme  $f \in \text{End}_k(M)$  est dit *gradué* si  $f(M_i) \subset M_i$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . On note alors  $f_i$  l'endomorphisme de  $M_i$  induit par  $f$ . Si  $M$  est de plus une  $k$ -algèbre, on dit que  $M$  est une  *$k$ -algèbre graduée* si  $M_i M_j \subset M_{i+j}$  pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ .

Un  $k$ -espace vectoriel bigradué est un  $k$ -espace vectoriel  $M$  muni d'une décomposition en somme directe

$$M = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} M_{i,j}$$

où  $M_{i,j}$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie, pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ . Pour  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ , on dit que  $M_{i,j}$  est la *composante homogène de degré  $(i, j)$  de  $M$* . Un endomorphisme  $f \in \text{End}_k(M)$  est dit *bigradué* si  $f(M_{i,j}) \subset M_{i,j}$  pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ . On note alors  $f_{i,j}$  l'endomorphisme de  $M_{i,j}$  induit par  $f$ .

**Exemple 1.14 – Algèbre symétrique et extérieure.** Soient  $k$  un corps et  $V$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $r$ . L'algèbre symétrique  $S(V)$  de  $V$  est une  $k$ -algèbre graduée. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $S_n(V)$  la composante homogène de degré  $n$  de  $S(V)$ .

De même, l'algèbre extérieure  $\Lambda(V)$  de  $V$  est une  $k$ -algèbre graduée. Pour  $p \in \mathbb{N}$ , on note  $\Lambda^p(V)$  la composante homogène de degré  $p$  de  $\Lambda(V)$ . ■

### SÉRIE DE POINCARÉ

Sous leur abord naïf, les séries de Poincaré (voir la définition 1.15) sont en fait un outil très puissant dans l'étude des graduations, notamment grâce au lemme 1.16. Les résultats utiles pour la suite sont les formules 1.20 de Molien et leur corollaire 1.21.

**Définition 1.15 – Séries de Poincaré.** Soit  $k$  un corps. Pour

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$$

un  $k$ -espace vectoriel gradué, on définit la *série de Poincaré de  $M$*  ou *dimension graduée de  $M$*  par

$$P_M(T) = \text{grdim}(M) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \dim_k M_i T^i \in \mathbb{Z}[[T]].$$

Pour  $f$  un endomorphisme gradué de  $M$ , on définit la *série de Poincaré de  $f$*  ou *trace graduée de  $f$*  par

$$P_f(T) = \text{grtr}(f) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}(f_i) T^i \in k[[T]].$$

Pour un  $k$ -espace vectoriel bigradué

$$M = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} M_{i,j}$$

on définit la *série de Poincaré* de  $M$  ou *dimension graduée de  $M$*  par

$$P_M(T, U) = \text{grdim}(M) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \dim_k M_{i,j} T^i U^j \in \mathbb{Z}[[T, U]].$$

Pour  $f$  un endomorphisme bigradué de  $M$ , on définit la *série de Poincaré de  $f$*  ou *trace graduée de  $f$*  par

$$P_f(T) = \text{grtr}(f) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \text{tr}(f_{i,j}) T^i U^j \in k[[T, U]].$$

Les séries de Poincaré se comportent remarquablement bien vis-à-vis du produit tensoriel et de la somme directe (lemme 1.16). Ces propriétés permettent de nombreux calculs qui donnent toute leur puissance aux séries de Poincaré.

**Lemme 1.16 — Graduation, somme directe et produit tensoriel.** Soit  $k$  un corps. On considère

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i \quad \text{et} \quad N = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} N_i$$

deux  $k$ -espaces vectoriels gradués. Alors  $M \oplus N$  est un  $k$ -espace vectoriel gradué par

$$M \oplus N = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (M_i \oplus N_i)$$

et  $M \otimes N$  est un  $k$ -espace vectoriel bigradué par

$$M \otimes N = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} (M_i \otimes N_j)$$

$$\text{et gradué par} \quad M \otimes N = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \left( \bigoplus_{i=0}^n (M_i \otimes N_{n-i}) \right)$$

Cette dernière graduation sur  $M \otimes N$  est appelé *graduation totale*. De plus, on a

$$P_{M \oplus N}(T) = P_M(T) + P_N(T), \quad P_{M \otimes N}(T, U) = P_M(T)P_N(U) \quad \text{et} \quad P_{M \otimes N}(T) = P_M(T)P_N(T).$$

Soient  $f$  (resp.  $g$ ) un endomorphisme gradué de  $M$  (resp.  $N$ ) alors  $f \oplus g$  est un endomorphisme gradué de  $M \oplus N$  et  $f \otimes g$  est un endomorphisme bigradué et gradué de  $M \otimes N$ . De plus, on a

$$P_{f \oplus g}(T) = P_f(T) + P_g(T), \quad P_{f \otimes g}(T, U) = P_f(T)P_g(U) \quad \text{et} \quad P_{f \otimes g}(T) = P_f(T)P_g(T).$$

**Preuve.** Comme  $M_i \oplus N_i$  est de dimension finie et  $\dim_k(M_i \oplus N_i) = \dim_k M_i + \dim_k N_i$ , on obtient les résultats souhaités sur la somme directe.

Comme  $M_i \otimes N_j$  est de dimension finie et  $\dim_k(M_i \otimes N_j) = \dim_k M_i \dim_k N_j$

$$P_{M \otimes N}(T, U) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \dim_k M_i \dim_k N_j T^i U^j = \left( \sum_{i \in \mathbb{N}} \dim_k M_i T^i \right) \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} \dim_k N_j U^j \right) = P_M(T)P_N(U)$$

$$\text{et} \quad P_{M \otimes N}(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^n \dim_k M_i \dim_k N_{n-i} T^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^n (\dim_k M_i T^i)(\dim_k N_{n-i} T^{n-i}) = P_M(T)P_N(T).$$

Pour  $i \in \mathbb{N}$ , on a  $(f \oplus g)(M_i \oplus N_i) \subset M_i \oplus N_i$ . Ainsi  $f \oplus g$  est gradué et  $(f \oplus g)_i = f_i \oplus g_i$ . La relation sur les séries de Poincaré en découle immédiatement.

Pour  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ , on a  $(f \otimes g)(M_i \otimes N_j) \subset M_i \otimes N_j$ . Ainsi  $f \otimes g$  est bigradué et gradué. De plus  $(f \otimes g)_{i,j} = f_i \otimes g_j$  et, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(f \otimes g)_n = \bigoplus_{i=0}^n (f_i \otimes g_{n-i}).$$

Par ailleurs, si  $E, F$  sont deux  $k$ -espaces vectoriels et  $u \in \text{End}_k(E)$  et  $v \in \text{End}_k(F)$ , on a  $\text{tr}(u \otimes v) = \text{tr}(u)\text{tr}(v)$ . On en déduit que

$$P_{f \otimes g}(T, U) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \text{tr}(f_i) \text{tr}(g_j) T^i U^j = \left( \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}(f_i) T^i \right) \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{tr}(g_j) U^j \right) = P_f(T)P_g(U)$$

$$\text{et} \quad P_{f \otimes g}(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^n \text{tr}(f_i) \text{tr}(g_{n-i}) T^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^n (\text{tr}(f_i) T^i)(\text{tr}(g_{n-i}) T^{n-i}) = P_f(T)P_g(T).$$

■

On donne à présent trois exemples de calcul de série de Poincaré très utile pour la suite : notamment ceux de l'algèbre symétrique (exemple 1.18) et d'une algèbre de polynômes (exemple 1.19).

**Exemple 1.17 – Trace et dimension.** Soient  $k$  un corps de caractéristique nulle et  $M$  un  $k$ -espace vectoriel gradué (resp. bigradué). Alors  $\text{id}_M$  est un endomorphisme gradué (resp. bigradué) et  $\text{grtr}(\text{id}_M) = \text{grdim}(M)$ . ■

**Exemple 1.18 – Algèbre symétrique et extérieure.** Soient  $k$  un corps et  $V$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $r$ . On a

$$P_{S(V)}(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{n+r-1}{r-1} T^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{n+r-1}{n} T^n = (1-T)^{-r}.$$

et

$$P_{\Lambda(V)}(T) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \binom{r}{p} T^p = (1+T)^r.$$

Les deux premières égalités résultent de l'exercice 4.1 de [BPM]. Les deux dernières sont immédiates. L'égalité  $P_{S(V)}(T) = (1-T)^{-r}$  résulte du fait que  $S(V) = S(k)^{\otimes r}$ , du lemme 1.16 et de l'égalité

$$P_{S(k)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} T^n = (1-T)^{-1}.$$

Lorsque  $k$  est de caractéristique nulle, l'exemple 1.17 et la proposition 1.20 donne aussi le résultat. ■

**Exemple 1.19 – Algèbre de Polynôme.** Soient  $A$  une  $k$ -algèbre graduée,  $P_1, \dots, P_r \in A$  avec  $P_i$  homogène de degré  $d_i$ . On suppose que la famille  $(P_1, \dots, P_r)$  est algébriquement indépendante. On a alors

$$P_{k[P_1, \dots, P_r]}(T) = \prod_{i=1}^r (1-T^{d_i})^{-1}.$$

En effet, l'indépendance algébrique des  $P_i$  donne l'isomorphisme de  $k$ -espaces vectoriels gradués

$$k[P_1, \dots, P_r] = k[P_1] \otimes \cdots \otimes k[P_r] \quad \text{avec} \quad P_{k[P_i]}(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} T^{nd_i} = (1-T^{d_i})^{-1}.$$

Le lemme 1.16 donne alors le résultat. ■

Les deux résultats suivants permettent de calculer la trace graduée dans le cas de l'algèbre symétrique et de l'algèbre alternée d'un espace vectoriel.

**Proposition 1.20 – Formules de Molien.** Soient  $k$  un corps,  $V$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \text{End}_k(V)$ . Alors  $f$  définit un endomorphisme gradué  $f_S$  (resp.  $f_\Lambda$ ) de  $S(V)$  l'algèbre symétrique de  $V$  (resp.  $\Lambda(V)$  l'algèbre extérieure de  $V$ ). On a alors

$$P_{f_S}(T) = \det(\text{id} - fT)^{-1} \quad \text{et} \quad P_{f_\Lambda}(T) = \det(\text{id} + fT).$$

**Preuve.** On peut étendre les scalaires et supposer  $f$  trigonalisable. Soit  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $V$  dans laquelle la matrice de  $f$  est triangulaire inférieure et les termes diagonaux sont  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ .

En ordonnant lexicographiquement la famille  $(e_1^{i_1} e_2^{i_2} \cdots e_r^{i_r})_{i_1+\cdots+i_r=n}$ , on obtient une base de  $S_n(V)$  dans laquelle la matrice de l'endomorphisme induit par  $f$  est triangulaire inférieure. Le terme diagonal correspondant à  $e_1^{i_1} e_2^{i_2} \cdots e_r^{i_r}$  est  $\lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_r^{i_r}$ . On en déduit que

$$P_{f_S}(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i_1+\cdots+i_r=n} \lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_r^{i_r} T^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i_1+\cdots+i_r=n} (\lambda_1 T)^{i_1} \cdots (\lambda_r T)^{i_r} = \prod_{i=1}^r \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_i T)^n = \prod_{i=1}^r (1 - \lambda_i T)^{-1}.$$

On obtient bien ainsi le résultat souhaité (voir aussi [BBK, V.5.3 lemme 2]).

En ordonnant lexicographiquement la famille  $(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq r}$ , on obtient une base de  $\Lambda^p(V)$  dans laquelle la matrice de l'endomorphisme induit par  $f$  est triangulaire inférieure. Le terme diagonal correspondant à  $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$  est  $\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_p}$ . On en déduit que

$$P_{f_\Lambda}(T) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq r} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_p} T^p = \sum_{p=0}^r \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq r} (\lambda_{i_1} T) \cdots (\lambda_{i_p} T) = \prod_{i=1}^r (1 + \lambda_i T) = \det(1 + fT). ■$$

Les formules de Molien permettent de calculer la série de Poincaré des invariants de l'algèbre symétrique.

**Corollaire 1.21 – Série de Poincaré des invariants.** Soient  $k$  un corps de caractéristique nulle,  $V$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie,  $G$  un sous-groupe fini de  $\text{GL}(V)$ ,  $S(V^*)$  l'algèbre symétrique du dual de  $V$  et  $S(V^*)^G$  l'algèbre des invariants de  $S(V^*)$ . La série de Poincaré de  $S(V^*)^G$  est

$$P_{S(V^*)^G}(T) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \det(1 - gT)^{-1}.$$

**Preuve.** On note  $S_n(V^*)^G$  la composante homogène de degré  $n$  de  $S(V^*)^G$  et  $g_n$  l'endomorphisme de  $S_n(V^*)$  induit par  $g \in G$ . Par définition, on a

$$P_{S(V^*)^G}(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \dim(S_n(V^*)^G) T^n.$$

Par ailleurs, si  $M$  est un  $G$ -module alors

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

est un projecteur d'image  $M^G$ . Avec  $M = S_n(V^*)$ , on en déduit que

$$\dim(S_n(V^*)^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(g_n).$$

On obtient ainsi

$$P_{S(V^*)^G}(T) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(g_n) T^n.$$

La formule 1.20 de Molien donne alors

$$P_{S(V^*)^G}(T) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \det(\text{id} - {}^t g^{-1} T) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \det(\text{id} - g T).$$

Toujours grâce aux séries de Poincaré, on obtient de nombreuses informations sur les degrés d'une famille algébriquement libre d'éléments invariants de  $S(V^*)$  : c'est le sens du corollaire suivant dû à Springer (voir [SPR1, théorème 2.4]) utile pour la démonstration du théorème 1.35 de Chevalley-Shephard-Todd.

**Corollaire 1.22 — Éléments invariants algébriquement indépendants.** Soient  $k$  un corps de caractéristique nulle,  $V$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $\ell$ ,  $G$  un sous-groupe fini de  $\text{GL}(V)$ ,  $S(V^*)$  l'algèbre symétrique du dual de  $V$  et  $S(V^*)^G$  l'algèbre des invariants de  $S(V^*)$ . On suppose que  $(P_1, \dots, P_\ell)$  est une famille d'éléments invariants de  $S(V^*)$  homogènes algébriquement indépendants. Pour  $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ , on pose  $d_i = \deg P_i$ . On a alors

$$(i) \prod_{i=1}^{\ell} d_i \geq |G|;$$

$$(ii) \text{ Si } \prod_{i=1}^{\ell} d_i = |G| \text{ alors } \sum_{i=1}^{\ell} (d_i - 1) \leq |\mathcal{S}| \text{ où } \mathcal{S} \text{ est le nombre de réflexions contenue dans } G \text{ (voir la définition 1.24 et la remarque 1.25);}$$

$$(iii) \text{ De plus, si } S(V^*)^G = k[P_1, \dots, P_\ell] \text{ alors}$$

$$\prod_{i=1}^{\ell} d_i = |G| \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\ell} (d_i - 1) = |\mathcal{S}|.$$

**Preuve.** On a  $S_n(V^*)^G \subset S_n(V^*)$ . L'exemple 1.18 assure alors que  $\dim_k(S_n(V^*)^G) \leq C_{n+\dim V-1}^n$ . Toujours avec l'exemple 1.18, on en déduit que la série entière  $P_{S(V^*)^G}$  a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Comme les  $P_i$  sont invariants, la  $k$ -algèbre graduée  $k[P_1, \dots, P_\ell]$  est contenue dans  $S(V^*)^G$ . On en déduit que, pour  $n \in \mathbb{N}$ , la composante homogène de degré  $n$  de  $k[P_1, \dots, P_\ell]$  est de dimension inférieure à celle  $S_n(V^*)^G$ . L'exemple 1.19 et le corollaire 1.21 donne alors, pour tout  $t \in [0, 1[$ ,

$$\prod_{i=1}^{\ell} (1 - t^{d_i})^{-1} = P_{k[P_1, \dots, P_\ell]}(t) \leq P_{S(V^*)^G}(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \det(\text{id} - g t)^{-1}. \quad (*)$$

En multipliant par  $(1 - t)^\ell > 0$ , on en déduit que

$$\prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{1 + t + \dots + t^{d_i-1}} \leq \frac{1}{|G|} \left( 1 + \sum_{g \in G \setminus \{1_G\}} \frac{(1-t)^\ell}{\det(\text{id} - g t)} \right).$$

Or 1 n'est pas un pôle du membre de gauche. Par ailleurs, 1 est un zéro de chacun des termes de la somme du membre de droite puisque la multiplicité de 1 comme valeur propre de  $g \neq 1_G$  est strictement inférieure à  $\ell$ . En évaluant en  $t = 1$ , on obtient l'inégalité (i).

Démontrons à présent (ii). Pour tout  $t \in [0, 1[,$  on a

$$\prod_{i=1}^{\ell} \left( \frac{1}{1 - t^{d_i}} \right) - \frac{1}{|G|} \frac{1}{(1-t)^\ell} \leq \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G \setminus \{1\}} \frac{1}{\det(1 - g t)}.$$

En multipliant par  $(1 - t)^{\ell-1} > 0$ , on obtient

$$\frac{1}{1-t} \left( \prod_{i=1}^{\ell} \left( \frac{1}{1+t+\dots+t^{d_i-1}} \right) - \frac{1}{|G|} \right) \leq \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G \setminus \{1\}} \frac{(1-t)^{\ell-1}}{\det(1-gt)}.$$

*Étude du membre de droite.* Soit  $g \in G \setminus \{1\}$ . Si  $g$  n'est pas une réflexion alors 1 est valeur propre de multiplicité au plus  $\ell - 2$  de  $g$  et 1 est un pôle de multiplicité au plus  $\ell - 2$  de  $\det(1-gt)^{-1}$ . Ainsi 1 est zéro de

$$\frac{(1-t)^{\ell-1}}{\det(1-gt)}.$$

Si  $g$  est une réflexion de  $G$  alors  $(1-t)^{\ell-1}(\det(1-gt))^{-1} = 1 - \zeta_g t$  où  $\zeta_g$  est la dernière (celle différente de 1 (voir la remarque 1.25)) valeur propre de  $g$ . En particulier 1 n'est pas pôle du membre de droite. On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des réflexions contenues dans  $G$ . La limite lorsque  $t$  tend vers 1 du membre de droite est donc

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in \mathcal{S}} \frac{1}{1 - \zeta_g}.$$

En mettant à part les réflexions d'ordre deux pour lesquelles  $(1 - \zeta_g)^{-1} = 1/2$  et en regroupant une réflexion et son inverse, on obtient que la limite du membre de droite lorsque  $t$  tend vers 1 est  $|\mathcal{S}|/2|G|$  puisque

$$\frac{1}{1 - \zeta_g} + \frac{1}{1 - \zeta_g^{-1}} = \frac{1 - \zeta_g}{1 - \zeta_g} = 1.$$

*Étude du membre de gauche.* Le membre de gauche se réécrit

$$\frac{1}{1-t} \left( \frac{|G| - \prod_{i=1}^{\ell} (1+t+\dots+t^{d_i-1})}{|G| \prod_{i=1}^{\ell} (1+t+\dots+t^{d_i-1})} \right).$$

La relation

$$\prod_{i=1}^{\ell} d_i = |G|$$

assure que 1 est une racine du numérateur  $N$ . En particulier 1 n'est pas un pôle du membre de gauche. La formule de Taylor appliquée en 1 pour le numérateur assure que la limite lorsque  $t$  tend vers 1 du membre de gauche est donnée par

$$\frac{-N'(1)}{|G| \prod_{i=1}^{\ell} d_i}.$$

Or

$$N'(t) = - \sum_{i=1}^{\ell} (1+2t+\dots+(d_i-1)t^{d_i-2}) \prod_{j \neq i} (1+t+\dots+t^{d_j-1}),$$

et donc

$$N'(1) = - \sum_{i=1}^{\ell} \frac{d_i(d_i-1)}{2} \prod_{j \neq i} d_j.$$

On en déduit que la limite lorsque  $t$  tend vers 1 du membre de gauche est donnée par

$$\frac{1}{2|G|} \sum_{i=1}^{\ell} (d_i - 1).$$

Finalement, en comparant les limites, on obtient l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{\ell} (d_i - 1) \leq |\mathcal{S}|.$$

Pour finir démontrons (iii). L'égalité  $S(V^*)^G = k[P_1, \dots, P_\ell]$  assure que (\*) est en fait une égalité. Les inégalités (i) et (ii) se transforment alors en égalité. ■

## Sous-algèbre graduée

On finit cette section de rappels d'algèbre commutative par un lemme, une nouvelle fois dû à Springer (voir [SPR1, proposition 2.3]) qui étudie les sous-algèbres polynomiales de  $S(V^*)$ .

**Lemme 1.23 – Sous-algèbre de polynômes.** Soient  $k$  un corps de caractéristique nulle,  $V$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $\ell$ ,  $A$  une sous-algèbre graduée de  $S(V^*)$  engendrée par  $\ell$  éléments homogènes algébriquement indépendants  $(P_1, \dots, P_\ell)$ . On pose  $d_i = \deg(P_i)$  et on suppose que les  $d_i$  sont rangés par ordre croissant.

- (i) Pour  $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ ,  $d_i$  est le degré minimal d'un élément homogène de  $A$  algébriquement indépendant de  $(P_1, \dots, P_{i-1})$ . En particulier  $d_1$  est le degré minimal des éléments homogènes non constants de  $A$ .
- (ii) Soient  $(Q_1, \dots, Q_\ell)$  une famille de  $\ell$  éléments homogènes algébriquement indépendants de  $A$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ , on pose  $\deg(Q_i) = e_i$  qu'on suppose rangés par ordre croissant. On a  $d_i \leq e_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ . De plus, si  $d_i = e_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$  alors  $(Q_1, \dots, Q_\ell)$  engendre  $A$ .

**Preuve.** Soit  $P \in A$  homogène de degré  $d$ , il existe un unique  $F \in k[T_1, \dots, T_\ell]$  tel que  $P = F(P_1, \dots, P_\ell)$ . Tous les monômes  $T_1^{e_1} \cdots T_\ell^{e_\ell}$  qui apparaissent alors dans l'écriture de  $F$  vérifient

$$d = \sum_{i=1}^{\ell} d_i e_i.$$

Si  $P$  est algébriquement indépendant de  $(P_1, \dots, P_{i-1})$  alors il existe un des monômes de  $F$  qui fait intervenir  $T_h$  pour  $h \geq i$ . On obtient alors  $d \geq d_h \geq d_i$ .

Passons au point (ii). Par hypothèse, il existe des polynômes  $F_j \in k[T_1, \dots, T_\ell]$  tels que  $Q_j = F_j(P_1, \dots, P_\ell)$ . On raisonne par récurrence sur  $i$ . On a bien  $d_1 \leq e_1$  d'après le point (i). Supposons maintenant  $d_j \leq e_j$  pour  $j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$ . Comme les  $Q_k$  sont algébriquement indépendants, les  $F_j$  pour  $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$  ne peuvent dépendre que de  $T_1, \dots, T_{i-1}$ . Donc il existe  $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$  et  $h \geq i$  tel que  $F_j$  dépend de  $T_h$ . On en déduit que  $e_j \geq d_h$  ce qui donne  $e_i \geq e_j \geq d_h \geq d_i$ . Le cas d'égalité résulte alors de la comparaison des séries de Poincaré de  $A$  et l'algèbre engendrée par les  $Q_i$  (grâce à l'exemple 1.19). ■

## 1.2 RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Dans cette section, on étudie quelques propriétés élémentaires des réflexions d'un espace vectoriel de dimension finie. Le résultat central pour la suite (section 2.1) est le lemme 1.28. Par ailleurs, le lemme 1.33 sera à la base du théorème 1.47 de Stanley.

### 1.2.1 L'ALGÈBRE LINÉAIRE DES RÉFLEXIONS

#### DÉFINITION

**Définition 1.24 — Hyperplan de points fixes.** Soient  $k$  un corps,  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \text{End}_k(E)$ . On suppose que  $u$  admet un hyperplan de points fixes.

On dit alors que  $H = \text{Ker}(u - \text{id})$  est l'*hyperplan de  $u$*  et  $D = \text{Im}(u - \text{id})$  la *droite de  $u$* .

On dit que  $u$  est une *dilatation* si  $u$  est diagonalisable et inversible. On dit que  $u$  est une *transvection* si  $u$  n'est pas diagonalisable. On dit que  $u$  est une *réflexion* si  $u$  est une dilatation d'ordre fini.

**Remarque 1.25 — Dilatation.** Soient  $k$  un corps,  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \text{End}_k(E)$ . Si  $u$  admet un hyperplan de points fixes alors le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension  $n-1$ .

Ainsi  $u$  est diagonalisable si et seulement si la dernière racine  $\lambda$  du polynôme caractéristique  $\chi_u$  de  $u$  n'est pas 1. Par ailleurs, les relations coefficients-racines assurent alors que  $\lambda = \det u$ .

Finalement si  $u$  est diagonalisable,  $u$  a deux valeurs propres distinctes : 1 et  $\det u$ . Le polynôme minimal de  $u$  est  $(X-1)(X-\det u)$  et la droite de  $u$  est  $D = \text{Im}(u - \text{id}) = \text{Ker}(u - \det(u)\text{id})$ . ■

L'exemple suivant étudie la transposée d'une réflexion en vue du théorème 1.47 de Stanley.

**Exemple 1.26 — Réflexion et dualité.** Soient  $k$  un corps,  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie et  $s$  une réflexion. On note  $H$  l'hyperplan de  $s$ ,  $D$  la droite de  $s$  et  $\alpha$  une forme linéaire de noyau  $H$ .

Alors  ${}^t s$  est une réflexion de même ordre que  $s$  d'hyperplan  $D^\circ$  et de droite  $H^\circ = k\alpha$ . En particulier, on a  $s\alpha = \det^{-1}(s)\alpha$ . Par ailleurs, si  $H'$  est un hyperplan de  $E$  contenant  $D$  et  $\alpha'$  une forme linéaire de noyau  $H'$  alors  $s\alpha' = \alpha'$ .

Montrons les résultats annoncés ci-dessus. Les propriétés de la transposée assurent que  ${}^t s \in \text{GL}(E)$ , est de même ordre que  $s$  et a même polynôme minimal que  $s$ . En particulier  ${}^t s$  est diagonalisable. Soient  $h \in H$  et  $d \in D$ . On a

$${}^t s(\alpha)(h) = \alpha \circ s(h) = \alpha(h) = 0 = \det(s)\alpha(h) \quad \text{et} \quad {}^t s(\alpha)(d) = \alpha \circ s(d) = \det(s)\alpha(d)$$

et donc  ${}^t s(\alpha) = \det(s)\alpha$ . Ainsi  $k\alpha$  est une droite propre de  ${}^t s$ . De plus, pour  $\varphi \in D^\circ$ , on a

$${}^t s(\varphi)(h) = \varphi \circ s(h) = \varphi(h) \quad \text{et} \quad {}^t s(\varphi)(d) = \varphi \circ s(d) = \det s\varphi(d) = 0 = \varphi(d)$$

et donc  ${}^t s(\varphi) = \varphi$ . On en déduit que  $D^\circ$  est un hyperplan de points fixes pour  ${}^t s$  et  ${}^t s$  est bien une réflexion d'hyperplan  $D^\circ$  et de droite  $H^\circ$ .

On a alors  $s\alpha = {}^t s^{-1}(\alpha) = \det^{-1}(s)\alpha$ . Par ailleurs,  $\alpha' \in D^\circ$  et donc  $s\alpha' = {}^t s^{-1}(\alpha') = \alpha'$ .  $\blacksquare$

**Notation 1.27 – Algèbre symétrique et fonction polynomiale.** Soient  $k$  un corps infini,  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie. On note  $S(E^*)$  l'algèbre symétrique du dual de  $E$  c'est-à-dire l'algèbre des fonctions polynomiales sur  $E$  à valeurs dans  $k$ .

Le lemme élémentaire suivant (voir aussi [GUT, lemme 1]) est fondamental à la fois dans la démonstration du théorème 1.47 de Stanley et dans la sous-section 2.1.2.

**Lemme 1.28 – Divisibilité dans  $S(E^*)$ .** Soient  $k$  un corps infini,  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie,  $s \in GL(E)$  une réflexion d'hyperplan  $H$  et d'ordre  $e$ ,  $\alpha \in E^*$  une forme linéaire de noyau  $H$  et  $S(E^*)$  l'algèbre symétrique de  $E^*$ . Si  $P \in S(E^*)$  et  $i \in \llbracket 0, e-1 \rrbracket$  vérifient  $sP = \det^{-i}(s)P$  alors  $P$  est divisible par  $\alpha^i$ .

**Preuve.** Pour le plaisir et au vu des nombreuses utilisations que nous en ferons au chapitre 2, donnons deux démonstrations de ce résultat.

*Première démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $i$ . Pour  $i = 0$ , il n'y a rien à démontrer. Soit  $i \in \llbracket 0, e-2 \rrbracket$ . On suppose que  $\alpha^i$  divise  $Q$  pour tout polynôme  $Q$  tel que  $sQ = \det^{-i}(s)Q$  et on considère  $P \in S(E^*)$  tel que  $sP = \det^{-i-1}(s)P$ . Pour  $h \in H$ , on a  $s^{-1}(h) = h$  et donc

$$\det^{-i-1}(s)P(h) = (sP)(h) = P(s^{-1}h) = P(h).$$

Comme  $\det^{-i-1}(s) \neq 1$ , on en déduit que  $P(h) = 0$  pour tout  $h \in H$  et donc  $\alpha$  divise  $P$ . On pose alors  $P = \alpha Q$ . Comme  $s(\alpha) = \det^{-1}(s)\alpha$  (voir l'exemple 1.26), on en déduit par intégrité de  $S(E^*)$  que  $sQ = \det^{-i}(s)Q$ . L'hypothèse de récurrence donne alors  $\alpha^i$  divise  $Q$ . On a ainsi  $\alpha^{i+1}$  divise  $\alpha Q = P$ .

*Deuxième démonstration.* On considère  $(u_1, \dots, u_{\ell-1})$  une base de  $H$  et  $u_\ell$  un vecteur directeur de la droite de  $s$ . On note  $\mathcal{B}^* = (v_1, \dots, v_\ell)$  la base duale de la base  $(u_1, \dots, u_\ell)$ . On remarque que  $v_\ell$  est une forme linéaire de noyau  $H$ . Ainsi  $v_\ell$  est proportionnelle à  $\alpha$  et  $(v_1, \dots, v_{\ell-1}, \alpha)$  est une base de  $E^*$ . On en déduit que  $P \in S(E^*)$  peut s'écrire

$$P = \sum_{(j_1, \dots, j_\ell) \in \mathbb{N}^\ell} a_{j_1, \dots, j_\ell} v_1^{j_1} \cdots v_{\ell-1}^{j_{\ell-1}} \alpha^{j_\ell} \quad \text{avec} \quad a_{j_1, \dots, j_\ell} \in k$$

et où le nombre de  $a_{j_1, \dots, j_\ell}$  non nul est fini. Par ailleurs,  $\text{Ker } v_q$  contient la droite de  $s$  pour tout  $q \in \llbracket 1, \ell-1 \rrbracket$ . L'exemple 1.26 donne alors  $sv_q = v_q$  pour  $q \in \llbracket 1, \ell-1 \rrbracket$  et  $s\alpha = \det^{-1}(s)\alpha$ . On en déduit que

$$sP = \sum_{(j_1, \dots, j_\ell) \in \mathbb{N}^\ell} \det^{-j_\ell}(s) a_{j_1, \dots, j_\ell} v_1^{j_1} \cdots \alpha^{j_\ell}.$$

Comme  $sP = \det^{-i}(s)P$ , l'indépendance linéaire des monômes  $\{v_1^{j_1} \cdots v_{\ell-1}^{j_{\ell-1}} \alpha^{j_\ell}\}_{(j_1, \dots, j_\ell) \in \mathbb{N}^\ell}$  donne alors  $\forall (j_1, \dots, j_\ell) \in \mathbb{N}^\ell, \det^{-j_\ell}(s) a_{j_1, \dots, j_\ell} = \det^{-i}(s) a_{j_1, \dots, j_\ell}$ .

Comme  $i \in \llbracket 0, e-1 \rrbracket$  et  $j_\ell \in \mathbb{N}$ , on en déduit que  $a_{j_1, \dots, j_\ell} \neq 0$  implique  $j_\ell = i + ke$  avec  $k \in \mathbb{N}$ . Ainsi  $\alpha^i$  divise tous les monômes qui interviennent dans  $P$  et donc  $\alpha^i$  divise  $P$ .  $\blacksquare$

## RÉFLEXION ET COMMUTATION

Ici, on étudie le commutant d'une réflexion et les réflexions qu'il contient pour aboutir au lemme 1.33.

**Lemme 1.29 – Sous-espace stable par une réflexion.** Soient  $k$  un corps,  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie et  $s \in GL(E)$  une réflexion. On note  $H$  l'hyperplan de  $s$  et  $D$  la droite de  $s$ . Un sous-espace  $F$  de  $E$  est stable par  $s$  si et seulement si  $D \subset F$  ou  $F \subset H$ .

**Preuve.** On suppose que  $F$  est stable par  $s$ . Le lemme des noyaux appliqué au polynôme  $(X-1)(X-\det s)$  (qui est le polynôme minimal de  $s$ ) et à l'endomorphisme de  $F$  induit par  $s$  (voir [BPM, application 4.39]) donne

$$F = (F \cap H) \oplus (F \cap D).$$

Or  $D$  est une droite donc  $F \cap D = D$  ou  $F \cap D = \{0\}$ . Dans le premier cas, on a  $D \subset F$ . Dans le deuxième cas, on a  $F = F \cap H$  et donc  $F \subset H$ .

Réciproquement, si  $F \subset H$  alors  $s(x) = x$  pour tout  $x \in F$  et donc  $F$  est stable par  $s$ . On suppose que  $D \subset F$ . Soit  $x \in F$ , on considère la décomposition de  $x = h + d$  dans la somme directe  $E = H \oplus D$ . Comme  $d \in F$ , on a  $h \in F$  et donc  $s(x) = h + \det(s)d \in F$ . Ainsi  $F$  est stable par  $s$ .  $\blacksquare$

**Lemme 1.30 – Commutant d'une réflexion.** Soient  $k$  un corps,  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie et  $s \in GL(E)$  une réflexion. On note  $H$  l'hyperplan de  $s$  et  $D$  la droite de  $s$ .

Un endomorphisme  $f$  de  $E$  commute avec  $s$  si seulement si  $H$  et  $D$  sont stables par  $f$ .

**Preuve.** Si  $f$  commute avec  $s$  alors  $H$  et  $D$  sont stables par  $f$  (voir [BPM, lemme 4.26]).

On suppose que  $H$  et  $D$  sont stables par  $f$ . On peut considérer les endomorphismes  $s_H, f_H$  induits par  $s$  et  $f$  sur  $H$  et  $s_D, f_D$  induits par  $s$  et  $f$  sur  $D$ . Or  $s_H = \text{id}_H$  et  $s_D = \zeta \text{id}_D$ . Ainsi  $s_H$  et  $f_H$  commutent et  $s_D$  et  $f_D$  commutent. Comme  $H$  et  $D$  engendrent  $V$ , on en déduit que  $s$  et  $f$  commutent. ■

**Lemme 1.31 — Deux réflexions qui commutent.** Soient  $k$  un corps,  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie et  $s, s' \in \text{GL}(E)$  deux réflexions. On note  $H$  (resp.  $H'$ ) l'hyperplan de  $s$  (resp.  $s'$ ) et  $D$  (resp.  $D'$ ) la droite de  $s$  (resp.  $s'$ ).

On a la disjonction de cas

- (i)  $s$  et  $s'$  ne commutent pas ;
- (ii)  $H = H'$  et  $D = D'$  ;
- (iii)  $D \subset H'$  et  $D' \subset H$ .

On suppose que l'action de  $\langle s, s' \rangle$  sur  $E$  est semi-simple. On a alors les équivalences

- (i)  $H = H'$ ,
- (ii)  $D = D'$ ,
- (iii)  $H = H'$  et  $D = D'$ .

On suppose que l'action de  $\langle s, s' \rangle$  sur  $E$  est semi-simple. On a alors les équivalences

- (i)  $D \subset H'$ ,
- (ii)  $D' \subset H$ ,
- (iii)  $D \subset H'$  et  $D' \subset H$ .

**Preuve.** On ne peut avoir (ii) et (iii) puisqu'alors  $D \subset H$  ce qui est absurde. On ne peut avoir (i) et (ii). Sinon,  $H$  et  $D$  seraient stables par  $s'$  et le lemme 1.30 montrerait que  $s'$  commute avec  $s$ . On ne peut avoir (i) et (iii). Sinon, le lemme 1.29 montrerait que  $D$  et  $H$  sont stables par  $s'$  et le lemme 1.30 assurerait que  $s$  et  $s'$  commutent.

Supposons que  $s$  et  $s'$  commutent. On en déduit (lemme 1.30) que  $H$  est stable par  $s'$ . Le lemme 1.29 assure alors, par raison de dimension, que  $H = H'$  ou  $D' \subset H$ . De même,  $D$  est stable par  $s'$  et donc  $D \subset H'$  ou  $D = D'$ .

Or  $H = H'$  et  $D \subset H'$  implique  $E \subset H'$  ce qui est absurde. De même,  $D' \subset H$  et  $D = D'$  implique  $D \subset H$  ce qui est absurde. On aboutit à  $D = D'$  et  $H = H'$  ou  $D \subset H'$  et  $D' \subset H$ . On a donc bien la disjonction de cas souhaitée.

Passons au cas d'une action semi simple de  $\langle s, s' \rangle$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) et (iii)  $\Rightarrow$  (ii) sont évidentes.

(i)  $\Rightarrow$  (iii). On en déduit alors que  $H$  est un sous-espace stable par  $\langle s, s' \rangle$ . Il admet donc un supplémentaire  $F$  stable par  $\langle s, s' \rangle$ . Ainsi, d'après le lemme 1.29, on a  $D \subset F$  ou  $F \subset H$  et  $D' \subset F$  ou  $F \subset H'$ . Comme  $F$  est un supplémentaire de  $H = H'$ , on en déduit que  $F \subset H$  et  $F \subset H'$  sont impossibles. Ainsi  $D \subset F$  et  $D' \subset F$ . Par raison de dimension, on a donc  $D = F = D'$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). On en déduit alors que  $D$  est un sous-espace stable par  $\langle s, s' \rangle$ . Il admet donc un supplémentaire  $F$  stable par  $\langle s, s' \rangle$ . Ainsi, d'après le lemme 1.29, on a  $D \subset F$  ou  $F \subset H$  et  $D' \subset F$  ou  $F \subset H'$ . Comme  $F$  est un supplémentaire de  $D = D'$ , on en déduit que  $D \subset F$  et  $D' \subset F$  sont impossibles. Ainsi  $F \subset H$  et  $F \subset H$ . Par raison de dimension, on a donc  $H = F = H'$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) et (iii)  $\Rightarrow$  (ii) sont évidentes.

(i)  $\Rightarrow$  (iii). On en déduit, grâce au lemme 1.29, que  $D$  est un sous-espace stable par  $\langle s, s' \rangle$ . Il admet donc un supplémentaire  $F$  stable par  $\langle s, s' \rangle$ . Ainsi, d'après le lemme 1.29, on a  $D \subset F$  ou  $F \subset H$  et  $D' \subset F$  ou  $F \subset H'$ . Comme  $F$  est un supplémentaire de  $D$ , on en déduit que  $D \subset F$  est impossible. De même, comme  $D \subset H'$ , on ne peut avoir  $F \subset H'$  sinon on aurait  $E \subset E'$ . Ainsi  $F \subset H$  et  $D' \subset F$ . Finalement  $D' \subset F \subset H$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) résulte de ce qui précède en échangeant  $s$  et  $s'$ . ■

**Remarque 1.32 — Hypothèse de semi-simplicité.** D'après le théorème de Maschke, l'hypothèse de semi-simplicité sur  $\langle s, s' \rangle$  est réalisée lorsque  $\langle s, s' \rangle$  est fini et car  $k \nmid |\langle s, s' \rangle|$ . En particulier, elle est réalisée si  $\langle s, s' \rangle$  est fini et car  $k = 0$  et donc si  $s, s'$  sont deux réflexions d'un groupe de réflexions complexes. ■

Le lemme suivant est à la base de la démonstration du théorème 1.47 de Stanley.

**Lemme 1.33 — Hyperplans et orbites.** Soient  $k$  un corps,  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie et  $s, s' \in \text{GL}(E)$  deux réflexions. On note  $H$  (resp.  $H'$ ) l'hyperplan de  $s$  (resp.  $s'$ ) et  $D$  (resp.  $D'$ ) la droite de  $s$  (resp.  $s'$ ).

Si  $s$  et  $s'$  commutent alors l'orbite de  $H$  sous  $G' = \langle s' \rangle$  est réduite à  $H$ .

On suppose que  $\langle s, s' \rangle$  agit sur  $E$  de façon semi-simple. Si  $s$  et  $s'$  ne commutent pas alors l'orbite de  $H$  sous  $G'$  a pour cardinal  $|G'|$ .

**Preuve.** Supposons que  $s$  et  $s'$  commutent. L'hyperplan  $s'(H)$  est l'hyperplan de la réflexion  $s'ss'^{-1} = s$ . Ainsi  $s'(H) = H$  et l'orbite de  $H$  sous  $G'$  est  $\{H\}$ .

Supposons que  $s$  et  $s'$  ne commutent pas et que  $\langle s, s' \rangle$  agit sur  $E$  de façon semi-simple. On note  $m$  le cardinal de l'orbite de  $H$  sous  $G'$ . On a bien sûr  $m \leq |G'|$  et  $s'^m(H) = H$ . Si  $m < |G'|$  alors  $(s')^m$  est une réflexion d'hyperplan  $H'$  et de droite  $D'$  qui laisse fixe  $H$ . Le lemme 1.29 montre que  $D' \subset H$  ou  $H = H'$ . Le lemme 1.31 assure alors que  $s$  et  $s'$  commutent ce qui contredit l'hypothèse de départ. On obtient donc  $m = |G'|$ . ■

## 1.3 QUELQUES RAPPELS SUR LES GROUPES DE RÉFLEXIONS

Dans cette section, on étudie la notion de groupe de réflexions. Dans une première sous-section, on étudie en particulier le lien entre invariants et groupe de réflexions (théorème 1.35 de Chevalley-Shephard-Todd) qui permet d'introduire les notions de degrés d'un groupe de réflexions et d'algèbre des coinvariants qui seront utilisées par la suite (sections 2.1 et 2.2). On s'intéresse ensuite, dans la sous-section 1.3.2 aux hyperplans d'un groupe de réflexions ce qui mène naturellement au théorème 1.47 de Stanley puis aux théorèmes 1.52 et 1.59 de Gutkin dans la sous-section 1.3.3. La sous-section 1.3.4 propose une nouvelle démonstration de la proposition 2.4 de [OPD] : c'est le premier travail personnel présenté dans cette thèse. Dans la dernière sous-section 1.3.5, on se penche sur les liens entre groupes de Coxeter et groupes de réflexions complexes (voir la définition 1.34).

**Définition 1.34 — Groupe de réflexions complexes.** Soit  $k$  un corps. On dit que  $(G, V)$  est un  $k$ -groupe de réflexions si  $V$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie (qu'on note  $\ell$ ) et  $G$  un sous-groupe fini  $\mathrm{GL}(V)$  engendré par des réflexions.

Un  $\mathbb{C}$ -groupe de réflexions est appelé *groupe de réflexions complexes*. Un  $\mathbb{R}$ -groupe de réflexions est appelé *groupe de Coxeter*. Un  $\mathbb{Q}$ -groupe de réflexions est appelé *groupe de Weyl*.

Pour simplifier, on dira souvent : « soit  $G$  un  $k$ -groupe de réflexions » en omettant ainsi  $V$ .

On dit que  $(G, V)$  est un groupe de réflexions irréductible si  $V$  est un  $G$ -module irréductible.

### 1.3.1 GROUPE DE RÉFLEXIONS ET INVARIANTS

Les groupes de réflexions peuvent se caractériser par leur algèbre d'invariants : c'est une algèbre de polynômes. L'énoncé précis est le théorème 1.35 de Chevalley-Shephard-Todd dont on donne ici par plaisir la preuve de Shephard et Todd [S-T, théorème II.5.1].

**Proposition 1.35 — Théorème de Chevalley-Shephard-Todd.** Soient  $k$  un corps de caractéristique nulle,  $V$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $\ell$  et  $G$  un sous-groupe fini de  $\mathrm{GL}(V)$ . On a alors l'équivalence

- (i)  $(G, V)$  est un  $k$ -groupe de réflexions ;
- (ii) Il existe une famille  $(P_1, \dots, P_\ell)$  d'éléments homogènes de  $S(V^*)^G$  algébriquement indépendant tels que  $S(V^*)^G = k[P_1, \dots, P_\ell]$ .

Si ces propriétés sont vérifiées alors

$$|G| = \prod_{i=1}^{\ell} \deg P_i \quad \text{et} \quad |\mathcal{S}| = \sum_{i=1}^{\ell} (\deg P_i - 1)$$

où  $\mathcal{S}$  désigne l'ensemble des réflexions contenues dans  $G$ .

**Preuve.** (i)  $\Rightarrow$  (ii). Il s'agit du théorème II.5.1 de l'article [S-T]. La démonstration proposée dans cet article repose sur la classification des groupes de réflexions irréductibles. L'article [CHE] (théorème A) propose une preuve ne reposant pas sur cette classification : elle est reprise dans [BBK, V.5.3 Théorème 3].

(ii)  $\Rightarrow$  (i). On définit  $G' \subset G$  le sous-groupe engendré par  $\mathcal{S}$ . Par définition,  $(G', V)$  est un groupe de réflexions. L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) assure alors l'existence d'une famille  $(Q_1, \dots, Q_\ell)$  d'éléments homogènes de  $S(V^*)^{G'}$  algébriquement indépendants telle que

$$S(V^*)^{G'} = k[Q_1, \dots, Q_\ell].$$

On note  $e_i = \deg Q_i$  (resp.  $d_i = \deg P_i$ ) et on suppose les  $e_i$  (resp.  $d_i$ ) rangés par ordre croissant. En appliquant le point (iii) du corollaire 1.22 au groupe  $G'$ , on obtient

$$\prod_{i=1}^{\ell} e_i = |G'| \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\ell} (e_i - 1) = |\mathcal{S}'|.$$

où  $\mathcal{S}'$  est l'ensemble des réflexions de  $G'$ . Or  $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$  par définition de  $G'$  et  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$  puisque  $G' \subset G$ . En appliquant le point (iii) du corollaire 1.22 au groupe  $G$ , on obtient alors

$$\sum_{i=1}^{\ell} (d_i - 1) = |\mathcal{S}| = |\mathcal{S}'| = \sum_{i=1}^{\ell} (e_i - 1),$$

Par ailleurs, comme  $S(V^*)^G \subset S(V^*)^{G'}$  (puisque  $G' \subset G$ ), le lemme 1.23 montre que  $e_i \leq d_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ . On obtient finalement dont on déduit  $d_i = e_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ . Enfin, le point (iii) du corollaire 1.22 appliqué à  $G$  donne alors

$$|G| = \prod_{i=1}^{\ell} d_i = \prod_{i=1}^{\ell} e_i = |G'| \quad \text{et} \quad |\mathcal{S}| = \sum_{i=1}^{\ell} (d_i - 1).$$

Comme  $G' \subset G$ , on en déduit que  $G' = G$  est un  $k$ -groupe de réflexions. ■

**Définition 1.36 — Invariants fondamentaux.** Soient  $k$  un corps de caractéristique nulle et  $(G, V)$  un  $k$ -groupe de réflexions. Si  $(P_1, \dots, P_{\dim V})$  est une famille d'éléments homogènes de  $S(V^*)^G$  algébriquement indépendants telle que  $S(V^*)^G = k[P_1, \dots, P_{\dim V}]$ , on dit que  $(P_1, \dots, P_{\dim V})$  une *famille d'invariants fondamentaux de  $G$* .

On déduit du théorème précédent le corollaire 1.37 : on n'a pas besoin de savoir que l'algèbre des invariants est une algèbre de polynômes, il suffit d'avoir le bon nombre d'éléments invariants homogènes algébriquement indépendant et que le produit de leur degré soit le cardinal du groupe (c'est aussi le théorème 2.4 de [SPR1]).

**Corollaire 1.37 — Éléments invariants algébriquement indépendants.** Soient  $k$  un corps de caractéristique nulle,  $V$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $\ell$ ,  $G$  un sous-groupe fini de  $GL(V)$ ,  $S(V^*)$  l'algèbre symétrique du dual de  $V$  et  $S(V^*)^G$  l'algèbre des invariants de  $S(V^*)$ . On suppose que  $(P_1, \dots, P_\ell)$  est une famille d'éléments invariants de  $S(V^*)$  homogènes algébriquement indépendants. Pour  $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ , on pose  $d_i = \deg P_i$ . On suppose de plus que

$$\prod_{i=1}^{\ell} d_i = |G|.$$

Alors  $(G, V)$  est un  $k$ -groupe de réflexions et  $S(V^*)^G = k[P_1, \dots, P_\ell]$ .

**Preuve.** On définit  $G' \subset G$  le sous-groupe engendré par  $\mathcal{S}$ . Par définition,  $(G', V)$  est un groupe de réflexions. L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) assure alors l'existence d'une famille  $(Q_1, \dots, Q_\ell)$  d'éléments homogènes de  $S(V^*)^{G'}$  algébriquement indépendants telle que

$$S(V^*)^{G'} = k[Q_1, \dots, Q_\ell].$$

On note  $e_i = \deg Q_i$  et on suppose les  $e_i$  (resp.  $d_i$ ) rangés par ordre croissant. En appliquant le point (iii) du corollaire 1.22 au groupe  $G'$ , on obtient

$$\prod_{i=1}^{\ell} e_i = |G'| \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\ell} (e_i - 1) = |\mathcal{S}'|.$$

où  $\mathcal{S}'$  est l'ensemble des réflexions de  $G'$ . Or  $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$  par définition de  $G'$  et  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$  puisque  $G' \subset G$ . En appliquant le point (ii) du corollaire 1.22 au groupe  $G$ , on obtient alors

$$\sum_{i=1}^{\ell} (d_i - 1) \leq |\mathcal{S}| = |\mathcal{S}'| = \sum_{i=1}^{\ell} (e_i - 1),$$

Par ailleurs, comme  $S(V^*)^G \subset S(V^*)^{G'}$  (puisque  $G' \subset G$ ), le lemme 1.23 montre que  $e_i \leq d_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ . On obtient finalement dont on déduit  $d_i = e_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ . L'hypothèse sur les  $d_i$  assure alors que

$$|G| = \prod_{i=1}^{\ell} d_i = \prod_{i=1}^{\ell} e_i = |G'|.$$

Comme  $G' \subset G$ , on en déduit que  $G' = G$  est un  $k$ -groupe de réflexions. L'égalité  $S(V^*)^G = k[P_1, \dots, P_\ell]$  découle alors du point (ii) du lemme 1.23. ■

On termine cette section par la définition des degrés d'un groupe de réflexions et de l'algèbre des coinvariants. Le fait que les degrés d'un groupe de réflexions sont bien définis repose sur le lemme suivant (voir aussi [BBK, V.1 corollaire]).

**Lemme 1.38 – Polynôme et multiplicité.** Soient  $d_1 \leq \dots \leq d_\ell$  et  $e_1 \leq \dots \leq e_{\ell'}$  deux familles d'entiers naturels. Si

$$\prod_{i=1}^{\ell} (1 - T^{d_i}) = \prod_{i=1}^{\ell'} (1 - T^{e_i}) \quad \text{dans } \mathbb{Z}[T]$$

alors  $\ell = \ell'$  et  $d_i = e_i$  pour tout  $i \in [\![1, \ell]\!]$ .

**Preuve.** Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $\zeta \in \mathbb{C}$  une racine primitive  $m^e$  de l'unité. On étudie la multiplicité de  $\zeta$  en tant que racine des polynômes de l'énoncé. La comparaison des multiplicités assure que le nombre d'entiers  $i \in [\![1, \ell]\!]$  tel que  $m \mid d_i$  est égal au nombre d'entiers  $i \in [\![1, \ell']\!]$  tel que  $m \mid e_i$ . En particulier, pour  $m = \zeta = 1$ , on obtient que  $\ell = \ell'$ . En choisissant  $m = p^\alpha$  avec  $p$  premier et  $\alpha \in \mathbb{N}$ , on obtient le résultat. ■

**Remarque 1.39 – Degrés d'un groupe de réflexions.** Soient  $k$  un corps de caractéristique nulle,  $(G, V)$  un  $k$ -groupe de réflexions complexes et  $(P_1, \dots, P_{\dim V})$  et  $(Q_1, \dots, Q_{\dim V})$  une famille d'invariants fondamentaux de  $G$ . Pour  $i \in [\![1, \dim V]\!]$ , on note  $d_i = \deg P_i$  et  $e_i = \deg Q_i$ . On suppose les  $d_i$  et  $e_i$  sont rangés par ordre croissant. En calculant la série de Poincaré de  $S(V^*)^G$  grâce à l'exemple 1.19, le lemme 1.38 donne  $d_i = e_i$ .

Ainsi la famille des degrés d'une famille d'invariants fondamentaux de  $G$  ne dépend pas du choix de la famille d'invariants fondamentaux. On dit que cette famille  $(d_1, \dots, d_{\dim V})$  est *la famille des degrés de  $G$* . ■

**Définition 1.40 – Algèbre des coinvariants.** Soit  $(G, V)$  un  $k$ -groupe de réflexions complexes. On note  $I$  l'idéal de  $S(V^*)$  engendré par les éléments de  $S(V^*)^G$  nuls en  $0 \in V$ , l'algèbre quotient  $S_G = S(V^*)/I$  est graduée. Pour  $i \in \mathbb{N}$ , on note  $(S_G)_i$  la composante homogène de degré  $i$  de  $S_G$ . On dit que  $S_G$  est *l'algèbre des coinvariants de  $G$* . Elle est isomorphe en tant que  $G$ -module à la représentation régulière et on a  $S(V^*) = S_G \otimes S(V^*)^G$  (voir [CHE, théorème B]).

### 1.3.2 HYPERPLANS DE RÉFLEXION

Dans cette sous-section et la suivante, on s'intéresse aux objets géométriques de  $V$  associé au groupe de réflexions  $(G, V)$  : les hyperplans et les réflexions. On constate que de nombreux objets et propriétés n'interviennent qu'au travers des orbites d'hyperplans sous l'action de  $G$  (voir la remarque 1.45 et les théorèmes 1.47 de Stanley et 1.52 de Gutkin).

#### DÉFINITIONS ET NOTATIONS

**Notation 1.41 – Réflexion et hyperplan.** Soit  $(G, V)$  un groupe de réflexions complexes. On note  $\mathcal{S}$  (ou  $\mathcal{S}_G$  si on veut mettre en avant le groupe  $G$ ) l'ensemble des réflexions de  $G$  et  $\mathcal{H}$  (ou  $\mathcal{H}_G$  si on veut mettre en avant le groupe  $G$ ) l'ensemble des hyperplans des réflexions de  $G$  :

$$\mathcal{S} = \{s \in G, \quad s \text{ est une réflexion}\} = \{s \in G, \quad \text{rg}(s - \text{id}) = 1\} = \{s \in G, \quad \dim \text{Ker}(s - \text{id}) = \dim V - 1\}$$

$$\text{et } \mathcal{H} = \{H \text{ hyperplan de } V, \exists s \in G, \text{Ker}(s - \text{id}) = H\} = \{H \text{ hyperplan de } V, \exists s \in \mathcal{S}, \text{Ker}(s - \text{id}) = H\}.$$

En effet, comme  $G$  est un sous-groupe fini de  $\text{GL}(V)$ , tout élément  $g$  de  $G$  est diagonalisable et donc si  $g$  admet un hyperplan de point fixe, c'est une réflexion.

**Notation 1.42 – Autour d'un hyperplan.** Soit  $(G, V)$  un groupe de réflexions complexes. Pour  $H \in \mathcal{H}$ ,

- on choisit  $\alpha_H \in V^*$  une forme linéaire de noyau  $H$ ;
- on définit  $G_H = \text{Fix}_G(H) = \{g \in G, \quad \forall x \in H, \quad gx = x\}$ . C'est un sous-groupe cyclique de  $G$  dont on note  $e_H$  le cardinal et  $s_H$  le générateur de déterminant  $\zeta_H = \exp(2i\pi/e_H)$ ;
- on considère un  $G$ -module  $N$  de dimension finie; pour  $j \in [\![0, e_H - 1]\!]$ , on introduit les entiers  $n_H(N)$  et  $n_{j,H}(N)$  pour définis par

$$\text{Res}_{G_H}^G(N) = \bigoplus_{j=0}^{e_H-1} n_{j,H}(N) \det^{-j} \quad \text{et} \quad n_H(N) = \sum_{j=0}^{e_H-1} j n_{j,H}(N) = \sum_{j=1}^{e_H-1} j n_{j,H}(N);$$

l'entier  $n_{j,H}(N)$  représente la multiplicité de  $\zeta_H^{-j}$  comme valeur propre de  $s_H$  agissant sur  $N^*$ ;

- soit  $\chi$  un caractère linéaire de  $G$ , on note  $\mathbb{C}_\chi$  la représentation de  $G$  de caractère  $\chi$  sur  $\mathbb{C}$  et  $n_H(\chi)$  pour  $n_H(\mathbb{C}_\chi)$ ; par définition,  $n_H(\chi)$  est l'unique entier  $j$  vérifiant  $0 \leq j < e_H$  et  $\chi(s_H) = \det(s_H)^{-j}$ . Enfin, pour un  $G$ -module  $N$ , on note  $N^\chi$  la composante  $\chi$ -isotypique de  $N$ .

**Remarque 1.43 – Cyclicité de  $G_H$ .** Soit  $(G, V)$  un groupe de réflexions complexes et  $H \in \mathcal{H}$ . Le groupe  $G_H$  est fini et  $H$  est un sous- $G_H$ -module de  $V$ . Le théorème de Maschke assure qu'il existe une droite  $D$  stable

par  $G_H$ . De plus, comme  $G_H$  agit trivialement sur  $H$ , l'application  $g \in G_H \mapsto g_D \in \mathrm{GL}(D)$  (où  $g_D$  désigne l'endomorphisme de  $D$  induit par  $g$ ) est injective. Ainsi  $G_H$  s'identifie à un sous-groupe (fini) de  $\mathrm{GL}(D) = \mathbb{C}^\times$ . On en déduit que  $G_H$  est cyclique.

De plus, la théorie des caractères linéaires des groupes cycliques assure que la famille  $(\det^{-j})_{0 \leq j \leq e_H - 1}$  est une famille de représentants des représentants irréductibles de  $G_H$  et les entiers  $n_{j,H}$  sont bien définis. ■

**Définition 1.44 — Fonction polynomiale associée à une représentation.** Soient  $(G, V)$  un groupe de réflexions complexes et  $N$  un  $G$ -module de dimension finie. On définit

$$Q_N = \prod_{H \in \mathcal{H}} \alpha_H^{n_H(N)} \in S(V^*).$$

Lorsque  $\chi$  est un caractère linéaire de  $G$ , on note  $Q_\chi$  plutôt que  $Q_{\mathbb{C}_\chi}$ . On a donc

$$Q_\chi = \prod_{H \in \mathcal{H}} \alpha_H^{n_H(\chi)} \in S(V^*).$$

**Remarque 1.45 — Action de  $G$  sur les hyperplans.** Soient  $H \in \mathcal{H}$  et  $g \in G$ . Montrons que  $gH \in \mathcal{H}$ . Par définition de  $\mathcal{H}$ , il existe  $s \in \mathcal{S}$  tel que  $H = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ . On a  $\mathrm{Ker}(gsg^{-1} - \mathrm{id}) = gH$ . Ainsi  $gH \in \mathcal{H}$ . Comme  $g'(gH) = (g'g)H$  et  $(\mathrm{id}H) = H$ , on en déduit que  $G$  agit sur  $\mathcal{H}$ . On note  $\mathcal{C} = \mathcal{H}/G$  l'ensemble des orbites de  $\mathcal{H}$  sous  $G$ .

Pour  $g \in G$  et  $H \in \mathcal{H}$ , on a  $G_{gH} = gG_Hg^{-1}$ . Ainsi les groupes  $G_{gH}$  et  $G_H$  sont conjugués. En particulier, ils ont même cardinal et donc  $e_{gH} = e_H$ . Ainsi  $H \mapsto e_H$  est constante sur chacune des orbites de  $\mathcal{H}$  sous  $G$  et permet donc de définir  $C \in \mathcal{C} \mapsto e_C$  tel que  $e_C = e_H$  pour tout  $H \in C$ .

Comme la conjugaison conserve le déterminant et que  $e_H = e_{gH}$ , la relation  $G_{gH} = gG_Hg^{-1}$  assure que  $s_{gH} = gs_Hg^{-1}$ . Ainsi  $s_{gH}$  et  $s_H$  sont conjugués dans  $G$ . On en déduit que les multiplicités de  $\zeta_H^j = \zeta_{gH}^j$  comme valeur propre de  $s_H$  et  $s_{gH}$  agissant sur  $N^*$  coïncident. On a donc  $n_{j,H}(N) = n_{j,gH}(N)$  pour tout  $j \in [0, e_H - 1]$  et  $n_H(N) = n_{gH}(N)$ . Les fonctions  $H \mapsto n_{j,H}(N)$  et  $H \mapsto n_H(N)$  sont donc constantes sur les orbites de  $\mathcal{H}$  sous  $G$ . Pour  $C \in \mathcal{C}$ , on peut donc définir les entiers  $n_{j,C}(N)$  et  $n_C(N)$  par  $n_{j,C}(N) = n_{j,H}(N)$  et  $n_C(N) = n_H(N)$  pour tout  $H \in C$ . En particulier, pour  $N = \mathbb{C}_\chi$ , on note  $n_C(\chi)$  plutôt que  $n_C(\mathbb{C}_\chi)$ .

Pour  $C \in \mathcal{C}$ , on définit

$$\alpha_C = \prod_{H \in C} \alpha_H \in S(V^*).$$

On peut alors écrire

$$Q_N = \prod_{C \in \mathcal{C}} \alpha_C^{n_C(N)} \quad \text{et} \quad Q_\chi = \prod_{C \in \mathcal{C}} \alpha_C^{n_C(\chi)}.$$

**Remarque 1.46 —  $G$ -module et puissance extérieure.** Soit  $N$  un  $G$ -module de dimension finie  $r$ . On a alors

$$\mathrm{Res}_{G_H}^G(\Lambda^r(N)) = \det^{-n_H(N)}.$$

Ainsi  $n_H(\Lambda^r(N))$  est l'unique entier compris entre 0 et  $e_H - 1$  congru à  $n_H(N)$  modulo  $e_H$ . En particulier,  $n_H(N) - n_H(\Lambda^r(N))$  est un entier positif ou nul divisible par  $e_H$  et  $n_H(N) = n_H(\Lambda^r(N))$  si et seulement si  $n_H(N) \leq e_H - 1$ . En notant  $\det_N$  le caractère linéaire de  $G$  donné par la représentation  $\Lambda^r(N)$  (c'est-à-dire le déterminant de la représentation  $N$ ), on en déduit aussi que  $Q_{\det_N}$  divise  $Q_N$ . De façon précise, on a

$$Q_N = Q_{\det_N} \prod_{\{C \in \mathcal{C}, n_C(N) \geq e_C\}} \alpha_C^{e_C a_C}$$

avec  $a_C = (n_C(N) - n_C(\det_N))/e_C \in \mathbb{N}^*$ . ■

### COMPOSANTES ISOTYPIQUES ET HYPERPLANS : LE THÉORÈME DE STANLEY

Nous rappelons ici la preuve du théorème de Stanley (voir [STA, Théorème 3.1] ou [SPR2, Théorème 4.3.4] ou encore [O-T, Théorème 6.37]) sur les caractères linéaires d'un groupe de réflexions. Ce théorème nous sera utile pour la construction et l'étude de la structure d'algèbre sur  $T^{-1}S(V^*) \otimes \Lambda(M^*)$  (voir les corollaires 2.10 et 2.11).

**Théorème 1.47 — Théorème de Stanley.** Soit  $G$  un groupe de réflexions complexes. Pour  $C \in \mathcal{C}$ , on a

$$\forall H \in C, \quad s_H \alpha_C = \det^{-1}(s_H) \alpha_C \quad \text{et} \quad \forall H \in \mathcal{H} \setminus C, \quad s_H \alpha_C = \alpha_C.$$

Pour tout  $(a_C)_{C \in \mathcal{C}} \in \mathbb{N}^{\mathcal{C}}$  et  $H \in \mathcal{H}$ , on a

$$s_H \left( \prod_{C \in \mathcal{C}} \alpha_C^{a_C} \right) = \det(s_H)^{-a_{C_0}} \prod_{C \in \mathcal{C}} \alpha_C^{a_C} \tag{*}$$

où  $C_0$  est la classe  $H$  dans  $\mathcal{H}/G$ .

L'application

$$\Delta: \begin{cases} \text{Hom}_{\text{gr}}(G, \mathbb{C}^{\times}) \longrightarrow \prod_{C \in \mathcal{C}} \mathbb{Z}/e_C \mathbb{Z} \\ \chi \mapsto (n_C(\chi))_{C \in \mathcal{C}} \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes.

Enfin  $S(V^*)^{\chi} = Q_{\chi} S(V^*)^G$ .

**Preuve.** L'ensemble  $C$  est une orbite d'hyperplans sous  $G$ . Ainsi le sous-groupe  $G_H = \langle s_H \rangle$  agit sur  $C$ . Soit  $H' \in C$ ,  $H'$  est l'hyperplan de  $s_{H'} \in \mathcal{S}$ . Ainsi  $\langle s_H, s_{H'} \rangle \subset G$  vérifie l'hypothèse de semi-simplicité du lemme 1.33. Ainsi si  $s_H$  et  $s_{H'}$  commutent, l'orbite de  $H'$  sous  $G_H$  est réduite à  $H'$ . Sinon, l'orbite de  $H$  est de cardinal  $e_H$ .

*Remarque.* Les éléments de l'orbite de  $H'$  sont de la forme  $s_{H^k}(H')$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ . Or  $s_{H^k}(H')$  est l'hyperplan de  $s_{s_{H^k}(H')} = s_{H^k} s_{H'} s_{H}^{-k}$ . Or  $s_{H^k} s_{H'} s_{H}^{-k}$  commute avec  $s_H$  si et seulement si  $s_{H'}$  commute avec  $s_H$ . Ainsi la condition «  $s_H$  commute avec  $s_{H'}$  » ne dépend pas du choix de l'hyperplan dans l'orbite de  $H'$ , ce qu'on retrouve bien sûr a posteriori avec la propriété sur le cardinal d'une orbite.

On note alors  $\mathcal{C} = C/G_H$  l'ensemble des orbites des éléments de  $C$  sous l'action de  $G_H$  et  $(H_c)_{c \in \mathcal{C}}$  une famille de représentants des orbites de  $C$  sous  $G_H$ . On définit alors

$$\mathcal{C}_1 = \{c \in \mathcal{C}, \quad |c| > 1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 = \{c \in \mathcal{C}, \quad |c| = 1\}.$$

Les ensembles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont disjoints et leur réunion est  $\mathcal{C}$ . La partie  $\mathcal{C}_1$  correspond au cas où la réflexion associé à un hyperplan de  $c \in \mathcal{C}_1$  ne commute pas avec  $s_H$ . La partie  $\mathcal{C}_2$  correspond au cas où la réflexion associé à un hyperplan de  $c \in \mathcal{C}_2$  commute avec  $s_H$ . En suivant la disjonction de cas du lemme 1.31, on va diviser l'ensemble  $\mathcal{C}_2$  qui est formé d'orbites ponctuelles en deux parties. On définit alors

$$\mathcal{C}'_1 = \{c = \{H'\} \in \mathcal{C}_2, \quad D \subset H'\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}'_2 = \{c = \{H'\} \in \mathcal{C}_2, \quad H = H'\}.$$

On a donc  $\mathcal{C}'_2 = \{\{H\}\}$  si  $H \in C$  et  $\mathcal{C}'_2 = \emptyset$  sinon. Par ailleurs, comme  $\mathcal{C}$  est réunion disjointe de  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}'_1$  et  $\mathcal{C}'_2$ , on a,

$$\alpha_C = \prod_{c \in \mathcal{C}_1} (\alpha_{H_c} \alpha_{s_H(H_c)} \cdots \alpha_{s_H^{e_H-1}(H_c)}) \prod_{c \in \mathcal{C}'_1} \alpha_{H_c} \prod_{c \in \mathcal{C}'_2} \alpha_{H_c}.$$

Comme  $\alpha_{s_{H^k}(H_c)}$  et  $s_{H^k}(\alpha_{H_c})$  sont des formes linéaires de noyau  $s_{H^k}(H_c)$ , elles sont proportionnelles et donc

$$\alpha_C = \lambda \prod_{c \in \mathcal{C}_1} ((s_H \alpha_{H_c}) (s_H^2 \alpha_{H_c}) \cdots (s_H^{e_H-1} \alpha_{H_c})) \prod_{c \in \mathcal{C}'_1} \alpha_{H_c} \prod_{c \in \mathcal{C}'_2} \alpha_{H_c} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{C}^{\times}.$$

On a alors  $s_H \alpha_C = \lambda \prod_{c \in \mathcal{C}_1} ((s_H \alpha_{H_c}) (s_H^2 \alpha_{H_c}) \cdots (s_H^{e_H-1} \alpha_{H_c})) \prod_{c \in \mathcal{C}'_1} s_H \alpha_{H_c} \prod_{c \in \mathcal{C}'_2} s_H \alpha_{H_c}$ .

L'exemple 1.26 montre que  $s_H \alpha_{H_c} = \alpha_{H_c}$  pour  $c \in \mathcal{C}'_1$  et  $s_H \alpha_{H_c} = \det^{-1}(s_H) \alpha_{H_c}$  pour  $c \in \mathcal{C}'_2$ . On en déduit que

$$s_H \alpha_C = \lambda \prod_{c \in \mathcal{C}_1} ((s_H \alpha_{H_c}) (s_H^2 \alpha_{H_c}) \cdots \alpha_{H_c}) \prod_{c \in \mathcal{C}'_1} \alpha_{H_c} \prod_{c \in \mathcal{C}'_2} \det^{-1}(s_H) \alpha_{H_c} = (\det s_H)^{-|\mathcal{C}'_2|} \alpha_C.$$

Comme  $\mathcal{C}'_2 = \{\{H\}\}$  si  $H \in C$  et  $\mathcal{C}'_2 = \emptyset$  sinon, on obtient

$$s_H \alpha_C = \det^{-1}(s_H) \alpha_C \quad \text{si } H \in C \quad \text{et} \quad s_H \alpha_C = \alpha_C \quad \text{sinon.}$$

On en déduit immédiatement l'égalité  $(*)$  :

$$s_H \left( \prod_{C \in \mathcal{C}} \alpha_C^{a_C} \right) = \left( \prod_{C \in \mathcal{C}} (s_H \alpha_C)^{a_C} \right) = \left( \prod_{C \in \mathcal{C}} (\det^{-\delta_{C_0 C}} (s_H) \alpha_C)^{a_C} \right) = \det(s_H)^{-a_{C_0}} \prod_{C \in \mathcal{C}} \alpha_C^{a_C}.$$

Soit  $\chi \in \text{Hom}_{\text{gr}}(G, \mathbb{C}^{\times})$ . Par définition de  $n_C(\chi)$ , on a  $\chi(s_H) = \det^{-n_C(\chi)}(s_H)$  pour tout  $H \in C$ . On en déduit que

$$(\chi \cdot \chi')(s_H) = \det^{-n_C(\chi)}(s_H) \det^{-n_C(\chi')}(s_H) = \det^{-(n_C(\chi) + n_C(\chi'))}.$$

Ainsi  $n_C(\chi \cdot \chi')$  est l'unique entier compris entre 0 et  $e_C - 1$  congru à  $n_C(\chi) + n_C(\chi')$  modulo  $e_C$ . On en déduit successivement que  $n_C(\chi \cdot \chi') = n_C(\chi) + n_C(\chi')$  dans  $\mathbb{Z}/e_C \mathbb{Z}$  et que  $\Delta$  est un morphisme de groupes. L'injectivité résulte du fait que  $(s_H)_{H \in \mathcal{H}}$  est une famille génératrice de  $G$  : si  $n_C(\chi) = n_C(\chi')$  pour tout  $C \in \mathcal{C}$  alors  $\chi(s_H) = \chi'(s_H)$  pour tout  $H \in \mathcal{H}$  et donc  $\chi$  et  $\chi'$  coïncident sur une famille génératrice de  $G$ . Étudions enfin la surjectivité de  $\Delta$ . Pour

$$(a_C)_{C \in \mathcal{C}} \in \prod_{C \in \mathcal{C}} \mathbb{Z}/e_C \mathbb{Z},$$

on considère une famille  $(n_C)_{C \in \mathcal{C}}$  d'entiers naturels telle que  $n_C = a_C$  dans  $\mathbb{Z}/e_C\mathbb{Z}$  pour tout  $C \in \mathcal{C}$ . L'égalité  $(*)$  montre alors que

$$Q = \prod_{C \in \mathcal{C}} \alpha_C^{n_C}$$

vérifie  $s_H Q = \det^{-a_C}(s_H)Q$  pour tout  $H \in C$  et tout  $C \in \mathcal{C}$ . Comme la famille  $(s_H)_{H \in \mathcal{H}}$  engendre  $G$ , on en déduit que  $gQ \in \mathbb{C}^\times Q$  pour tout  $g \in G$ . Ainsi, pour tout  $g \in G$ , il existe un unique  $\lambda_g \in \mathbb{C}^\times$  tel que  $gQ = \lambda_g Q$ . Par linéarité de  $g \in G$ , l'application  $\lambda$  appartient à  $\text{Hom}_{\text{gr}}(G, \mathbb{C}^\times)$  et vérifie  $\Delta(\lambda) = (a_C)_{C \in \mathcal{C}}$ . Ainsi  $\Delta$  est bien surjective.

L'égalité  $(*)$  donne  $s_H Q_\chi = \det^{-n_H(\chi)}(s_H)Q_\chi = \chi(s_H)Q_\chi$  pour tout  $H \in \mathcal{H}$ . Ainsi, comme  $(s_H)_{H \in \mathcal{H}}$  engendre  $G$ , on obtient  $Q_\chi \in S(V^*)^\chi$  puis que  $S(V^*)^G Q_\chi \subset S(V^*)^\chi$ . Montrons l'inclusion réciproque. Soit  $Q \in S(V^*)^\chi$ . Montrons que  $Q_\chi \mid Q$ . Soit  $s \in \mathcal{S}$  une réflexion d'hyperplan  $H$ . On note  $C \in \mathcal{C}$  l'orbite de  $H$  sous  $G$ . Par hypothèse, on a  $sQ = \chi(s)Q = \det^{-n_C(\chi)}(s)Q$ . Comme  $\chi$  est une représentation de dimension 1, on a  $0 \leq n_C(\chi) \leq e_C - 1$ . Le lemme 1.28 donne alors  $\alpha_H^{n_C(\chi)} \mid Q$ . Comme les  $\alpha_H$  sont premiers entre eux deux à deux, on en déduit que

$$\prod_{H \in \mathcal{H}} \alpha_H^{n_C(\chi)} = \prod_{C \in \mathcal{C}} \alpha_C^{n_C(\chi)} = Q_\chi \mid Q.$$

On a alors  $Q = Q_\chi P$  avec  $P \in S(V^*)$ . Comme  $Q_\chi \in S(V^*)^\chi$ , on en déduit par intégrité de  $S(V^*)$  que  $P \in S(V^*)^G$  et donc  $P \in S(V^*)^G Q_\chi$ . ■

## PARTIES MULTIPLICATIVES ET HYPERPLANS

On finit cette sous-section en définissant et étudiant certaines parties multiplicatives de  $S(V^*)$  qu'il faudra inverser pour obtenir une bonne structure sur  $(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi$  (voir la proposition 2.20).

**Lemme 1.48 — Partie multiplicative et hyperplan.** Soit  $(G, V)$  un groupe de réflexions complexes. Pour  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ , on définit la partie multiplicative de  $S(V^*)$

$$T = \langle \mathbb{C}^\times \alpha_H, \quad H \in \mathcal{M} \rangle_{\text{mult}} = \left\{ \lambda \prod_{H \in \mathcal{M}} \alpha_H^{a_H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^\times, \quad a_H \in \mathbb{N} \right\}$$

alors  $T$  est stable par  $G$  si et seulement si  $\mathcal{M}$  l'est. On dit que  $T$  est la *partie multiplicative associée à  $\mathcal{M}$* .

On se place dans le cas où  $\mathcal{M}$  et  $T$  sont stables par  $G$ . Ainsi  $G$  agit sur  $\mathcal{M}$  et on note  $\mathcal{M}/G$  l'espace des orbites. On a

$$T^G = \langle \mathbb{C}^\times \prod_{H \in C} \alpha_H^{e_H}, \quad C \in \mathcal{M}/G \rangle_{\text{mult}} = \left\{ \lambda \prod_{C \in \mathcal{M}/G} \left( \prod_{H \in C} \alpha_H^{e_H} \right)^{a_C}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^\times, \quad a_C \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Preuve.** La première équivalence repose sur le fait suivant :  $g\alpha_H \in \mathbb{C}^\times \alpha_{gH}$ . En effet, si  $\mathcal{M}$  est stable par  $G$  alors

$$\exists \mu \in \mathbb{C}^\times, \quad g \left( \lambda \prod_{H \in \mathcal{M}} \alpha_H^{a_H} \right) = \lambda \mu \prod_{H \in \mathcal{M}} \alpha_{gH}^{a_H} \in T$$

car  $\alpha_{gH} \in T$ . Réciproquement, on suppose que  $T$  est stable par  $G$ . Si  $H \in \mathcal{M}$  alors  $g\alpha_H = \lambda \alpha_{gH} \in T$ . On en déduit que

$$g\alpha_H = \lambda \alpha_{gH} = \mu \prod_{H \in \mathcal{M}} \alpha_H^{a_H} \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathbb{C}^\times, \quad a_H \in \mathbb{N}.$$

Comme les  $\alpha_H$  sont premiers entre eux deux à deux et irréductibles dans  $S(V^*)$ , la factorialité de  $S(V^*)$  assure que  $\alpha_{gH} = \delta \alpha_{H'}$  avec  $\delta \in \mathbb{C}^\times$  et  $H' \in \mathcal{M}$ . On en déduit que  $gH = H' \in \mathcal{M}$ . Ainsi  $\mathcal{M}$  est stable par  $G$ .

On suppose à présent que  $\mathcal{M}$  est stable par  $G$ . Le théorème 1.47 de Stanley montre que

$$\left\{ \lambda \prod_{C \in \mathcal{M}/G} \left( \prod_{H \in C} \alpha_H^{e_H} \right)^{a_C}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^\times, \quad a_C \in \mathbb{N} \right\}$$

est contenu dans  $T^G$ . Réciproquement, soit  $P \in T^G$ . On peut écrire

$$P = \lambda \prod_{H \in \mathcal{M}} \alpha_H^{a_H} \in S(V^*)^G \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{C}^\times.$$

Pour  $g \in G$ , on a alors

$$P = gP = \lambda \mu \prod_{H \in \mathcal{M}} \alpha_{gH}^{a_H} \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathbb{C}^\times.$$

Par factorialité, on en déduit que  $a_{gH} = a_H$  pour tout  $H \in \mathcal{M}$  et tout  $g \in G$ . Ainsi  $a_H$  est constant sur chacune des orbites de  $\mathcal{M}$  sous  $G$ . La fonction  $H \mapsto a_H$  passe donc au quotient et permet de définir une fonction  $C \mapsto a_C$  de  $\mathcal{M}/G$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $a_H = a_C$  pour tout  $H \in C$ . On a alors

$$P = \lambda \prod_{C \in \mathcal{M}/G} \left( \prod_{H \in C} \alpha_H \right)^{a_C}.$$

Le théorème 1.47 de Stanley assure alors que chacun des  $a_C$  est divisible par  $e_C$ . ■

**Remarque 1.49 – Élément premier dans  $T^{-1}S(V^*)$ .** On reprend le cadre du lemme 1.48. Soit  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$  et  $T$  la partie multiplicative associée.

Si  $H \notin \mathcal{M}$  alors  $\alpha_H$  est premier dans  $T^{-1}S(V^*)$ . En effet, les éléments premiers intervenant dans les décompositions des éléments de  $T$  en facteurs irréductibles sont les  $\alpha_H$  pour  $H \in \mathcal{M}$ . Comme si  $H \neq H'$  alors  $\alpha_H$  et  $\alpha_{H'}$  sont premiers entre eux, on en déduit que  $\alpha_H$  n'intervient pas dans la décomposition d'un élément de  $T$  si  $H \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{M}$ . Le lemme 1.6 montre que  $\alpha_H$  est premier dans  $T^{-1}S(V^*)$ .

Le lemme 1.6 montre aussi si  $H \neq H'$  avec  $H, H' \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{M}$  alors  $\alpha_H$  et  $\alpha_{H'}$  sont premiers et ne sont pas associés dans  $T^{-1}S(V^*)$  puisque  $\alpha_H$  et  $\alpha_{H'}$  sont premiers et non associés dans  $S(V^*)$ . En particulier, ils sont premiers entre eux. ■

### 1.3.3 THÉORÈME DE GUTKIN

Dans cette sous-section, on démontre le(s) théorème(s) de Gutkin (théorèmes 1.52 et 1.59) qui servent de base de travail à la sous-section suivante. Ce faisant, on introduit la notion de degré fantôme d'une représentation du groupe de réflexions complexes  $(G, V)$  et celle d'exposants.

#### DEGRÉ FANTÔME ET EXPOSANTS

On reprend les notations de la définition 1.40. Considérons une indéterminée  $T$ , on définit, pour un  $G$ -module  $N$  de dimension finie, le *degré fantôme*  $F_N(T)$  de  $N$  comme le polynôme (puisque  $S_G$  et  $N$  sont de dimension finie) à coefficients entiers

$$F_N(T) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle (S_G)_i, N \rangle T^i = \sum_{i \in \mathbb{N}} \dim((S_G)_i \otimes N^*)^G T^i = \text{grdim}(S_G \otimes N^*)^G.$$

Comme  $\dim((S_G)_i \otimes N^*)^G \in \mathbb{N}$  et  $S_G$  est isomorphe à la représentation régulière (théorème B de [CHE]), on peut écrire

$$F_N(T) = \sum_{j=1}^{\dim N} T^{m_j(N)}.$$

Les entiers  $m_j(N)$  sont appelés les *N-exposants de G* et on définit le *N-exposant total*  $m(N)$  par

$$m(N) = F_N'(1) = \sum_{j=1}^{\dim N} m_j(N).$$

**Remarque 1.50 – Somme directe.** Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux  $G$ -modules de dimension finie. La définition du degré fantôme donne tout de suite

$$F_{N_1 \oplus N_2} = F_{N_1} + F_{N_2}, \quad m(N_1 \oplus N_2) = m(N_1) + m(N_2)$$

et l'ensemble des  $N_1 \oplus N_2$ -exposants de  $G$  est la réunion des  $N_1$ -exposants de  $G$  et des  $N_2$ -exposants de  $G$ . ■

**Lemme 1.51 – Une autre expression du degré fantôme.** On note  $(d_1, \dots, d_\ell)$  les degrés de  $G$ . Soit  $N$  un  $G$ -module de dimension finie de caractère  $\chi$ . On a

$$F_N(T) = \left( \prod_{i=1}^{\ell} (1 - T^{d_i}) \right) \left( \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{\chi(g)}{\det(1 - gT)} \right).$$

**Preuve.** On calcule  $\text{grdim}(S(V^*) \otimes N^*)^G$  de deux manières différentes. La première méthode repose sur le théorème B de Chevalley [CHE]. On a

$$(S(V^*) \otimes N^*)^G \stackrel{G\text{-mod grad.}}{\simeq} R \otimes (S_G \otimes N^*)^G.$$

Le lemme 1.16 donne alors

$$\text{grdim}(S(V^*) \otimes N^*)^G = \text{grdim}(R) \text{grdim}(S_G \otimes N^*)^G = \text{grdim}(R) F_N(T).$$

Or

$$\text{grdim}(R) = \left( \prod_{i=1}^{\ell} (1 - T^{d_i}) \right)^{-1},$$

et donc

$$F_N = \left( \prod_{i=1}^{\ell} (1 - T^{d_i}) \right) \text{grdim}(S(V^*) \otimes N^G).$$

La deuxième méthode utilise la trace graduée. On a

$$\text{grdim}((S(V^*) \otimes N^G)^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{grtr}(g_{(S(V^*) \otimes N^G)}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{grtr}(g_{S(V^*)}) \chi(g^{-1}).$$

La formule 1.20 de Molien donne alors

$$\text{grdim}((S(V^*) \otimes N^G)^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{\chi(g^{-1})}{\det(1 - g^{-1}T)}.$$

Finalement, on obtient le résultat souhaité. ■

### LA VERSION FAIBLE DU THÉORÈME DE GUTKIN

On donne ici une première version du théorème de Gutkin. Elle sera l'un des ingrédients de la démonstration de la version forte. Elle illustre une nouvelle fois le fait qu'on peut regarder les hyperplans de façon indépendante. On donne ensuite quelques exemples de calcul d'exposant total (exemple 1.54 et remarque 1.55).

**Théorème 1.52 — Théorème de Gutkin (version faible).** Soient  $N$  un  $G$ -module de dimension finie, on a

$$n_H(N) = m(\text{Res}_{G_H}^G(N)) \quad \text{et} \quad m(N) = \sum_{H \in \mathcal{H}} m(\text{Res}_{G_H}^G(N)).$$

**Preuve.** Par définition des exposants de  $N$ , on a

$$F_N(T) = \sum_{i=1}^r T^{m_i(N)} \quad \text{et donc} \quad F_N'(1) = \sum_{i=1}^r m_i(N) = m(N).$$

Pour obtenir l'expression souhaitée, on va utiliser l'expression de  $F_N$  du lemme 1.51.

Soit  $g \in G$ . La multiplicité de 1 comme racine du polynôme  $\det(1 - gT)$  est la multiplicité de 1 comme valeur propre de  $g^{-1}$  et donc de  $g$ . Elle est donc inférieure ou égale à  $\ell$ . Par ailleurs, 1 est racine de

$$\prod_{i=1}^{\ell} (1 - T^{d_i})$$

de multiplicité  $\ell$ . Ainsi, avec l'expression de  $F_N$  du lemme 1.51, on obtient en distinguant l'identité, les réflexions et l'ensemble des éléments de  $G$  dont 1 est valeur propre avec multiplicité au plus  $\ell - 2$

$$F_N(T) = \frac{\chi(1)}{|G|} \prod_{i=1}^{\ell} (1 + \dots + T^{d_i-1}) + \frac{(1-T)}{|G|} \prod_{i=1}^{\ell} (1 + \dots + T^{d_i-1}) \sum_{s \in \mathcal{S}_G} \frac{\chi(s)}{1 - \det(s)T} + (1-T)^2 F(T)$$

où  $F(T)$  est une fraction rationnelle dont 1 n'est pas un pôle. Commençons par le premier terme. En dérivant, il devient

$$\frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{i=1}^{\ell} \left( (1 + \dots + (d_i-1)T^{d_i-2}) \prod_{j \neq i} (1 + \dots + T^{d_j-1}) \right).$$

$$\text{En } T = 1, \text{ on a} \quad \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{i=1}^{\ell} \left( \frac{d_i(d_i-1)}{2} \prod_{j \neq i} d_j \right) = \frac{\chi(1)}{|G|} \left( \prod_{i=1}^{\ell} d_i \right) \sum_{i=1}^{\ell} \frac{d_i-1}{2} = \frac{\chi(1)|\mathcal{S}_G|}{2}.$$

Passons au deuxième terme, en dérivant, on obtient

$$-\frac{1}{|G|} \prod_{i=1}^{\ell} (1 + \dots + T^{d_i-1}) \sum_{s \in \mathcal{S}_G} \frac{\chi(s)}{1 - \det(s)T} + (1-T)F_1(T)$$

où  $F_1(T)$  est une fraction rationnelle dont 1 n'est pas un pôle. En évaluant en  $T = 1$ , on trouve

$$-\sum_{s \in \mathcal{S}_G} \frac{\chi(s)}{1 - \det(s)}.$$

En dérivant le troisième terme et en l'évaluant en  $T = 1$ , on trouve 0. Finalement, on obtient

$$m(N) = F_N'(1) = \frac{\chi(1)|\mathcal{S}_G|}{2} - \sum_{s \in \mathcal{S}_G} \frac{\chi(s)}{1 - \det(s)}. \quad (*)$$

En partitionnant l'ensemble des réflexions suivant leur hyperplan, on obtient

$$m(N) = \sum_{H \in \mathcal{H}} \frac{\chi(1)|\mathcal{S}_{G_H}|}{2} - \sum_{H \in \mathcal{H}} \sum_{s \in \mathcal{S}_{G_H}} \frac{\chi(s)}{1 - \det(s)} = \sum_{H \in \mathcal{H}} \left( \frac{\chi(1)|\mathcal{S}_{G_H}|}{2} - \sum_{s \in \mathcal{S}_{G_H}} \frac{\chi(s)}{1 - \det(s)} \right).$$

L'égalité (\*) appliquée aux  $G_H$  donne alors la deuxième égalité.

Montrons à présent la première égalité. D'après la remarque 1.50, on a

$$m(\text{Res}_{G_H}^G(N)) = \sum_{j=0}^{e_H-1} n_{j,H} m(\det^{-j}).$$

De plus, l'égalité (\*) appliquée au groupe  $G_H$  et au caractère  $\det^{-j}$  donne alors

$$m(\det^{-j}) = \frac{e_H - 1}{2} - \sum_{n=1}^{e_H-1} \frac{\zeta_H^{-nj}}{1 - \zeta_H^n}.$$

Par ailleurs, pour  $d \in \mathbb{N}$  et  $j \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$ , l'égalité (\*) appliquée au groupe  $\mathbb{U}_d$  agissant sur  $\mathbb{C}$  par multiplication et au caractère  $\text{puiss}_j : x \mapsto x^{-j}$  de  $\mathbb{U}_d$  montre que

$$m(\text{puiss}_j) = \frac{d-1}{2} - \sum_{n=1}^{d-1} \frac{\zeta^{-nj}}{1 - \zeta^n} \quad \text{où} \quad \zeta = \exp(2i\pi/d)$$

Or l'algèbre symétrique du dual de  $\mathbb{C}$  s'identifie via la forme linéaire  $\text{id}_{\mathbb{C}}$  à l'algèbre de polynômes  $\mathbb{C}[X]$  où  $\zeta$  agit sur  $X$  par multiplication par  $\zeta^{-1}$ . L'algèbre des invariants est donc  $\mathbb{C}[X^d]$  et l'algèbre des coinvariants est  $\mathbb{C}[X]/\langle X^d \rangle$ . De plus,  $\zeta$  agit sur  $x^t$  la classe de  $X^t$  modulo  $\langle X^d \rangle$  par multiplication par  $\zeta^{-t}$ . Comme  $(1, \dots, x^{d-1})$  est une base de  $\mathbb{C}[X]/\langle X^d \rangle$ , on en déduit que le puiss<sub>j</sub>-exposant de  $\mathbb{U}_d$  est  $j$ . Ainsi

$$j = m(\text{puiss}_j) = \frac{d-1}{2} - \sum_{n=1}^{d-1} \frac{\zeta^{-nj}}{1 - \zeta^n} \quad \text{où} \quad \zeta = \exp(2i\pi/d). \quad (**)$$

En appliquant cette égalité (\*\*) à  $d = e_H - 1$ , on en déduit que  $m(\det^{-j}) = j$  et  $m(\text{Res}_{G_H}^G(N)) = n_H(N)$ . ■

**Remarque 1.53 – Calcul.** Pour démontrer la relation (\*\*), on aurait aussi utiliser la méthode suivante. Soient  $d \in \mathbb{N}$ ,  $j \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$  et  $\zeta = \exp(2i\pi/d)$ , on a

$$\sum_{n=1}^{d-1} \frac{\zeta^{-nj}}{1 - \zeta^n} = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{d-1} \frac{\zeta^{-nj}}{1 - \zeta^n} + \frac{\zeta^{nj}}{1 - \zeta^{-n}} \right).$$

$$\text{Or } \frac{\zeta^{-nj}}{1 - \zeta^n} + \frac{\zeta^{nj}}{1 - \zeta^{-n}} = \zeta^{-nj} \frac{1 - \zeta^{n(2j+1)}}{1 - \zeta^n} = \zeta^{-nj} \sum_{k=0}^{2j} \zeta^{nk} = \sum_{k=-j}^j \zeta^{nk} \quad (***)$$

Or  $\sum_{n=0}^{d-1} \zeta^{kn} = d$  si  $d \mid k$  et  $\sum_{n=0}^{d-1} \zeta^{kn} = 0$  sinon. On obtient donc

$$\sum_{n=1}^{d-1} \frac{\zeta^{-nj}}{1 - \zeta^n} = \frac{1}{2} \left( (d-1) + \sum_{k \in \llbracket -j, j \rrbracket \setminus \{0\}} (-1) \right) = \frac{d-1}{2} - j$$

Lorsque  $j = 0$ , le calcul (\*\*\* ) donne immédiatement 1 et on retrouve le calcul de [BBK, p.112]. ■

**Exemple 1.54 – Calcul de  $m(V)$  et  $m(V^*)$ .** Pour  $N = V$ , on a  $\text{Res}_{G_H}^G(V) = (\ell - 1) \det^0 \oplus \det^{-(e_H-1)}$ . Ainsi  $n_H(V) = e_H - 1$  qui est le nombre de réflexions dans  $G$  dont l'hyperplan est  $H$ . On obtient donc

$$m(V) = \sum_{H \in \mathcal{H}} (e_H - 1) = |\mathcal{S}_G|.$$

Pour  $N = V^*$ , on a  $\text{Res}_{G_H}^G(V) = (\ell - 1) \det^0 \oplus \det^{-1}$ . Ainsi  $n_H(V) = 1$ . On obtient donc

$$m(V^*) = \sum_{H \in \mathcal{H}} 1 = |\mathcal{H}|.$$

Pour  $N = \Lambda^\ell(V)$ , on a  $\text{Res}_{G_H}^G(\Lambda^\ell(V)) = \det^{-(e_H-1)}$ . Ainsi  $n_H(V) = e_H - 1$ . On obtient donc

$$m(\Lambda^\ell(V)) = \sum_{H \in \mathcal{H}} (e_H - 1) = |\mathcal{S}_G| = m(V).$$

Pour  $N = \Lambda^\ell(V^*)$ , on a  $\text{Res}_{G_H}^G(\Lambda^\ell(V^*)) = \det^{-1}$ . Ainsi  $n_H(V) = 1$ . On obtient donc

$$m(\Lambda^\ell(V^*)) = |\mathcal{H}| = m(V^*).$$

Les égalités  $m(V) = m(\Lambda^\ell(V))$  et  $m(V^*) = m(\Lambda^\ell(V^*))$  sont expliquées par la remarque 1.55 suivante. ■

**Remarque 1.55 –  $m(N) = m(\Lambda^r(N))$  et  $m(N^*) = m(\Lambda^r(N^*))$ .** Le théorème 1.52 permet des caractériser les  $G$ -modules  $N$  de dimension finie  $n$  vérifiant  $m(N) = m(\Lambda^n(N))$  ainsi que ceux vérifiant  $m(N) = m(\Lambda^n(N))$  et  $m(N^*) = m(\Lambda^n(N^*))$ .

En effet, la remarque 1.46 montre que  $n_H(N) \leq n_H(\Lambda^n(N))$  avec égalité si et seulement si  $n_H(N) \leq e_H - 1$ . La version faible du théorème de Gutkin assure alors que

$$\sum_{H \in \mathcal{H}} n_H(N) = m(N) = m(\Lambda^n(N)) = \sum_{H \in \mathcal{H}} n_H(\Lambda^n(N)) \iff \forall H \in \mathcal{H}, \quad n_H(N) = n_H(\Lambda^n(N)).$$

Ainsi  $m(N) = m(\Lambda^n(N)) \iff \forall H \in \mathcal{H}, \quad n_H(N) \leq e_H - 1$ .

Autrement dit,  $m(N) = m(\Lambda^n(N))$  si et seulement si tous les hyperplans de  $\mathcal{H}$  sont  $N$ -bons (voir la définition 2.3).

On en déduit immédiatement que  $m(N) = m(\Lambda^n(N))$  et  $m(N^*) = m(\Lambda^n(N^*))$  si et seulement si tous les hyperplans de  $\mathcal{H}$  sont  $N$ -bons et  $N^*$ -bons. La remarque 2.4 assure que  $m(N) = m(\Lambda^n(N))$  et  $m(N^*) = m(\Lambda^n(N^*))$  si et seulement si tous les hyperplans de  $\mathcal{H}$  sont  $N$ -excellents. ■

### LA VERSION FORTE DU THÉORÈME DE GUTKIN

La version forte du théorème 1.59 de Gutkin donne la non-nullité d'un déterminant (et même plus précisément une expression complètement factorisée). La démonstration proposée ici est décomposée en de multiples lemmes pour mettre en avant les différents outils qui interviennent.

**Remarque 1.56 — Section des coinvariants.** On note  $I$  l'idéal de  $S(V^*)$  engendré par l'ensemble  $S(V^*)_+^G$  des polynômes invariants sans terme constant. Montrons que  $I$  admet un supplémentaire  $G$ -stable et gradué.

L'idéal  $I$  est  $G$ -stable car l'action de  $G$  sur  $S(V^*)$  est une action par automorphisme d'anneau. On note  $S_n(V^*)$  la composante homogène de degré  $n$  de  $S(V^*)$ . Comme l'action de  $G$  sur  $S(V^*)$  est graduée, on peut, pour  $n \in \mathbb{N}$ , appliquer le théorème de Maschke à la composante homogène  $I_n = I \cap S_n(V^*)$  de degré  $n$  et ainsi la compléter par  $U_n$  en un supplémentaire  $G$ -stable de  $I_n$  dans  $S_n(V^*)$ . De plus, comme  $S(V^*)_+^G$  est gradué,  $I$  est un idéal gradué de  $S(V^*)$  et

$$U = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

est bien un supplémentaire de  $I$  dans  $S(V^*)$  qui, par construction est  $G$ -stable et gradué.

De plus, la surjection canonique  $S(V^*) \rightarrow S_G$  induit par restriction à  $U$  un isomorphisme de  $G$ -modules gradués. ■

On commence cette démonstration de la version forte du théorème de Gutkin par un lemme de théorie des groupes.

**Lemme 1.57 — Un peu de théorie des groupes.** Soient  $k$  un corps de caractéristique nulle,  $W$  un  $k$ -espace vectoriel,  $v \in W$ ,  $H$  un sous-groupe fini de  $GL(W)$  et  $N$  un  $H$ -module de dimension finie. On note  $\mathcal{F}_v$  le  $k$ -espace vectoriel des fonctions de l'orbite de  $v$  sous  $H$  à valeurs dans  $k$  et  $H_v \subset H$  le stabilisateur de  $v$ .

L'application linéaire

$$\psi_{v,N}: \begin{cases} \mathcal{F}_v \otimes N \longrightarrow N \\ f \otimes n \longmapsto f(v)n \end{cases}$$

est bien définie et vérifie  $\psi_{v,N}((\mathcal{F}_v \otimes N)^H) = N^{H_v}$ .

**Preuve.** L'application linéaire  $\psi_{v,N}$  est bien définie : l'application  $(f, n) \mapsto f(v)n$  est clairement bilinéaire. De plus, pour  $g \in H$ ,  $f \in \mathcal{F}_v$  et  $n \in N$ , on a

$$\psi_{gv,N}(g(f \otimes n)) = \psi_{gv,N}(gf \otimes gn) = f(g^{-1}gv)gn = f(v)gn = g\psi_{v,N}(f \otimes n).$$

On en déduit immédiatement que, pour  $x \in (\mathcal{F}_v \otimes N)^H$ , on a  $\psi_{gv,N}(x) = g\psi_{v,N}(x)$ . Finalement, pour  $g \in H_v$  et  $x \in (\mathcal{F}_v \otimes N)^H$ , on a  $g\psi_{v,N}(x) = \psi_{gv,N}(x) = \psi_{v,N}(x)$ . On en déduit que

$$\psi_{v,N}((\mathcal{F}_v \otimes N)^H) \subset N^{H_v}.$$

Montrons l'inclusion réciproque. Pour  $w \in H_v$  l'orbite de  $v$ , on définit  $\delta_w \in \mathcal{F}_v$  telle que  $\delta_w(w') = \delta_{ww'}$  pour tout  $w' \in H_v$ . La famille  $(\delta_w)_{w \in H_v}$  est une base de  $\mathcal{F}_v$ . Tout élément  $x \in \mathcal{F}_v \otimes N$  se décompose donc de manière unique

$$x = \sum_{w \in H_v} \delta_w \otimes n_w \quad \text{avec} \quad n_w \in N.$$

Or, pour  $g \in H$ , on a

$$gx = \sum_{w \in H_v} g\delta_w \otimes gn_w = \sum_{w \in H_v} \delta_{gw} \otimes gn_w$$

On en déduit que  $x \in (\mathcal{F}_v \otimes N)^H \iff \forall (g, w) \in H \times Hv, gn_w = n_{gw}.$  (\*)

On considère à présent  $n \in N^{H_v}.$  Pour  $g \in H,$  l'élément  $gn$  ne dépend que de la classe de  $g$  modulo  $H_v.$  Pour  $w \in Hv,$  on pose  $n_w = gn$  où  $g \in H$  vérifie  $gw = w.$  La condition (\*) montre que

$$y = \sum_{w \in Hv} \delta_w \otimes n_w \in (\mathcal{F}_v \otimes N)^H.$$

De plus,

$$\psi_{v,N}(y) = \sum_{w \in Hv} \delta_w(v) n_w = n_v = n.$$

On obtient ainsi l'égalité ensembliste souhaitée. ■

Le lemme suivant s'obtient alors immédiatement à partir du lemme précédent grâce aux propriétés classiques d'un groupe de réflexions complexes (théorèmes de Chevalley et de Steinberg).

**Lemme 1.58 – Évaluation.** Soient  $v \in V,$   $N$  un  $G$ -module de dimension finie et  $U \subset S(V^*)$  un supplémentaire  $G$ -stable et gradué de l'idéal de  $S(V^*)$  engendré par  $S_+^G$  (voir la remarque 1.56). On considère l'application linéaire

$$\varphi_{v,N} : \begin{cases} S(V^*) \otimes N \longrightarrow N \\ f \otimes n \mapsto f(v)n. \end{cases}$$

On a  $\varphi_{v,N}((S(V^*) \otimes N)^G) = \varphi_{v,N}((U \otimes N)^G) = N^{G_v}.$  En particulier, si  $v$  est régulier alors  $\varphi_{v,N}$  est surjective.

**Preuve.** Soit  $p : S(V^*) \rightarrow \mathcal{F}_v$  l'application de restriction. On a  $\varphi_{v,N} = \psi_{v,N} \circ (p \otimes \text{id}_N).$  De plus, l'application  $p$  est un morphisme surjectif de  $G$ -modules. On en déduit que  $(p \otimes \text{id}_N)((S(V^*) \otimes N)^G) = (\mathcal{F}_v \otimes N)^G.$  Le lemme 1.57 donne alors  $\varphi_{v,N}((S(V^*) \otimes N)^G) = N^{G_v}.$

Par un raisonnement analogue, il suffit de vérifier que  $p(U) = \mathcal{F}_v$  pour obtenir  $\varphi_{v,N}((U \otimes N)^G) = N^{G_v}.$  Soit  $\gamma \in \mathcal{F}_v.$  Il existe  $f \in S(V^*)$  tel que  $p(f) = \gamma.$  Or le théorème B de Chevalley [CHE] donne  $S(V^*) = S(V^*)^G \otimes U.$  On considère alors la décomposition de

$$f = \sum_{i=1}^n f_i \otimes u_i \in S(V^*)^G \otimes U,$$

Comme  $f_i$  est  $G$ -invariant, sa restriction à l'orbite de  $v$  est une constante  $\lambda_i.$  On obtient alors

$$\gamma = p(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i p(u_i)$$

et la restriction de  $p$  à  $U$  est bien surjective.

Si  $v$  est régulier (c'est-à-dire dans aucun hyperplan de  $\mathcal{H}$ ), le théorème de Steinberg (voir [STE, corollaire 1.6] ou [LEH2, théorème 1.1]) assure que  $G_v = \{1\}$  et donc l'application  $\varphi_{v,N}$  est surjective. ■

On arrive enfin au théorème de Gutkin.

**Théorème 1.59 – Théorème de Gutkin (version forte).** Soient  $N$  un  $G$ -module de dimension finie  $n,$   $(y_1, \dots, y_n)$  une base de  $N^*$  et  $U$  un supplémentaire  $G$ -stable et gradué de l'idéal de  $S(V^*)$  engendré  $S(V^*)_+^G$  (voir la remarque 1.56).

L'espace vectoriel  $(U \otimes N^*)^G$  est de dimension  $n.$  Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une base de  $(U \otimes N^*)^G.$  Pour  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket,$  on définit  $P_{ij} \in U$  les composantes de  $u_i \in S(V^*) \otimes N^*$  dans la  $S(V^*)$ -base  $(1 \otimes y_j)_{1 \leq j \leq n}$  de  $S(V^*) \otimes N^* :$

$$u_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} \otimes y_j$$

et on pose  $C = (P_{ij})_{i,j} \in M_n(S(V^*)).$

Pour  $g \in G,$  on note  $g_N$  la matrice de  $g \in GL(N)$  dans la base duale de la base  $(y_1, \dots, y_n).$  On a alors

- (i)  $g \cdot C := (gP_{ij})_{i,j} = Cg_N$
- (ii)  $\det C \in \mathbb{C}^\times Q_N.$

En particulier,  $\det C \neq 0$  et  $\deg \det C = m(N).$

**Preuve.** D'après le théorème B de Chevalley [CHE],  $U$  est  $G$ -isomorphe à la représentation régulière et donc  $(U \otimes N^*)^G$  est de dimension  $\dim N^* = \dim N = n.$

Soit  $g \in G,$  on note  $g_{N^*} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  la matrice de  $g \in GL(N^*)$  dans la base  $(y_1, \dots, y_n).$  Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket,$  on a

$$gu_i = \sum_{j=1}^n gP_{ij} \otimes gy_j = \sum_{j=1}^n gP_{ij} \otimes \sum_{k=1}^n a_{kj} y_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj} (gP_{ij}) \otimes y_k.$$

L'unicité de la décomposition dans la base  $(1 \otimes y_j)_{1 \leq j \leq n}$  assure alors que

$$C = (g \cdot C)^t g_{N^*}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad g \cdot C = C^t g_{N^*}^{-1} = C g_N$$

*Remarques : changement de bases.* Lorsqu'on effectue un changement de base de  $N^*$ , on change  $C$  en  $C^t A^{-1}$  où  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  est la matrice de passage de  $(y_1, \dots, y_n)$  à la nouvelle base  $(z_1, \dots, z_n)$ . En effet,

$$u_i = \sum_{j=1}^n Q_{ij} \otimes z_j = \sum_{j=1}^n Q_{ij} \otimes \sum_{k=1}^n a_{kj} y_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n Q_{ij} a_{kj} \otimes y_k.$$

On multiplie donc le déterminant de  $C$  par un élément inversible de  $\mathbb{C}^\times$ . Finalement, pour montrer la propriété sur le déterminant, on peut choisir la base de  $N^*$  dans laquelle on va travailler.

Lorsqu'on effectue un changement de base de  $(U \otimes N^*)^G$ , on change  $C$  en  $C^t A$  où  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  est la matrice de passage de  $(u_1, \dots, u_n)$  à la nouvelle base  $(v_1, \dots, v_n)$ . En effet,

$$v_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} u_k = \sum_{k=1}^n a_{ki} \sum_{j=1}^n P_{kj} \otimes y_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} P_{kj} \otimes y_j.$$

On multiplie donc le déterminant de  $C$  par un élément inversible de  $\mathbb{C}^\times$ . Finalement, pour montrer la propriété sur le déterminant, on peut choisir la base de  $(U \otimes N^*)^G$  dans laquelle on va travailler.

Soit  $H \in \mathcal{H}$ . On considère maintenant  $(y_1, \dots, y_r)$  une base de  $N^*$  dans laquelle  $s_H$  agit de façon diagonale. Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on définit les entiers  $j_i$  vérifiant  $0 \leq j_i \leq e_H - 1$  et  $y_i$  est vecteur propre de  $s_H$  agissant sur  $N^*$  associé à la valeur propre  $\zeta_H^{j_i}$ . On a alors, pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$s_H(u_i) = \sum_{k=1}^n s_H(P_{ik}) \otimes s_H(y_k) = \sum_{k=1}^n s_H(P_{ik}) \otimes \zeta_H^{j_k} y_k = \sum_{k=1}^n \zeta_H^{j_k} s_H(P_{ik}) \otimes y_k.$$

Comme les  $u_i$  sont fixes par  $G$ , on en déduit que

$$\forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad s_H(P_{ik}) = \zeta_H^{-j_k} P_{ik}.$$

Le lemme 1.28 assure alors que  $\forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \alpha_H^{j_k} \mid P_{ik}$ .

Ainsi, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , tous les éléments de la  $k^e$  colonne de  $C$  sont divisibles par  $\alpha_H^{j_k}$ . La multilinéarité du déterminant assure que  $\det(C)$  est divisible par

$$\prod_{k=1}^n \alpha_H^{j_k} = \alpha_H^{\sum_{k=1}^n j_k} = \alpha_H^{n_H(N)}.$$

De plus, si  $H' \in \mathcal{H}$  et  $H' \neq H$  alors  $\alpha_H^{n_H(N)}$  et  $\alpha_{H'}^{n_{H'}(N)}$  sont premiers entre eux. On en déduit que  $\det(C)$  est divisible par

$$\prod_{H \in \mathcal{H}} \alpha_H^{n_H(N)} = Q_N.$$

Par ailleurs, comme  $U$  est gradué, on peut écrire

$$(U \otimes N^*)^G = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (U_i \otimes N^*)^G,$$

et ainsi, grâce au théorème de la base incomplète, choisir une base  $(u_1, \dots, u_n)$  formée d'éléments gradués. Dans cette base, la  $i^e$  ligne de  $C$  est formée de polynômes homogènes de degré  $\deg u_i$ . Ainsi  $\det(C)$  est un polynôme homogène de degré

$$\deg \det(C) = \sum_{i=1}^n \deg u_i.$$

Comme la surjection canonique  $S(V^*) \rightarrow S_G$  induit, par restriction à  $U$ , un isomorphisme de  $G$ -modules gradués, la famille  $(\deg u_1, \dots, \deg u_n)$  n'est autre que la famille des  $N$ -exposants de  $G$ . Ainsi, par définition du  $N$ -exposant total de  $G$ , on a  $\deg \det(C) = m(N)$ .

La version faible du théorème de Gutkin 1.52 assure alors que

$$m(N) = \sum_{H \in \mathcal{H}} n_H(N) \quad \text{et donc} \quad \det(C) \in \mathbb{C} \prod_{H \in \mathcal{H}} \alpha_H^{n_H(N)}.$$

Il nous reste à montrer que  $\det(C) \neq 0$ . On utilise pour cela le lemme 1.58. La matrice de l'application linéaire  $\varphi_{v, N^*} : (U \otimes N^*)^G \rightarrow N^*$  dans les bases  $(u_1, \dots, u_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  est alors  $(P_{ij}(v))_{1 \leq i,j \leq n}$ . Lorsqu'on choisit  $v \in V^{\text{reg}}$ , l'application  $\varphi_{v, N^*} : (U \otimes N^*)^G \rightarrow N^*$  est surjective et donc inversible. Ainsi  $\det((P_{ij}(v))_{1 \leq i,j \leq n}) \neq 0$ . Comme le morphisme d'évaluation en  $v$  est un morphisme d'anneaux, on en déduit que  $\det(C) \neq 0$ . ■

On termine cette sous-section en rappelant la définition 2.2 de [OPD] qui nous servira dans la proposition 2.14.

**Définition 1.60 – Matrice minimale au sens d'Opdam.** Soit  $N$  un  $G$ -module de dimension finie  $n$ . On fixe une base  $\mathcal{B}$  de  $N$  et pour  $g \in G$ , on note  $g_N$  la matrice de  $g$  dans  $\mathcal{B}$ . Une *matrice  $N$ -minimale au sens d'Opdam*

$$C = (P_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(S(V^*))$$

est une matrice vérifiant

- (i)  $gC := (gP_{ij})_{i,j} = Cg_N$  pour tout  $g \in G$  ;
- (ii)  $\det C \neq 0$  ;
- (iii)  $\deg \det C = m(N)$  ;
- (iv) Il existe  $D \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $\mathbb{E} \cdot C = DC$  où  $\mathbb{E} \cdot C = (\mathbb{E}(P_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $\mathbb{E}$  est l'endomorphisme de  $S(V^*)$  donné par  $\mathbb{E}(P) = (\deg P)P$  pour tout polynôme homogène  $P \in S(V^*)$ .

**Remarque 1.61 – Matrice minimale et théorème de Gutkin.** En choisissant une base  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $(U \otimes N^*)^G$  formée d'éléments homogènes (pour assurer la condition (iv) de la définition 1.60) le théorème de Gutkin 1.59 assure l'existence d'une matrice  $N$ -minimale. ■

### 1.3.4 THÉORÈME DE GUTKIN ET MATRICE MINIMALE

On présente dans cette sous-section un premier travail personnel. Son but est d'élargir la notion de matrice minimale au sens d'Opdam (pour oublier la condition (iv) d'homogénéité) et de démontrer dans ce cadre plus large les points (iii) et (iv) de la proposition 2.4 de [OPD]. Pour cela et grâce au théorème 1.59 de Gutkin, il va simplement suffire d'étudier quelques actions sur un espace de matrices à coefficients dans un espace vectoriel.

#### MATRICE À COEFFICIENTS DANS UN ESPACE VECTORIEL.

Soient  $k$  un corps commutatif,  $R$  une  $k$ -algèbre commutative associative et unitaire et  $S$  un  $R$ -module. On note  $M_{n,m}(S)$  le  $R$ -module des matrices à  $n$  lignes et  $m$  colonnes à coefficients dans  $S$ .

La structure de  $R$ -module de  $S$  permet de définir, pour tout  $\ell$ , par produit matriciel à gauche une application  $R$ -bilinéaire de  $M_{\ell,n}(R) \times M_{n,m}(S)$  dans  $M_{\ell,m}(S)$  et par produit matriciel à droite une application  $R$ -bilinéaire de  $M_{n,m}(S) \times M_{m,\ell}(R)$  dans  $M_{n,\ell}(S)$ . De façon précise, pour  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq n} \in M_{\ell,n}(R)$ ,  $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq \ell} \in M_{m,\ell}(R)$  et  $U = (x_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in M_{n,m}(S)$ , on pose

$$A \cdot U = \left( \sum_{\delta=1}^n a_{i\delta} x_{\delta j} \right)_{1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m} \quad \text{et} \quad U \cdot B = \left( \sum_{\delta=1}^m b_{\delta j} x_{i\delta} \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \ell}.$$

De plus, si  $A' \in M_{\ell',\ell}(R)$  et  $B' \in M_{\ell',\ell'}(R)$ , on a

$$(A' A) \cdot U = A' \cdot (A \cdot U) \quad \text{et} \quad U \cdot (B B') = (U \cdot B) \cdot B'.$$

Pour finir, les « actions » à droite et à gauche commutent :

$$(A \cdot U) \cdot B = A \cdot (U \cdot B).$$

En particulier, comme  $\text{id}_n \cdot U = U$  et  $U \cdot \text{id}_m = \text{id}_m$ , on a une structure de  $M_n(R)$ -module- $M_m(R)$  sur  $M_{n,m}(S)$ . Par ailleurs, comme  $k \subset R$ , on en déduit, par restriction des « actions » de  $M_{\ell,n}(k)$  et  $M_{m,\ell}(k)$  sur  $M_{n,m}(S)$ .

Par ailleurs, on a une action de  $\text{End}_k(S)$  sur  $M_{n,m}(S)$  coefficients par coefficients. Elle est donnée par l'application  $k$ -bilinéaire

$$\begin{cases} \text{End}_k(S) \times M_{n,m}(S) \longrightarrow M_{n,m}(S) \\ (f, U) \longmapsto f \cdot U = (f(x_{ij}))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \end{cases}$$

De plus, pour  $f, g \in \text{End}_k(S)$ , on a  $g \cdot (f \cdot U) = gf \cdot U$  et  $\text{id}_S \cdot U = U$ . Ainsi  $M_{n,m}(S)$  est un  $\text{End}_k(S)$ -module. Par ailleurs, la  $k$ -linéarité de  $f$  assure que l'action de  $\text{End}_k(S)$  commute avec les « actions » de  $M_{\ell,n}(k)$  et de  $M_{m,\ell}(k)$ . En particulier,  $M_{n,m}(S)$  hérite d'une structure de  $(M_n(k) \otimes \text{End}_k(S))$ -module- $M_m(k)$ . De plus, si  $f \in \text{End}_k(S)$  est en fait  $R$ -linéaire (c'est-à-dire  $f \in \text{End}_R(S)$ ) alors l'action de  $f$  commute avec les « actions » de  $M_{\ell,n}(R)$  et de  $M_{m,\ell}(R)$ . Ainsi  $M_{n,m}(S)$  hérite d'une structure de  $(M_n(R) \otimes \text{End}_R(S))$ -module- $M_m(R)$ . Pour la suite, on ne retient que la structure de  $(M_n(R) \otimes \text{End}_R(S))$ -module- $M_m(k)$  sur  $M_{n,m}(S)$ .

#### APPLICATION LINÉAIRE ET MATRICE.

Soit  $X$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $r$ . On fixe une base  $(x_1, \dots, x_r)$  de  $X$  et  $(\xi_1, \dots, \xi_r)$  sa base duale ce qui permet d'identifier  $M_r(k)$  et  $\text{End}_k(X)$ .

Les  $k$ -isomorphismes usuels

$$\alpha: \begin{cases} \text{Hom}_k(X, S) \longrightarrow M_{1,r}(S) \\ f \longmapsto (f(x_1), \dots, f(x_r)) \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta: \begin{cases} M_{1,r}(S) \longrightarrow X^* \otimes S \\ (s_1, \dots, s_r) \longmapsto \sum_{i=1}^r (\xi_i \otimes s_i). \end{cases}$$

deviennent alors des isomorphismes de  $\text{End}_k(S)$ -module- $M_r(k)$  (et donc de  $\text{End}_R(S)$ -module- $M_r(k)$ ). La commutativité avec les éléments de  $\text{End}_k(S)$  est évidente. Si  $\varphi \in \text{End}_k(X)$  a pour matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq r}$  dans la base  $(x_1, \dots, x_r)$ , on a

$$\alpha(f) \cdot A = \left( \sum_{i=1}^r a_{ij} f(x_i) \right)_{1 \leq j \leq r} = \left( f \left( \sum_{i=1}^r a_{ij} x_i \right) \right)_{1 \leq j \leq r} = \left( f \left( \sum_{i=1}^r a_{ij} x_i \right) \right)_{1 \leq j \leq r} = (f\varphi(x_j))_{1 \leq j \leq r}.$$

On obtient ainsi le fait que  $\alpha$  soit un morphisme de modules- $M_r(k)$ . Par ailleurs,

$$\beta((s_1, \dots, s_r)) \cdot A = \left( \sum_{i=1}^r \left( \sum_{j=1}^r \xi_j a_{ij} \right) \otimes s_i \right)_{1 \leq j \leq r} = \left( \sum_{j=1}^r \xi_j \otimes \left( \sum_{i=1}^r a_{ij} s_i \right) \right)_{1 \leq j \leq r} = \beta((s_1, \dots, s_r) \cdot A)$$

et  $\beta$  est donc aussi un morphisme de modules- $M_r(k)$ .

De plus,  $\beta \circ \alpha$  n'est autre que l'inverse de l'isomorphisme classique  $\Psi$  de  $X^* \otimes S$  dans  $\text{Hom}_k(X, S)$ . En effet,

$$\Psi \circ \beta \circ \alpha(f) = \left( x \mapsto \sum_{i=1}^r \xi_i(x) f(x_i) \right) = \left( x \mapsto f \left( \sum_{i=1}^r \xi_i(x) x_i \right) \right) = f$$

et comme tout élément de  $X^* \otimes S$  se décompose sous la forme  $\sum_{i=1}^r (\xi_i \otimes s_i)$ , on a

$$\beta \circ \alpha \circ \Psi \left( \sum_{i=1}^r (\xi_i \otimes s_i) \right) = \beta \left( \left( \sum_{i=1}^r \xi_i(s_j) s_i \right)_{1 \leq j \leq r} \right) = \beta(s_1, \dots, s_r) = \sum_{i=1}^r (\xi_i \otimes s_i).$$

Via l'isomorphisme  $\alpha$ , l'injectivité de  $f$  est synonyme de la liberté de la famille  $\alpha(f)$  ; la surjectivité (resp. bijectivité) de  $f$  est synonyme du fait que la famille  $\alpha(f)$  soit génératrice (resp. une base) de  $S$ .

## ACTION DE GROUPE

On suppose que  $S$  et  $X$  sont deux  $kG$ -modules et on note  $\rho: kG \mapsto M_r(k)$  le morphisme structurel de  $X$  (toujours via l'identification de  $\text{End}_k(X)$  avec  $M_r(k)$  via la base  $(x_1, \dots, x_r)$ ). La structure de  $\text{End}_k(S)$ -module- $M_r(k)$  de  $M_{1,r}(S)$  munit  $M_{1,r}(S)$  d'une structure de  $kG$ -module correspondant à l'action diagonale de  $G$  sur  $X$  et  $S$  : pour  $g \in G$  et  $(s_1, \dots, s_r) \in M_{1,r}(S)$ , on a

$$g \cdot (s_1, \dots, s_r) = (gs_1, \dots, gs_r) \cdot \rho(g^{-1}).$$

Comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont des isomorphismes de  $\text{End}_k(S)$ -module- $M_r(k)$ , on en déduit que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des isomorphismes de  $kG$ -modules pour la structure décrite ci-dessus. En particulier,  $\alpha$  et  $\beta$  induisent des isomorphismes respectivement entre  $\text{Hom}_G(X, S)$  et  $M_{1,r}(S)^G$  et  $M_{1,r}(S)^G$  et  $(X^* \otimes S)^G$ . Autrement dit, se donner un morphisme de  $G$ -modules de  $X$  dans  $S$  revient à se donner une matrice  $L$  uniligne à  $r$  colonnes à coefficients dans  $S$  vérifiant  $gL = L\rho(g)$ .

On suppose de plus que  $S$  est en fait un  $RG$ -module (et pas simplement un  $kG$ -module). Les ensembles  $\text{Hom}_G(X, S)$ ,  $M_{1,r}(S)^G$  et  $(X^* \otimes S)^G$  sont alors en fait des  $R$ -modules et  $\alpha$  et  $\beta$  sont  $R$ -linéaires.

## FAMILLE D'APPLICATIONS LINÉAIRES

Soit  $i \in \mathbb{N}$ . Les isomorphismes  $\alpha$  et  $\beta$  induisent des isomorphismes  $k$ -linéaires (encore noté  $\alpha$  et  $\beta$ ) respectivement entre  $\text{Hom}_k(X, S)^i$  et  $M_{i,r}(S)$  et entre  $M_{i,r}(S)$  et  $(X^* \otimes S)^i$ . De façon précise, si  $(f_1, \dots, f_i) \in \text{Hom}_k(X, S)^i$  alors, pour  $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$ , on pose  $L_j = \alpha(f_j)$  et on considère la matrice  $L \in M_{i,r}(S)$  dont la  $j^e$  ligne est  $L_j$ . De même, si  $L \in M_{i,r}(S)$ , on note  $L_j$  la  $j^e$  ligne de  $L$  et on pose  $\beta_j = \beta(L_j) \in X^* \otimes S$  et  $\beta(L) = (\beta_1, \dots, \beta_i)$ .

Il est clair que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des isomorphismes de  $\text{End}_k(S)$ -module. Le calcul matriciel (par ligne) montre que  $\alpha$  et  $\beta$  sont aussi des morphismes de modules- $M_r(k)$ . En particulier,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des  $G$ -morphismes pour l'action de  $G$  sur  $M_{i,r}(S)$  donnée par

$$\forall g \in G, \quad \forall L = (\ell_{kk'})_{1 \leq k \leq i, 1 \leq k' \leq r} \in M_{i,r}(S), \quad g \cdot L = (g\ell_{kk'}) \rho(g^{-1}).$$

**Notation 1.62 — Action de  $G$ .** Soient  $g \in G$  et  $L \in M_{i,r}(S)$ . On note  $g \cdot L$  l'image de  $L$  par l'action de  $g \in G$  définie ci-dessus et  $gL$  l'image de  $L$  par l'action de  $g \in \text{End}_k(S)$ .

Ainsi, se donner une famille  $(f_1, \dots, f_i) \in \text{Hom}_G(X, S)^i$  revient à se donner une matrice  $L \in M_{i,r}(S)$  telle que  $g \cdot L = L$  pour tout  $g \in G$  ou encore  $gL = L\rho(g)$  pour tout  $g \in G$ .

Par combinaison linéaire, on définit une application  $R$ -bilinéaire  $\Delta$  qui commute avec l'action de  $G$

$$\Delta: \begin{cases} M_{j,i}(R) \times \text{Hom}_k(X, S)^i & \longrightarrow \text{Hom}_k(X, S)^j \\ ((n_{kk'})_{1 \leq k \leq j, 1 \leq k' \leq i}, (f_1, \dots, f_i)) \longmapsto \left( \sum_{k'=1}^i n_{kk'} f_{k'} \right)_{1 \leq k \leq j} \end{cases}.$$

La calcul matriciel par lignes et colonnes assure que

$$\forall (N, f_1, \dots, f_i) \in M_{j,i}(R) \times \text{Hom}_k(X, S)^i, \quad \alpha \Delta(N, (f_1, \dots, f_i)) = N \cdot \alpha(f_1, \dots, f_i).$$

Autrement dit, faire des combinaisons  $R$ -linéaires d'application de  $X$  dans  $S$  revient à multiplier à gauche par la matrice des coefficients de la combinaison linéaire.

On peut alors résumer ce qui précède par la proposition suivante.

**Proposition 1.63 – Base.** On suppose que  $\text{Hom}_G(X, S)$  est un  $R$ -module libre de rang  $i$ . Se donner une  $R$ -base de  $\text{Hom}_G(X, S)$  est équivalent à se donner une matrice  $L \in M_{i,r}(S)$  vérifiant

- (i)  $gL = L\rho(g)$  pour tout  $g \in G$  ;
- (ii) pour toute matrice  $M \in M_{j,r}(S)$  telle que  $gM = M\rho(g)$  pour tout  $g \in G$ , il existe une unique matrice  $N \in M_{j,i}(R)$  telle que  $M = NL$ .

### APPLICATION AUX GROUPES DE RÉFLEXIONS COMPLEXES

On fixe un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie et  $G \subset \text{GL}(V)$  un groupe de réflexions complexes. On applique ce qui précède à  $S = S(V^*)$  l'algèbre symétrique du dual de  $V$ ,  $R = S(V^*)^G$  l'algèbre des invariants de  $S$  et  $X = N$  un  $\mathbb{C}G$ -module de dimension finie  $r = n$  (on note  $\rho: \mathbb{C}G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(N)$  le morphisme structurel). On note  $S_G$  l'algèbre des coinvariants de  $G$ .

Le théorème B de Chevalley [CHE] assure que

$$\text{Hom}_G(N, S(V^*)) = (N^* \otimes S(V^*))^G = S(V^*)^G \otimes (N^* \otimes S_G)^G$$

est un  $S(V^*)^G$ -module libre de rang  $n$ . La proposition 1.63 donne alors l'existence d'une matrice  $C \in M_n(S(V^*))$  vérifiant  $gC = C\rho(g)$  pour tout  $g \in G$  et pour toute matrice  $D \in M_{j,n}(S)$  telle que  $gD = D\rho(g)$  pour tout  $g \in G$ , il existe une unique matrice  $E \in M_{j,n}(R)$  telle que  $D = EC$ .

Comme la construction de la matrice  $C = (P_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  du théorème de Gutkin 1.59 (voir le théorème 1 de [GUT]) suit exactement le principe décrit ci-dessus, le théorème de Gutkin 1.59 peut s'énoncer de la façon suivante.

**Proposition 1.64 – Théorème de Gutkin : version forte 2.** Soient  $\rho$  une représentation (matricielle) de  $G$  de dimension  $n$  et  $C \in M_n(S(V^*))$  vérifiant

- (i)  $gC = C\rho(g)$  pour tout  $g \in G$  ;
- (ii) pour toute matrice  $D \in M_{j,n}(S(V^*))$  telle que  $gD = D\rho(g)$  pour tout  $g \in G$ , il existe une unique matrice  $E \in M_{j,n}(R)$  telle que  $D = EC$ .

alors  $\det C \in \mathbb{C}^\times Q_\rho$ .

La proposition 1.64 c'est-à-dire le théorème de Gutkin permet d'élargir légèrement la notion de matrice minimale (on oublie la condition (iv) d'homogénéité) et donne une démonstration de la proposition 2.4 (iii) et (iv) de [OPD].

**Proposition-Définition 1.65 – Matrice minimale.** Soient  $\rho$  une représentation (matricielle) de  $G$  de dimension  $n$  et  $C \in M_n(S(V^*))$ . On a équivalence entre 1, 2, 3 et 4.

- 1) (i)  $gC = C\rho(g)$  pour tout  $g \in G$  ;  
(ii) pour toute matrice  $D \in M_{j,n}(S(V^*))$  vérifiant  $gD = D\rho(g)$  pour tout  $g \in G$ , il existe une unique matrice  $E \in M_{j,n}(R)$  telle que  $D = EC$  ;
- 2) (i)  $gC = C\rho(g)$  pour tout  $g \in G$  ;  
(ii)  $\det C \neq 0$  ;  
(iii)  $\deg \det C = m(\rho)$  ;
- 3) (i)  $gC = C\rho(g)$  pour tout  $g \in G$  ;  
(ii)  $\det C \neq 0$  ;  
(iii)  $\deg \det C$  est minimal parmi les matrices de  $M_n(S(V^*))$  vérifiant (i) ;

- 4) (i)  $gC = C\rho(g)$  pour tout  $g \in G$  ;  
(ii)  $\det C \in \mathbb{C}^\times Q_\rho$ .

On dit d'une matrice vérifiant 1) à 4) que c'est une *matrice  $\rho$ -minimale*. On dit qu'une matrice vérifiant 1) à 4) et le point (iv) de la définition 1.60 (c'est-à-dire une matrice  $\rho$ -minimale au sens d'Opdam) est une *matrice  $\rho$ -minimale homogène*.

**Preuve.** 1)  $\Rightarrow$  2) et 1)  $\Rightarrow$  4) résultent immédiatement de la proposition 1.64. 4)  $\Rightarrow$  2) est évident.  
2)  $\Rightarrow$  1). Soient  $C$  vérifiant 2) et  $D$  vérifiant 1). Il existe  $E \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $C = ED$ . On a  $\det C = \det E \det D$  et donc en regardant les degrés  $\deg \det E = 0$ . Ainsi  $E$  est inversible dans  $\mathbb{R}$  (puisque par hypothèse  $\det E \neq 0$ ) et donc pour toute matrice  $P \in M_{j,n}(\mathbb{S})$  telle que  $gP = P\rho(g)$ , il existe une matrice  $P' \in M_{j,n}(\mathbb{R})$  telle que  $P = P'D = P'E^{-1}C = P''C$  avec  $P'' = P'E^{-1} \in M_{j,n}(\mathbb{R})$ .  
2)  $\Rightarrow$  3). Soit  $C$  vérifiant 2). On a vu que  $C$  vérifie 1). Ainsi si  $D$  vérifie (i), on a  $D = EC$  avec  $E \in M_n(\mathbb{R})$  et donc  $\deg \det D = \deg \det E + \deg \det C \geq \deg \det C$ .  
3)  $\Rightarrow$  2). Soient  $C$  vérifiant 3) et  $D$  vérifiant 1). On a donc  $C = ED$  avec  $E \in M_n(\mathbb{R})$ . On en déduit que  $\deg \det C = \deg \det E + \deg \det D$ . Comme  $D$  vérifie (i), on en déduit par minimalité que  $\deg \det E = 0$  et  $\deg \det C = \det \det D = m(\rho)$ . ■

### 1.3.5 GROUPES DE RÉFLEXIONS COMPLEXES VS GROUPES DE COXETER

On termine cette section de rappels sur les groupes de réflexions en étudiant le lien entre groupes de réflexions réelles (c'est-à-dire groupe de Coxeter) et groupes de réflexions complexes. Le résultat principal est la proposition 1.69. Il repose sur les lemmes 1.67 et 1.68 (voir aussi [SER, 13.2]).

**Définition 1.66 — Représentation réelle.** Soient  $G$  un groupe fini et  $V$  un  $\mathbb{C}G$ -module. On dit que la représentation  $V$  est une *représentation réelle* s'il existe un  $\mathbb{R}G$ -module  $V'$  tel que  $V \xrightarrow{\mathbb{C}G\text{-mod.}} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V'$ .

**Lemme 1.67 — Forme bilinéaire invariante.** Soient  $G$  un groupe fini et  $V$  une représentation de dimension finie de  $G$  sur  $\mathbb{C}$  de dimension finie de caractère  $\chi$ . On a les équivalences

- (i) Il existe une forme bilinéaire  $G$ -invariante non dégénérée sur  $V$  si et seulement si  $\chi$  est à valeurs réelles ;  
(ii) La représentation  $V$  est une représentation réelle si et seulement s'il existe une forme bilinéaire symétrique  $G$ -invariante non dégénérée sur  $V$ .

**Preuve.** Démontrons l'équivalence (i). On note  $\bar{\chi}$  le conjugué de  $\chi$  : c'est le caractère de la représentation  $V^*$ . Le caractère  $\chi$  est à valeurs réelles si et seulement si  $\chi = \bar{\chi}$ . Une représentation est caractérisée par son caractère (voir [SER, 2.3 corollaire 2]) donc  $\chi = \bar{\chi}$  si et seulement si  $V \xrightarrow{\mathbb{G}\text{-mod.}} V^*$ . Par définition, on a  $V \xrightarrow{\mathbb{G}\text{-mod.}} V^*$  si et seulement s'il existe  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, V^*)$  bijective.

Soit  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, V^*)$  bijective. L'application  $B: (v, w) \mapsto f(v)(w)$  est une forme bilinéaire  $G$ -invariante. La bijectivité de  $f$  assure la non-dégénérescence de  $B$ . En effet, si  $v \neq 0$  alors  $f(v) \neq 0$  et donc il existe  $w \in V$  tel que  $f(v)(w) \neq 0$  ; de même, si  $w \neq 0$ , il existe  $v \in V$  tel que  $f(v)(w) \neq 0$ . Or il existe  $v$  tel que  $\varphi = f(v)$  et donc  $f(v)(w) = \varphi(w) \neq 0$ .

Réciproquement, soit  $B$  une forme bilinéaire non dégénérée  $G$ -invariante. L'application  $f$  définie par

$$f: \begin{cases} V \longrightarrow V^* \\ v \longmapsto (w \mapsto B(v, w)) \end{cases}$$

est un isomorphisme de  $\mathbb{C}G$ -modules. On obtient ainsi l'équivalence souhaitée.

Passons à l'équivalence (ii). Soit  $V'$  un  $\mathbb{R}G$ -module tel que  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V' \xrightarrow{\mathbb{G}\text{-mod.}} V$ . Montrons qu'il existe sur  $V'$  un produit scalaire  $G$ -invariant. Pour cela, considérons un produit scalaire  $b$  sur  $V'$ . La forme bilinéaire  $b'$  définie par

$$b'(v, w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} b(g^{-1}v, g^{-1}w) \quad \text{pour tout } v, w \in V'$$

est une forme bilinéaire symétrique  $G$ -invariante. De plus, pour  $v \in V'$ , l'élément  $b'(v, v) \in \mathbb{R}$  est une somme de termes positifs donc  $b'(v, v) \geq 0$  et  $b'(v, v) = 0$  implique successivement  $b(v, v) = 0$  et  $v = 0$ . Ainsi  $b'$  est un produit scalaire  $G$ -invariant.

Considérons alors l'application

$$b'': \begin{cases} (\mathbb{C} \otimes V') \times (\mathbb{C} \otimes V') \longrightarrow \mathbb{C} \\ (\lambda \otimes v_1, \mu \otimes v_2) \longmapsto \lambda \mu b'(v_1, v_2) \end{cases}$$

Elle est bien définie. On vérifie qu'elle est bilinéaire symétrique non dégénérée et  $G$ -invariante.

Réiproquement, supposons qu'il existe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et  $G$ -invariante  $b$ . Commençons par montrer qu'il existe un produit scalaire hermitien  $G$ -invariant  $B$  (on suppose que la semi-linéarité a lieu en la seconde variable). On considère un produit scalaire hermitien  $B'$  sur  $V$ . On a alors

$$(v, w) \mapsto B(v, w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} B'(g^{-1}v, g^{-1}w)$$

est une forme sesquilinearéaire hermitienne  $G$ -invariante. De plus, pour  $v \in V$ , l'élément  $B(v, v)$  est une somme de réels positifs donc  $B(v, v) \geq 0$  et  $B(v, v) = 0$  implique successivement  $B'(v, v) = 0$  et  $v = 0$ . Ainsi  $B$  est un produit scalaire hermitien  $G$ -invariant.

Soit  $w \in W$ . Comme  $B$  est un produit scalaire hermitien,  $B$  est non dégénérée. On peut donc représenter la forme linéaire  $v \mapsto b(w, v)$  avec  $B$ . De façon précise, il existe un unique  $\varphi(w) \in V$  tel que

$$\forall v \in V, \quad b(w, v) = \overline{B(\varphi(w), v)}.$$

L'unicité de  $\varphi(w)$  assure la semi-linéarité de  $\varphi$ . De plus,  $\varphi$  est bijective puisque  $b$  et  $B$  ne sont pas dégénérées. Enfin, comme  $b$  et  $B$  sont  $G$ -invariantes,  $\varphi$  commute avec tous les éléments de  $G$ . En effet,

$$\forall (v, w) \in V^2, \quad \overline{B(\varphi(gw), v)} = b(gw, v) = b(w, g^{-1}v) = \overline{B(\varphi(w), g^{-1}v)} = \overline{B(g\varphi(w), v)},$$

ce qui donne bien  $\varphi(gw) = g\varphi(w)$  pour tout  $w \in V$  puisque  $B$  est non dégénérée. On en déduit alors que  $\varphi^2$  est linéaire bijective et commute avec tous les éléments de  $G$ . Ainsi,  $\varphi^2$  est un  $G$ -isomorphisme de  $V$ . Par ailleurs, pour  $v, w \in V$ , on a

$$B(\varphi^2(w), v) = \overline{b(\varphi(w), v)} = \overline{b(v, \varphi(w))} = B(\varphi(v), \varphi(w)),$$

et donc  $B(\varphi^2(w), v) = B(\varphi(v), \varphi(w)) = \overline{B(\varphi(w), \varphi(v))} = \overline{B(\varphi^2(v), w)} = B(w, \varphi^2(v))$ .

L'endomorphisme  $\varphi^2$  est donc hermitien. De plus, comme  $B(\varphi^2(v), v) = B(\varphi(v), \varphi(v)) \geq 0$ , on en déduit que  $\varphi^2$  est hermitien positif. Enfin, comme  $\varphi^2$  est bijectif,  $\varphi^2$  est hermitien défini positif.

Par ailleurs, il existe un unique endomorphisme  $\psi$  hermitien défini positif tel que  $\varphi^2 = \psi^2$ . On pose  $\sigma = \varphi\psi^{-1}$ . L'endomorphisme  $\psi$  est un polynôme en  $\varphi^2$  et  $\psi^{-1}$  est un polynôme en  $\psi$ . Ainsi  $\psi^{-1}$  et  $\varphi$  commutent. On en déduit que  $\sigma^2 = \text{id}$ . L'endomorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire  $\sigma$  est donc une symétrie de  $V$  et on peut décomposer  $V = V_+ \oplus V_-$  en les sous-espaces (réels) propres de  $\sigma$  associés respectivement aux valeurs propres 1 et  $-1$ . Comme  $\sigma$  est semi-linéaire, on a  $iV_+ = V_-$  et  $iV_- = V_+$ . Ainsi  $V = V_+ \oplus iV_+$ . Par ailleurs,  $G$  commute à  $\varphi$  et donc à  $\psi^{-1}$ . Les éléments de  $G$  commutent donc avec  $\sigma$ . On en déduit que les sous-espaces propres de  $\sigma$  c'est-à-dire  $V_+$  et  $V_- = iV_+$  sont stables par  $G$ . On a alors  $V = \mathbb{C} \otimes V_+$  ce qui achève la démonstration. ■

### Lemme 1.68 – Forme bilinéaire invariante et représentation irréductible : indicateur de Frobenius-Schur.

Soient  $G$  un groupe fini,  $V$  une représentation irréductible de  $G$  sur  $\mathbb{C}$  de caractère  $\chi$  et  $b$  une forme bilinéaire  $G$ -invariante sur  $V$ . Alors  $b$  est nulle ou non dégénérée. On suppose que  $b$  est non dégénérée. Toute forme bilinéaire  $G$ -invariante sur  $V$  est proportionnelle à  $b$ . De plus,  $b$  est symétrique ou antisymétrique.

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \neq \overline{\chi} \\ 1 & \text{si } \chi = \overline{\chi} \text{ et } \rho \text{ réel} \\ -1 & \text{si } \chi = \overline{\chi} \text{ et } \rho \text{ non réel} \end{cases}$$

On dit que  $|G|^{-1} \sum_{g \in G} \chi(g^2)$  est l'*indicateur de Schur de  $V$* .

**Preuve.** Comme  $b$  est  $G$ -invariante, les ensembles

$V^\circ = \{v \in V, \forall w \in V, b(v, w) = 0\}$  et  ${}^\circ V = \{w \in V, \forall v \in V, b(v, w) = 0\}$  sont des sous- $G$ -modules de  $V$  donc sont nuls ou  $V$  c'est-à-dire  $b = 0$  ou  $b$  non dégénérée.

Soit  $b'$  une forme bilinéaire  $G$ -invariante. On note  $\Upsilon(b)$  et  $\Upsilon(b')$  les  $\mathbb{C}G$ -morphismes

$$\Upsilon(b): \begin{cases} V \longrightarrow V^* \\ v \longmapsto (w \mapsto b(v, w)) \end{cases} \quad \text{et} \quad \Upsilon(b'): \begin{cases} V \longrightarrow V^* \\ v \longmapsto (w \mapsto b'(v, w)) \end{cases}.$$

Comme  $b$  est non dégénérée,  $\Upsilon(b)$  est bijectif. Ainsi  $(\Upsilon(b))^{-1} \circ \Upsilon(b'): V \rightarrow V$  est un morphisme de  $\mathbb{C}G$ -modules. Comme  $V$  est irréductible, le lemme de Schur (voir [SER, 2.2 proposition 4]) assure que  $(\Upsilon(b))^{-1} \circ \Upsilon(b') = \alpha \text{id}$  avec  $\alpha \in \mathbb{C}$ . On en déduit alors que  $b' = \alpha b$ .

On considère la forme bilinéaire  $b': (v, w) \mapsto b(w, v)$ . D'après ce qui précède,

$$\exists \alpha \in \mathbb{C}, \forall (v, w) \in V^2, b(w, v) = b'(v, w) = \alpha b(v, w) = \alpha b'(w, v) = \alpha^2 b(w, v).$$

Comme  $b \neq 0$ , on en déduit que  $\alpha^2 = 1$  et donc  $\alpha = \pm 1$ , ce qui donne le résultat voulu.

On note  $S_2(V)$  (resp.  $S_2(V^*)$ ) la composante homogène de degré 2 de l’algèbre symétrique de  $V$  (resp.  $V^*$ ) et  $\Lambda^2(V)$  (resp.  $\Lambda^2(V^*)$ ) la composante homogène de degré 2 de l’algèbre extérieure de  $V$  (resp.  $V^*$ ). Pour  $g \in G$ , on note  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  les valeurs propres de  $g$  agissant sur  $V$ . On a alors

$$\chi(g^2) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 = \sum_{i \leq j} \lambda_i \lambda_j - \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = \chi_{S^2(V)}(g) - \chi_{\text{Alt}^2(V)}(g).$$

On en déduit que

$$C = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2) = \langle \chi_{S^2(V)}, 1 \rangle - \langle \chi_{\text{Alt}^2(V)}, 1 \rangle = \langle \chi_{S^2(V^*)}, 1 \rangle - \langle \chi_{\text{Alt}^2(V^*)}, 1 \rangle.$$

On note  $\text{Bil}(V)$  l’espace vectoriel des formes bilinéaires sur  $V$ . Les propriétés démontrées ci-dessus donnent  $\langle \chi_{\text{Bil}(V)}, 1 \rangle \in \{0, 1\}$ . Comme  $\langle \chi_{S^2(V^*)}, 1 \rangle$ ,  $\langle \chi_{\text{Alt}^2(V^*)}, 1 \rangle$  et  $\langle \chi_{\text{Bil}(V)}, 1 \rangle$  sont des entiers naturels et que

$$\langle \chi_{S^2(V^*)}, 1 \rangle + \langle \chi_{\text{Alt}^2(V^*)}, 1 \rangle = \langle \chi_{\text{Bil}(V)}, 1 \rangle$$

On a  $C \in \{0, 1, -1\}$ . Le lemme 1.67 donne la distinction des cas. ■

En utilisant l’indicateur de Schur, on obtient alors la proposition bien connue suivante qui caractérise les groupes de Coxeter parmi les groupes de réflexions complexes.

**Proposition 1.69 — Groupe de Coxeter et groupe de réflexions complexes.** Soit  $(G, V)$  un groupe de réflexions complexes irréductible. Alors  $G$  est un groupe de Coxeter si et seulement si l’un des degrés de  $G$  est 2.

**Preuve.** Si  $G$  est un groupe de Coxeter, le lemme 1.67 montre qu’il existe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée  $G$ -invariante sur  $V$ . C’est en particulier un élément non nul de  $S_2(V^*)^G$ . Comme  $G$  est irréductible, tous les degrés de  $G$  sont strictement plus grands que 1 (sinon  $V$  a un hyperplan stable par  $G$  donnée par le noyau d’un élément de  $S_1(V^*)^G = (V^*)^G$ ). On en déduit que, si aucun des degrés n’est 2 alors tous les polynômes invariants non nuls sont de degrés strictement plus grands que 2, ce qui est absurde. Donc l’un des degrés est 2.

Si l’un des degré est 2 alors  $(S_2(V^*))^G \neq 0$ . Ainsi il existe une forme bilinéaire  $b$  symétrique  $G$ -invariante non nulle sur  $V$ . Le lemme 1.68 montre que  $b$  est non dégénérée. Le lemme 1.67 assure que la représentation est réelle et donc  $G$  est un groupe de Coxeter. ■

## CHAPITRE 2

# ALGÈBRE DES INVARIANTS RELATIFS

Ce chapitre présente mon travail de thèse sur les groupes de réflexions complexes. Le résultat central est la proposition 2.20 : étant donné  $(G, V)$  un groupe de réflexions complexes,  $M$  une représentation de  $G$  de dimension finie et  $\chi$  un caractère linéaire de  $G$ , on peut, sous certaines conditions (hypothèse 2.16 ou 2.17), construire une structure d'algèbre extérieure sur  $(T^{-1}S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi$  (où  $T$  est une partie multiplicative de  $S(V^*)$  convenablement choisie). La section 2.2 donne alors quelques conséquences de cette structure, notamment en lien avec la régularité d'un entier. Par ailleurs, l'étude de la structure de  $(T^{-1}S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi$  pousse à définir différents types d'hyperplans (en lien avec la représentation  $M$  et le caractère linéaire  $\chi$ ) ; les sections 2.3, 2.4 et 2.5 sont dédiées à l'étude de ces types d'hyperplans pour les groupes  $\mathfrak{S}_n$ ,  $G(d, 1, r)$ ,  $G(de, e, 2)$  et  $G_{24}$ .

## 2.1 ALGÈBRE EXTÉRIEURE

Dans cette section et la suivante, on fixe un groupe de réflexions complexes  $(G, V)$ , un  $\mathbb{C}G$ -module  $M$  de dimension  $r$  et  $\chi$  un caractère linéaire de  $G$ . On note  $\det_M$  (resp.  $\det_{M^*}$ ) le déterminant de la représentation  $M$  (resp.  $M^*$ ).

Les articles [O-S], [SHE], [LEH1] et [BEC] étudient la composante  $\chi$ -isotypique de l'algèbre  $S(V^*) \otimes \Lambda(M^*)$  sur laquelle  $G$  agit de façon diagonale. Sous des conditions portant sur les restrictions aux différents  $G_H$  des représentations  $M$  et  $\chi$ , on obtient une structure de  $(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi$  de  $S(V^*)^G$ -algèbre extérieure. Ici, l'idée est de transférer les hypothèses nécessaires sur  $M$  et  $\chi$  par des conditions sur l'anneau de base : on remplace  $S(V^*)$  par un anneau plus gros (un anneau de fractions de  $S(V^*)$ ) dans lequel on s'autorise à inverser certaines formes linéaires associées aux hyperplans de  $G$ . Les conditions porteront alors sur le choix des mauvais hyperplans qu'il va falloir inverser. Les résultats des articles [O-S], [SHE], [LEH1] et [BEC] s'obtiennent alors comme cas particuliers de la proposition 2.20 (voir la remarque 2.21). Dans [H-S], on trouve une première étude de la situation en caractéristique non nulle.

**Notation 2.1** Soit  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$  une partie  $G$ -stable, on note  $\mathcal{B} = \mathcal{H} \setminus \mathcal{M}$  et  $T \subset S(V^*)$  la partie multiplicative correspondante à  $\mathcal{M}$  (voir le lemme 1.48). On pose alors  $\Omega = T^{-1}S(V^*) \otimes \Lambda(M^*)$  et  $\Omega^p = T^{-1}S(V^*) \otimes \Lambda^p(M^*)$  pour tout  $p \in \llbracket 0, r \rrbracket$ . On a alors

$$\Omega^\chi = \bigoplus_{p=0}^r (\Omega^p)^\chi.$$

L'idée de la démonstration est de mettre dans la partie  $\mathcal{M}$  les hyperplans qui vont poser problème. On commence donc, dans la sous-section 2.1.1, par définir des « types d'hyperplans » qui vont permettre de différencier les hyperplans de  $\mathcal{H}$ . Dans la sous-section 2.1.2, on construit la structure d'algèbre  $\Omega^\chi$ . Enfin, dans la sous-section 2.1.3, on détermine cette structure d'algèbre.

### 2.1.1 HYPERPLANS

Pour définir la notion d'hyperplan  $(M, \chi)$ -acceptable, on a besoin d'introduire une notation qui sera, par ailleurs, utile pour la sous-section suivante.

**Notation 2.2** Pour  $H \in \mathcal{H}$ , on note  $(j_1, \dots, j_r)$  une famille d'entiers vérifiant  $0 \leq j_i \leq e_H - 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  et  $\text{Res}_{G_H}^G(M) = \det^{-j_1} \oplus \dots \oplus \det^{-j_r}$ . La famille  $(j_1, \dots, j_r)$  n'est pas définie de façon unique mais le multi-ensemble associé l'est. Les entiers  $j_i$  sont intimement liés aux  $n_{j, H}(M)$  (voir la notation 1.42). De façon précise, pour  $j \in \llbracket 0, e_H - 1 \rrbracket$ ,  $n_{j, H}(M)$  est le nombre d'entiers  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  tels que  $j_i = j$  et donc

$$\sum_{i=1}^r j_i = \sum_{j=0}^{e_H-1} j n_{j,H}(M) = n_H(M).$$

Par ailleurs, la famille  $(j_1, \dots, j_r)$  est telle que les valeurs propres de  $s_H$  agissant sur  $M^*$  sont les  $\zeta_H^{j_i}$  pour  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

On définit à présent 4 types d'hyperplans (2 types relativement à une représentation de  $G$  et deux autres types relativement à un couple formé d'une représentation et d'un caractère linéaire de  $G$ ). Les hyperplans  $M$ -excellents ou  $(M, \chi)$ -bons seront ceux qu'on n'aura pas besoin d'inverser (voir les hypothèses 2.16 et 2.17).

**Définition 2.3 — Type d'Hyperplan.** Soit  $H \in \mathcal{H}$ . On dit que  $H$  est

- (i)  $M$ -bon si  $n_H(M) < e_H$  et  $M$ -mauvais sinon ;
- (ii)  $M$ -excellent si  $s_H$  agit sur  $M$  comme une réflexion ;
- (iii)  $(M, \chi)$ -bon si  $n_H(M) + n_H(\chi) < e_H$  ;
- (iv)  $(M, \chi)$ -acceptable s'il n'existe pas deux parties disjointes de l'ensemble  $\llbracket 1, r \rrbracket$  (notées  $I_1$  et  $I_2$ ) vérifiant

$$e_H - n_H(\chi) \leq \sum_{i \in I_1} j_i \quad \text{et} \quad e_H - n_H(\chi) \leq \sum_{i \in I_2} j_i ;$$

Si  $H$  n'est pas  $(M, \chi)$ -acceptable, on dit que  $H$  est  $(M, \chi)$ -inacceptable.

Dans la remarque qui suit, on étudie les liens suivants entre les différentes notions de la définition 2.3.

**Remarque 2.4 — Bon et excellent hyperplan.** Soit  $H \in \mathcal{H}$ . On note  $\mathbf{1}$  le caractère trivial de  $G$ . Montrons les propriétés suivantes.

- (i)  $H$  est  $M$ -excellent si et seulement si  $H$  est  $M$ -bon et  $M^*$ -bon si et seulement si  $s_H$  agit sur  $M$  comme l'identité ou une réflexion.
- (ii) Si  $H$  est  $(M, \chi)$ -bon alors  $H$  est  $M$ -bon.
- (iii)  $H$  est  $M$ -excellent si et seulement si  $H$  est  $(M, \chi)$ -acceptable pour tout  $\chi \in \text{Hom}_{\text{gr}}(G, \mathbb{C}^\times)$ .
- (iv) Si  $H$  est  $(M, \chi)$ -bon alors  $H$  est  $(M, \chi)$ -acceptable.
- (v)  $H$  est  $M$ -bon si et seulement si  $H$  est  $(M, \mathbf{1})$ -bon.
- (vi) Si  $H$  est  $M$ -bon alors  $H$  est  $(M, \mathbf{1})$ -acceptable.

Démontrons (i). On commence par exprimer  $n_H(M^*)$  en fonction de  $n_H(M)$  :

$$n_H(M^*) = \sum_{j=1}^{e_H-1} (e_H - j) n_{j,H}(M) = e_H(r - n_{0,H}(M)) - n_H(M).$$

Comme  $n_H(M) = 0$  si et seulement si  $n_H(M^*) = 0$  si et seulement si  $s_H$  agit trivialement sur  $M$ , on a

$$n_H(M) \leq e_H - 1 \quad \text{et} \quad n_H(M^*) \leq e_H - 1 \quad \iff \quad r - n_{0,H}(M) \leq 2.$$

Comme  $n_{0,H}(M)$  (resp.  $n_{0,H}(M^*)$ ) est la multiplicité de 1 comme valeur propre de  $s_H$  agissant sur  $M$  (resp.  $M^*$ ), on a  $n_{0,H}(M) = n_{0,H}(M^*)$  et la condition  $n_{0,H}(M) \in \{r - 1, r\}$  s'exprime géométriquement par le fait que  $s_H$  agissent sur  $M$  comme l'identité ou une réflexion. On obtient bien l'équivalence souhaitée. En particulier, un hyperplan  $M$ -excellent est toujours  $M$ -bon.

Démontrons (ii). Comme  $n_H(\chi) \geq 0$ , un hyperplan  $(M, \chi)$ -bon est  $M$ -bon.

Démontrons (iii). Supposons que  $H$  est  $M$ -excellent. Il existe un unique entier  $i_0 \in \llbracket 1, r \rrbracket$  tel que  $j_{i_0}$  soit non nul. De deux parties disjointes  $I_1$  et  $I_2$  de  $\llbracket 1, r \rrbracket$ , il y en a au plus une qui contient  $i_0$ . On a alors

$$\sum_{i \in I_1} j_i = 0 < e_H - n_H(\chi) \quad \text{ou} \quad \sum_{i \in I_2} j_i = 0 < e_H - n_H(\chi).$$

Réiproquement, on suppose que  $H$  n'est pas  $M$ -excellent. Il existe donc  $i_1 \neq i_2$  tel que  $j_{i_1} \neq 0$  et  $j_{i_2} \neq 0$ . Par ailleurs, le théorème 1.47 de Stanley donne l'existence de  $\chi$  tel que  $n_H(\chi) = e_H - 1$ . Comme les parties disjointes  $I_1 = \{i_1\}$  et  $I_2 = \{i_2\}$  vérifient

$$\sum_{i \in I_1} j_i \geq 1 = e_H - n_H(\chi) \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I_2} j_i \geq 1 = e_H - n_H(\chi),$$

on en déduit que  $H$  n'est pas  $(M, \chi)$ -acceptable.

Démontrons (iv). Soit  $I$  une partie de  $\llbracket 1, r \rrbracket$  vérifiant

$$e_H - n_H(\chi) \leq \sum_{i \in I} j_i.$$

Une telle partie  $I$  contient tous les  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  tel que  $j_i \neq 0$  puisque

$$\sum_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} j_i = n_H(M) \leq e_H - n_H(\chi).$$

Ainsi une partie disjointe  $I'$  de  $I$  vérifie

$$\sum_{i \in I'} j_i = 0 < e_H - n_H(\chi).$$

Démontrons  $(v)$  et  $(vi)$ . Comme  $n_H(\mathbf{1}) = 0$  pour tout  $H \in \mathcal{H}$ , un hyperplan  $M$ -bon si et seulement s'il est  $(M, \mathbf{1})$ -bon. Le point  $(iv)$  assure qu'un tel hyperplan est  $(M, \mathbf{1})$ -acceptable. ■

Le cas  $e_H = 2$  est très fréquent dans les groupes de réflexions et mérite une étude particulière.

**Remarque 2.5 – Le cas d'un hyperplan vérifiant  $e_H = 2$ .** Soit  $H \in \mathcal{H}$  vérifiant  $e_H = 2$ .

L'hyperplan  $H$  est  $M$ -bon si et seulement s'il est  $M$ -excellent si et seulement si  $s_H$  agit sur  $M$  comme une réflexion ou comme l'identité (c'est-à-dire si la multiplicité de la valeur propre  $-1$  de  $s_H$  agissant sur  $M$  est inférieure ou égale à  $1$ ).

Si  $\chi(G_H) \neq 1$  alors

- (i)  $H$  est  $(M, \chi)$ -acceptable si et seulement si  $s_H$  agit sur  $M$  comme une réflexion ou comme l'identité (c'est-à-dire si la multiplicité de la valeur propre  $-1$  de  $s_H$  agissant sur  $M$  est inférieure ou égale à  $1$ );
- (ii)  $H$  est  $(M, \chi)$ -bon si et seulement si  $s_H$  agit trivialement sur  $M$  (c'est-à-dire si la multiplicité de la valeur propre  $-1$  de  $s_H$  agissant sur  $M$  est nulle).

Si  $\chi(G_H) = 1$  alors

- (i)  $H$  est  $(M, \chi)$ -acceptable si et seulement si la multiplicité de la valeur propre  $-1$  de  $s_H$  agissant sur  $M$  est inférieure ou égale à  $3$ ;
- (ii)  $H$  est  $(M, \chi)$ -bon si et seulement si  $s_H$  agit sur  $M$  comme une réflexion ou comme l'identité (c'est-à-dire si la multiplicité de la valeur propre  $-1$  de  $s_H$  agissant sur  $M$  est nulle).

D'après la remarque 2.4, il suffit de montrer que si  $H$  est  $M$ -bon alors  $H$  est  $M$ -excellent. Par hypothèse, on a  $n_H(M) = n_{1,H}(M) < 2$  et donc  $n_{0,H}(M) = r - n_{1,H}(M) \in \{r, r - 1\}$ .

On suppose  $\chi(G_H) \neq 1$ . On a alors  $n_H(\chi) \neq 0$  et donc  $n_H(\chi) = 1$ . La définition d'acceptabilité montre que si  $H$  est  $(M, \chi)$ -acceptable alors  $H$  est  $(M, \chi')$ -acceptable pour tout caractère linéaire  $\chi'$  vérifiant  $n_H(\chi') \leq 1$ . Comme tout caractère linéaire  $\chi'$  vérifie  $n_H(\chi') \leq 1$ , on en déduit que  $H$  est  $(M, \chi')$ -acceptable pour tout caractère linéaire  $\chi'$  de  $G$ . La remarque 2.4 montre que  $H$  est  $M$ -excellent. Par ailleurs, par définition de  $(M, \chi)$ -bon,  $H$  est  $(M, \chi)$ -bon si et seulement si  $n_H(M) < 1$  c'est-à-dire  $n_H(M) = 0$ .

On suppose  $\chi(G_H) = 1$ . On a  $n_H(\chi) = 0$  et donc  $H$  est  $(M, \chi)$ -bon si et seulement si  $n_H(M) < 2$  (c'est-à-dire  $H$  est  $M$ -bon). Par ailleurs, comme, dans notre cas,  $j_i \in \{0, 1\}$ , la multiplicité de  $-1$  comme valeur propre de  $s_H$  est égale au nombre de  $i$  tels que  $j_i \neq 0$ . S'il y en a au moins 4, on peut faire deux paquets de cardinal 2 et l'hyperplan n'est pas  $(M, \chi)$ -bon. S'il y en a moins de 3, deux parties disjointes de  $\llbracket 1, r \rrbracket$  ne peuvent contenir toutes deux deux entiers  $i$  tels que  $j_i \neq 0$  et  $H$  est  $(M, \chi)$ -acceptable. ■

## 2.1.2 CONSTRUCTION D'UNE STRUCTURE D'ALGÈBRE

En suivant de près les idées de Shepler [SHE] et Lehrer [LEH1], on va construire sur  $\Omega^\chi$  une structure d'algèbre. Il s'agit donc de définir une produit. Pour cela, on va utiliser le polynôme  $Q_\chi$  du théorème 1.47 de Stanley pour ramener le produit usuel de deux éléments de  $\Omega^\chi$  dans  $\Omega^\chi$ . On cherche donc des conditions de divisibilité par  $Q_\chi$  ou plutôt par la partie non inversible de  $Q_\chi$  : c'est le sens des lemmes 2.7 et 2.8. Pour obtenir la divisibilité souhaitée, on a besoin de certaines hypothèses sur les hyperplans de  $\mathcal{M}$  (hypothèses 2.6 et 2.9).

**Hypothèse 2.6** La partie  $\mathcal{M}$  contient tous les hyperplans  $M$ -mauvais. Cette hypothèse peut aussi se formuler :  $\mathcal{B}$  n'est formée que d'hyperplans  $M$ -bons.

### DIVISIBILITÉ

On commence donc par étendre le lemme 1.28 de divisibilité des polynômes à l'anneau  $T^{-1}S(V^*)$ .

**Lemme 2.7 – Divisibilité dans  $T^{-1}S(V^*)$ .** Soient  $x \in T^{-1}S(V^*)$ ,  $H \in \mathcal{H}$  et  $i \in \llbracket 1, e_H \rrbracket$ . Si  $s_H x = \zeta_H^i x$  alors  $x$  est divisible par  $\alpha_H^{e_H - i}$ .

Ce lemme n'a d'intérêt que pour  $H \in \mathcal{B}$  puisque pour  $H \in \mathcal{M}$ , la forme linéaire  $\alpha_H$  (et donc  $\alpha_H^{e_H - i}$ ) est inversible dans  $T^{-1}S(V^*)$ .

**Preuve.** Comme  $T$  est stable par  $G$ , on peut écrire  $x = P/Q$  avec  $Q \in T^G$ . Par intégrité de  $S(V^*)$ , on en déduit que  $s_H P = \zeta_H^i P$ . Le lemme 1.28 montre que  $P$  est divisible par  $\alpha_H^{e_H - i}$  et donc  $x$  aussi. ■

**Lemme 2.8 — Divisibilité dans  $\Omega$ .** Soient  $\mu \in (\Omega^p)^\chi$  et  $H \in \mathcal{H}$ . On considère  $(y_1, \dots, y_r)$  une base de  $M^*$  telle que  $s_H(y_i) = \zeta_H^{j_i} y_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  (voir la notation 2.2). On écrit

$$\mu = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r} \mu_{i_1, \dots, i_p} y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_p} \quad \text{avec } \mu_{i_1, \dots, i_p} \in T^{-1}S(V^*).$$

Pour  $H \in \mathcal{B}$ , on a

$$\text{ou } 0 \leq j_{i_1} + \dots + j_{i_p} \leq e_H - 1 - n_H(\chi) \quad \text{et} \quad \alpha_H^{j_{i_1} + \dots + j_{i_p} + n_H(\chi)} \mid \mu_{i_1, \dots, i_p};$$

$$\text{ou } e_H - n_H(\chi) \leq j_{i_1} + \dots + j_{i_p} \leq 2e_H - 2 - n_H(\chi) \quad \text{et} \quad \alpha_H^{j_{i_1} + \dots + j_{i_p} + n_H(\chi) - e_H} \mid \mu_{i_1, \dots, i_p}.$$

**Preuve.** Comme la famille  $(y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r}$  forme une  $T^{-1}S(V^*)$ -base de  $\Omega^p$ , on a

$$\mu_{i_1, \dots, i_p} y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_p} \in (\Omega^p)^\chi.$$

Ainsi

$$s_H(\mu_{i_1, \dots, i_p} y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_p}) = \zeta_H^{-n_H(\chi)} \mu_{i_1, \dots, i_p} y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_p}.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} s_H(\mu_{i_1, \dots, i_p} y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_p}) &= s_H(\mu_{i_1, \dots, i_p}) s_H(y_{i_1}) \wedge \dots \wedge s_H(y_{i_p}) \\ &= \zeta_H^{j_{i_1} + \dots + j_{i_p}} s_H(\mu_{i_1, \dots, i_p}) y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_p}. \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$s_H(\mu_{i_1, \dots, i_p}) = \zeta_H^{-j_{i_1} - \dots - j_{i_p} - n_H(\chi)} \mu_{i_1, \dots, i_p}.$$

L'hypothèse 2.6 sur  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{B}$  assure que

$$\forall H \in \mathcal{B}, \quad 0 \leq n_H(M) = \sum_{j=1}^r j_i \leq e_H - 1.$$

D'où

$$2 - 2e_H \leq -j_{i_1} - \dots - j_{i_p} - n_H(\chi) \leq 0.$$

Deux cas peuvent alors se produire :

ou  $1 - e_H \leq -j_{i_1} - \dots - j_{i_p} - n_H(\chi) \leq 0$  et en posant  $f_H = e_H - j_{i_1} - \dots - j_{i_p} - n_H(\chi)$ , on a

$$s_H(\mu_{i_1, \dots, i_p}) = \zeta_H^{f_H} \mu_{i_1, \dots, i_p} \quad \text{avec } 1 \leq f_H \leq e_H;$$

le lemme 2.7 assure alors que  $\mu_{i_1, \dots, i_p}$  est divisible par  $\alpha_H^{j_{i_1} + \dots + j_{i_p} + n_H(\chi)}$ ;

ou  $2 - 2e_H \leq -j_{i_1} - \dots - j_{i_p} - n_H(\chi) \leq -e_H$  et si  $f_H = 2e_H - j_{i_1} - \dots - j_{i_p} - n_H(\chi)$ , on a

$$s_H(\mu_{i_1, \dots, i_p}) = \zeta_H^{f_H} \mu_{i_1, \dots, i_p} \quad \text{avec } 2 \leq f_H \leq e_H;$$

le lemme 2.7 assure que  $\mu_{i_1, \dots, i_p}$  est divisible par  $\alpha_H^{j_{i_1} + \dots + j_{i_p} + n_H(\chi) - e_H}$ . ■

Pour assurer la divisibilité par  $Q_\chi$ , on renforce l'hypothèse 2.6 de la façon suivante.

**Hypothèse 2.9** La partie  $\mathcal{M}$  vérifie l'hypothèse 2.6 et  $\mathcal{M}$  contient tous les hyperplans  $(M, \chi)$ -inacceptables. Cette hypothèse peut aussi se formuler :  $\mathcal{B}$  n'est formée que d'hyperplans  $(M, \chi)$ -acceptables et  $M$ -bons.

On obtient alors le résultat suivant de divisibilité par  $Q_\chi$  qui raffine le lemme 2 de [SHE].

**Corollaire 2.10 — Divisibilité dans  $\Omega^\chi$ .** On suppose que l'hypothèse 2.9 est vérifiée. Pour  $\mu, \omega \in \Omega^\chi$ , on a  $Q_\chi \mid \mu \wedge \omega$ .

**Preuve.** On fixe  $H \in \mathcal{B}$  et on considère la même base  $(y_1, \dots, y_r)$  de  $M^*$  que celle du lemme 2.8. Pour une partie  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$  de  $\llbracket 1, r \rrbracket$  avec  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r$ , on note  $y_I = y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_p}$ . On peut alors écrire

$$\mu = \sum_{I \subset \llbracket 1, r \rrbracket} \mu_I y_I \quad \text{et} \quad \omega = \sum_{I \subset \llbracket 1, r \rrbracket} \omega_I y_I \quad \text{avec } \mu_I, \omega_I \in T^{-1}S(V^*).$$

D'où

$$\mu \wedge \omega = \sum_{I \cap J = \emptyset} \varepsilon_{I,J} \mu_I \omega_J y_{I \cup J} \quad \text{avec } \varepsilon_{I,J} \in \{\pm 1\}.$$

On utilise à présent le lemme 2.8. Soient  $I, J \subset \llbracket 1, r \rrbracket$  avec  $I \cap J = \emptyset$ .

- Si  $0 \leq \sum_{i \in I} j_i < e_H - n_H(\chi)$  ou  $0 \leq \sum_{i \in J} j_i < e_H - n_H(\chi)$  alors  $\mu_I$  ou  $\omega_J$  est divisible par  $\alpha_H^{n_H(\chi)}$  et donc  $\mu_I \omega_J$  est divisible par  $\alpha_H^{n_H(\chi)}$ .
- Sinon  $\sum_{i \in I} j_i \geq e_H - n_H(\chi)$  et  $\sum_{i \in J} j_i \geq e_H - n_H(\chi)$  avec  $I \cap J = \emptyset$  ce qui contredit l'hypothèse 2.9.

Le produit  $\mu \wedge \omega$  est donc divisible par  $\alpha_H^{n_H(\chi)}$  pour tout  $H \in \mathcal{B}$ . Comme la famille  $(\alpha_H)_{H \in \mathcal{B}}$  est formée d'éléments premiers entre eux deux à deux,  $\mu \wedge \omega$  est divisible par

$$\prod_{H \in \mathcal{B}} \alpha_H^{n_H(\chi)}.$$

Par ailleurs, pour  $H \in \mathcal{M}$ , l'élément  $\alpha_H^{n_H(\chi)}$  est inversible dans  $T^{-1}S(V^*)$ , on obtient ainsi la divisibilité de  $\mu \wedge \omega$  par

$$\prod_{H \in \mathcal{M}} \alpha_H^{n_H(\chi)} \prod_{H \in \mathcal{B}} \alpha_H^{n_H(\chi)} = Q_\chi. \quad \blacksquare$$

### STRUCTURE D'ALGÈBRE

Lorsque l'hypothèse 2.9 est vérifiée, le corollaire 2.10 s'applique. Pour  $\mu, \omega \in \Omega^\chi$ , on peut définir le produit  $\wedge$  par

$$\mu \wedge \omega = Q_\chi^{-1} \mu \wedge \omega \in \Omega.$$

En fait, on a même  $\mu \wedge \omega \in \Omega^\chi$ . On définit ainsi sur  $\Omega^\chi$  une loi  $\wedge$  qui munit  $\Omega^\chi$  d'une structure de  $(T^G)^{-1}S(V^*)^G$ -algèbre associative unitaire d'élément neutre  $Q_\chi$  (voir le lemme 1.9 pour la structure de  $(T^G)^{-1}S(V^*)^G$ -module). L'objectif est à présent de montrer que  $(\Omega^\chi, \wedge)$  est une  $(T^G)^{-1}S(V^*)^G$ -algèbre extérieure. Pour cela, on va étudier les constantes de structure de  $(\Omega^\chi, \wedge)$  et montrer que ce sont les mêmes que celles d'une algèbre extérieure. Pour simplifier les notations, on pose  $R = S(V^*)^G$ .

### 2.1.3 ALGÈBRE EXTÉRIEURE

Dans la sous-section précédente, on a construit (sous l'hypothèse 2.9) une structure d'algèbre sur  $\Omega^\chi$ . On cherche, dans cette sous-section, à en déterminer la classe d'isomorphisme. La démonstration va s'effectuer en deux temps : dans un premier temps (proposition 2.13), on donne une condition nécessaire et suffisante pour que les constantes de structure de  $\Omega^\chi$  soit celles d'une algèbre extérieure ; dans un deuxième temps, on montre que cette condition est bien vérifiée (proposition 2.19). Dans cet optique, on commence par généraliser le théorème de Stanley à l'anneau  $T^{-1}S(V^*)$ .

**Corollaire 2.11 — Théorème de Stanley dans  $T^{-1}S(V^*)$ .** On a

$$(T^{-1}S(V^*))^\chi = (T^G)^{-1}S(V^*)^G Q_\chi \quad \text{et} \quad (\Omega^r)^\chi = (T^G)^{-1}S(V^*)^G Q_{\chi \cdot \det_M} \text{vol}_M \quad (1)$$

où  $\text{vol}_M$  désigne un élément non nul de  $\Lambda^r(M^*)$ .

**Preuve.** Cela résulte des propositions 1.9 et 1.10, du théorème 1.47 et du fait que  $\mathbb{C}\text{vol}_M = \Lambda^r(M^*)$  est une représentation de  $G$  de caractère  $\det_{M^*}$ .

**Notation 2.12** Soit  $U$  un  $(T^G)^{-1}S(V^*)$ -module. Pour  $u, v \in U$ , on note  $u \doteq v$  s'il existe  $x \in ((T^G)^{-1}R)^\times$  tel que  $xu = v$ . En particulier,  $u$  et  $v$  engendrent le même sous- $(T^G)^{-1}R$ -module.

**Proposition 2.13 — Condition nécessaire et suffisante.** On suppose que l'hypothèse 2.9 est vérifiée. Soient  $\omega_1, \dots, \omega_r \in (\Omega^1)^\chi$ . Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout  $p \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , la famille  $(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r}$  forme une  $(T^G)^{-1}R$ -base de  $(\Omega^p)^\chi$  ;

$$(ii) \quad \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r \doteq Q_{\chi \cdot \det_M} \text{vol}_M. \quad (2)$$

**Preuve.** (i)  $\Rightarrow$  (ii). C'est une conséquence de l'égalité (1).

(ii)  $\Rightarrow$  (i). On pose  $K = \text{Frac}(T^{-1}S(V^*))$ . Montrons que la famille  $\mathcal{F} = (\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r}$  est  $K$ -linéairement indépendante. Comme  $\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p} = Q_\chi^{1-p} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}$ , il suffit de montrer que la famille  $(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r}$  est  $K$ -linéairement indépendante. Pour cela, on considère la relation

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r} r_{i_1, \dots, i_p} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p} = 0 \quad \text{avec} \quad r_{i_1, \dots, i_p} \in K.$$

Fixons  $I = \{i_1, \dots, i_p\} \subset \llbracket 1, r \rrbracket$  avec  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r$  et notons  $I^c = \{i_{p+1}, \dots, i_r\}$  son complémentaire. En multipliant la relation précédente par  $\omega_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_r}$ , on obtient

$$r_{i_1, \dots, i_p} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p} \wedge \omega_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_r} = 0.$$

D'où

$$0 = r_{i_1, \dots, i_p} Q_\chi^{r-1} \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r \doteq r_{i_1, \dots, i_p} Q_{\chi \cdot \det_M} \text{vol}_M.$$

On en déduit la nullité de  $r_{i_1, \dots, i_p}$  et la  $K$ -liberté de la famille  $(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r}$ .

La famille  $\mathcal{F}$  est donc une base du  $K$ -espace vectoriel  $K \otimes \Lambda^p(M^*)$ . Ainsi, si  $\mu \in (\Omega^p)^\chi$ , il existe des éléments  $r_{i_1, \dots, i_p} \in K$  tels que

$$\mu = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r} r_{i_1, \dots, i_p} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}.$$

Fixons encore  $I = \{i_1, \dots, i_p\} \subset \llbracket 1, r \rrbracket$  avec  $i_1 < \dots < i_p$  et notons  $I^c = \{i_{p+1}, \dots, i_r\}$  son complémentaire. En multipliant la relation précédente par  $\omega_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_r}$ , on obtient  $\mu \wedge \omega_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_r} \in (\Omega^r)^\chi$ . Ainsi, d'après la relation (1), il existe  $f \in (T^G)^{-1}R$  tel que

$$\mu \wedge \omega_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_r} = f Q_{\chi \cdot \det_M} \text{vol}_M.$$

Par ailleurs,

$$\mu \wedge \omega_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_r} = \varepsilon r_{i_1, \dots, i_p} \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r \doteq \varepsilon r_{i_1, \dots, i_p} Q_{\chi \cdot \det_M} \text{vol}_M \quad \text{avec} \quad \varepsilon \in \{\pm 1\}.$$

D'où

$$r_{i_1, \dots, i_p} \doteq \varepsilon f \in (T^G)^{-1}R.$$

La famille  $\mathcal{F}$  est donc bien une  $(T^G)^{-1}R$ -base de  $(\Omega^r)^\chi$ . ■

L'objectif est à présent de montrer que toute  $(T^G)^{-1}R$ -base de  $(\Omega^1)^\chi$  vérifie la condition (2). Pour cela, on va construire une famille  $(\nu_i)_{1 \leq i \leq r}$  d'éléments  $G$ -invariants et une famille  $(\mu_i)_{1 \leq i \leq r}$  d'éléments  $\det_{M^*}$ -invariants vérifiant respectivement

$$\nu_1 \wedge \dots \wedge \nu_r \doteq Q_M \text{vol}_M \quad \text{et} \quad \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_r \doteq (Q_{M^*})^{r-1} \text{vol}_M.$$

**Proposition 2.14 — Invariants dans  $\Omega^1$ .** Il existe  $(\nu_1, \dots, \nu_r) \in ((\Omega^1)^G)^r$  et  $(\mu_1, \dots, \mu_r) \in ((\Omega^1)^{\det_{M^*}})^r$  vérifiant

$$\nu_1 \wedge \dots \wedge \nu_r \in \mathbb{C}^\times Q_M \text{vol}_M \quad \text{et} \quad \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_r \in \mathbb{C}^\times (Q_{M^*})^{r-1} \text{vol}_M.$$

**Preuve.** La preuve est une reformulation du théorème de Guktin [GUT, Théorème] utilisant la notion de matrice minimale développée par Opdam dans [OPD, définition 2.2 et proposition 2.4 (ii)] et rappelée dans la définition 1.60 et la remarque 1.61 (voir le théorème 1.59 et la sous-section 1.3.4).

Pour  $C = (c_{ij})_{i,j} \in M_r(S(V^*))$ , on note  $g \cdot C$  la matrice  $(g c_{ij})_{i,j}$ . Considérons  $C$  une matrice  $M$ -minimale. Par définition,  $C \in M_r(S(V^*))$  vérifie

- (i)  $g \cdot C = C g_M$  ;
- (ii)  $\det C \neq 0$  ;
- (iii)  $\deg \det C = m(M)$ .

On choisit  $(y_i)_{1 \leq i \leq r}$  une base de  $M^*$  et on définit pour  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,

$$\nu_j = \sum_{i=1}^r c_{ji} \otimes y_i.$$

On a alors

$$\nu_1 \wedge \dots \wedge \nu_r \in \mathbb{C}^\times \det(C) \text{vol}_M.$$

Or  $\det C \in \mathbb{C}^\times Q_M$  (voir [OPD, proposition 2.4 (iii)]). Il reste alors simplement à montrer que  $\nu_j$  est  $G$ -invariant pour tout  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Or, d'après (i),

$$g c_{ji} = \sum_{k=1}^r c_{jk} g_{Mki} \quad \text{et} \quad g y_i = \sum_{n=1}^r g_{M^* ni} y_n.$$

$$\text{D'où} \quad g \nu_j = \sum_{i=1}^r \left( \sum_{k=1}^r c_{jk} g_{Mki} \otimes \sum_{n=1}^r g_{M^* ni} y_n \right) = \sum_{k=1}^r \sum_{n=1}^r \left( \sum_{i=1}^r g_{Mki} g_{M^* ni} \right) c_{jk} \otimes y_n.$$

Comme  ${}^t g_{M^*} = g_M^{-1}$ , on a  $\sum_{i=1}^r g_{Mki} g_{M^* ni} = \delta_{kn}$  et donc

$$g \nu_j = \sum_{k=1}^r c_{jk} \otimes y_k = \nu_j.$$

Ainsi  $\nu_j$  est bien  $G$ -invariant.

Considérons à présent  $D$  une matrice  $M^*$ -minimale. Par définition,  $D \in M_r(S(V^*))$  vérifie

- (i)  $g \cdot D = D g_{M^*}$  ;
- (ii)  $\det D \neq 0$  ;
- (iii)  $\deg \det D = m(M^*)$ .

On considère alors  $\text{Com } D = (e_{ij})_{i,j}$  la comatrice de  $D$ . Comme l'action de  $G$  sur  $S(V^*)$  est compatible avec la structure d'algèbre, on a

$$g \cdot \text{Com } D = \text{Com } (g \cdot D) = \text{Com } (D g_{M^*}) = \text{Com } D \text{Com } g_{M^*} = \det(g_{M^*}) \text{Com}(D) g_M.$$

On définit alors pour  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,

$$\mu_j = \sum_{i=1}^r e_{ji} \otimes y_i.$$

On a alors

$$\mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_r \in \mathbb{C}^\times \det(\text{Com } D) \text{vol}_M.$$

Or  $\det \text{Com } D = (\det D)^{r-1}$  et  $\det D \in \mathbb{C}^\times Q_{M^*}$  (voir [OPD, proposition 2.4 (iii)]). Il reste à montrer que  $\mu_j$  est  $\det_{M^*}$ -invariant pour tout  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Or,

$$g e_{ji} = \det g_{M^*} \sum_{k=1}^r e_{jk} g_{M ki} \quad \text{et} \quad g y_i = \sum_{n=1}^r g_{M^* ni} y_n.$$

D'où

$$g \mu_j = \det g_{M^*} \sum_{i=1}^r \left( \sum_{k=1}^r e_{jk} g_{M ki} \otimes \sum_{n=1}^r g_{M^* ni} y_n \right) = \det g_{M^*} \sum_{k=1}^r \sum_{n=1}^r \left( \sum_{i=1}^r g_{M ki} g_{M^* ni} \right) e_{jk} \otimes y_n.$$

Comme  ${}^t g_{M^*} = g_M^{-1}$ , on a  $\sum_{i=1}^r g_{M ki} g_{M^* ni} = \delta_{kn}$  et donc

$$g \mu_j = \det g_{M^*} \sum_{k=1}^r e_{jk} \otimes y_k = \det g_{M^*} \mu_j.$$

Ainsi  $\mu_j$  est bien  $\det_{g_{M^*}}$ -invariant. ■

Le lemme suivant propose quelques identités polynomiales : l'objectif (en vue de la proposition 2.19) est d'obtenir des formules pour déterminer quand  $Q_\chi Q_M(Q_{\chi \cdot \det_M})^{-1}$  et  $Q_{\chi \cdot \det_M} Q_{M^*}(Q_\chi)^{-1}$  sont premiers entre eux.

**Lemme 2.15 – Égalités polynomiales.** On pose

$$\mathcal{B}_0 = \{H \in \mathcal{B}, n_H(M) = 0\}, \quad \mathcal{B}_+ = \{H \in \mathcal{B}, n_H(M) \geq e_H - n_H(\chi)\},$$

$$\mathcal{B}_{\neq 0} = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_- = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_+.$$

$$(i) \quad Q_{M^*} = \prod_{H \in \mathcal{M}} \alpha_H^{n_H(M^*)} \prod_{H \in \mathcal{B}_{\neq 0}} \alpha_H^{e_H(r - n_{0,H}(M)) - n_H(M)}.$$

$$(ii) \quad Q_{\chi \cdot \det_M} = \prod_{H \in \mathcal{M}} \alpha_H^{n_H(\chi \cdot \det_M)} \prod_{H \in \mathcal{B}_-} \alpha_H^{n_H(\chi) + n_H(M)} \prod_{H \in \mathcal{B}_+} \alpha_H^{n_H(\chi) + n_H(M) - e_H}.$$

$$(iii) \quad Q_\chi Q_M(Q_{\chi \cdot \det_M})^{-1} = \prod_{H \in \mathcal{M}} \alpha_H^{n_H(\chi) + n_H(M) - n_{H(\chi \cdot \det_M)}} \prod_{H \in \mathcal{B}_+} \alpha_H^{e_H}.$$

$$(iv) \quad Q_{\chi \cdot \det_M} Q_{M^*}(Q_\chi)^{-1} = \prod_{H \in \mathcal{M}} \alpha_H^{n_H(M^*) + n_H(\chi \cdot \det_M) - n_{H(\chi)}} \prod_{H \in \mathcal{B}_- \setminus \mathcal{B}_0} \alpha_H^{e_H(r - n_{0,H}(M))} \prod_{H \in \mathcal{B}_+} \alpha_H^{e_H(r - 1 - n_{0,H}(M))}.$$

**Preuve.** On a vu dans la remarque 2.4 que  $n_H(M^*) = e_H(r - n_{0,H}(M)) - n_H(M)$  pour tout  $H \in \mathcal{H}$ . De plus,  $n_H(M) = 0$  si et seulement si  $n_H(M^*) = 0$  si et seulement si  $n_{0,H}(M) = r$ . On obtient ainsi l'égalité (i).

Soit  $H \in \mathcal{B}$ . On a  $0 \leq n_H(M) \leq e_H - 1$  et donc  $n_H(M) = n_H(\det_M)$  (voir la remarque 1.46). On a donc  $(\chi \cdot \det_M)(s_H) = \det(s_H)^{-n_H(\chi) - n_H(M)}$ . Comme  $0 \leq n_H(\chi) + n_H(M) \leq 2e_H - 2$ , on obtient

$$n_H(\chi \cdot \det_M) = n_H(\chi) + n_H(M) \quad \text{si} \quad n_H(\chi) + n_H(M) \leq e_H - 1$$

$$\text{et} \quad n_H(\chi \cdot \det_M) = n_H(\chi) + n_H(M) - e_H \quad \text{si} \quad n_H(\chi) + n_H(M) \geq e_H.$$

Les points (iii) et (iv) sont des conséquences élémentaires des points (i) et (ii). ■

Pour pouvoir conclure sur la structure de l'algèbre  $\Omega^\chi$ , on a besoin d'encore renforcer les hypothèses.

**Hypothèse 2.16** La partie  $\mathcal{M}$  contient tous les hyperplans qui ne sont pas  $(M, \chi)$ -bons c'est-à-dire que tous les éléments de  $\mathcal{B}$  sont  $(M, \chi)$ -bons ou encore que  $\mathcal{B}_+ = \emptyset$ .

**Hypothèse 2.17** La partie  $\mathcal{M}$  contient tous les hyperplans qui ne sont pas  $M$ -excellents c'est-à-dire que  $s_H$  agit sur  $M$  comme une réflexion pour tout  $H \in \mathcal{B}$ .

**Remarque 2.18 – Liens entre les différentes hypothèses.** La remarque 2.4 assure que chacune des hypothèses 2.16 et 2.17 implique l'hypothèse 2.9. Par ailleurs, sous l'hypothèse 2.16, les lemmes 1.7 et 2.15 montrent que  $Q_\chi Q_M(Q_{\chi \cdot \det_M})^{-1}$  est inversible dans  $(T^G)^{-1}R$ . ■

**Proposition 2.19 – Obtention de la condition nécessaire et suffisante.** On suppose que l'une des deux hypothèses 2.16 ou 2.17 est vérifiée. Si  $\omega_1, \dots, \omega_r$  est une famille génératrice de  $(\Omega^1)^\chi$  alors

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r \doteq Q_{\chi \cdot \det_M} \text{vol}_M.$$

**Preuve.** D'après la remarque 2.18, l'hypothèse 2.9 est vérifiée. Ainsi on peut bien définir la structure d'algèbre sur  $(T^{-1}S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi$ . Comme  $\Omega^\chi$  est stable par  $\wedge$ , on a  $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r \in (\Omega^r)^\chi$ . L'égalité (1) assure que

$$\exists f \in (T^G)^{-1}R, \quad \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r = f Q_{\chi \cdot \det_M} \text{vol}_M.$$

Il s'agit à présent de montrer que  $f$  est inversible dans  $(T^{-1}S(V^*))^G$  et encore dans  $T^{-1}S(V^*)$  (en vertu du lemme 1.7). Considérons  $(y_i)_{1 \leq i \leq r}$  une base de  $M^*$ . Soit  $C \in M_r(T^{-1}S(V^*))$  la matrice de la famille  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq r}$  dans la  $T^{-1}S(V^*)$ -base  $(1 \otimes y_i)_{1 \leq i \leq r}$  de  $\Omega^1$ . On en déduit l'existence de  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$  tel que

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r = \lambda \det C \text{ vol}_M \quad \text{puis} \quad \lambda \det C = f Q_{\chi \cdot \det_M}(Q_\chi)^{r-1}.$$

Par ailleurs, comme  $\nu_i$  est  $G$ -invariant,  $Q_\chi \nu_i$  est  $\chi$ -invariant donc est combinaison linéaire (à coefficients dans  $(T^G)^{-1}R$ ) de la famille  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq r}$ . On construit ainsi une matrice  $D \in M_r((T^G)^{-1}R)$  telle que

$$Q_\chi \nu_1 \wedge \cdots \wedge Q_\chi \nu_r = \det D \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r = \lambda \det D \det C \text{ vol}_M = \lambda \det D f Q_{\chi \cdot \det_M}(Q_\chi)^{r-1} \text{ vol}_M.$$

Or  $\nu_1 \wedge \cdots \wedge \nu_r \in \mathbb{C}^\times Q_M \text{ vol}_M$ , donc  $Q_\chi \nu_1 \wedge \cdots \wedge Q_\chi \nu_r \in \mathbb{C}^\times (Q_\chi)^r Q_M \text{ vol}_M$ .

D'où

$$Q_\chi Q_M \in \mathbb{C}^\times f Q_{\chi \cdot \det_M} \det D.$$

On en déduit que

$$f \neq 0 \quad \text{et} \quad f \mid Q_\chi Q_M (Q_{\chi \cdot \det_M})^{-1}.$$

Sous l'hypothèse 2.16, la remarque 2.18 assure que  $f$  est inversible et que l'égalité (2) est vérifiée.

On suppose à présent que l'hypothèse 2.17 est vérifiée. On a donc  $n_{0,H}(M) = r - 1$ . Le lemme 2.15 montre alors que  $(Q_{\chi \cdot \det_M} Q_{M^*}(Q_\chi)^{-1})^{r-1}$  est premier avec  $Q_\chi Q_M (Q_{\chi \cdot \det_M})^{-1}$ . Pour conclure, il suffit donc de montrer que  $f \mid (Q_{\chi \cdot \det_M} Q_{M^*}(Q_\chi)^{-1})^{r-1}$

Soit  $(\mu_i)_{1 \leq i \leq r}$  la famille du lemme 2.14. Comme  $\mu_i$  est  $\det_{M^*}$ -invariant,  $Q_{\chi \cdot \det_M} \mu_i \in (\Omega^1)^\chi$ . Donc  $Q_{\chi \cdot \det_M} \mu_i$  est combinaison linéaire (à coefficients dans  $(T^G)^{-1}R$ ) de la famille  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq r}$ . On construit ainsi une matrice  $D' \in M_r((T^G)^{-1}R)$  telle que

$$Q_{\chi \cdot \det_M} \mu_1 \wedge \cdots \wedge Q_{\chi \cdot \det_M} \mu_r = \det D' \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r = \det D' f Q_{\chi \cdot \det_M}(Q_\chi)^{r-1} \text{ vol}_M.$$

Or  $\mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_r \in \mathbb{C}^\times (Q_{M^*})^{r-1} \text{ vol}_M$ , donc  $Q_{\chi \cdot \det_M} \mu_1 \wedge \cdots \wedge Q_{\chi \cdot \det_M} \mu_r \in \mathbb{C}^\times (Q_{\chi \cdot \det_M})^r (Q_{M^*})^{r-1} \text{ vol}_M$ .

D'où

$$(Q_{\chi \cdot \det_M} Q_{M^*})^{r-1} \in \mathbb{C}^\times \det D' f (Q_\chi)^{r-1}.$$

On en déduit que

$$f \mid (Q_{\chi \cdot \det_M} Q_{M^*}(Q_\chi)^{-1})^{r-1}.$$

Finalement,  $f$  divise  $Q_\chi Q_{\det_M}(Q_{\chi \cdot \det_M})^{-1}$  et  $(Q_{\chi \cdot \det_M} Q_{M^*}(Q_\chi)^{-1})^{r-1}$  et l'égalité (2) est donc vérifiée sous cette hypothèse. ■

**Théorème 2.20 — Algèbre extérieure.** On suppose que l'une des deux hypothèses 2.16 ou 2.17 est vérifiée. La  $(T^G)^{-1}R$ -algèbre  $(\Omega^\chi, \lambda)$  est une algèbre extérieure.

**Preuve.** D'après les propositions 2.13 et 2.19 et la remarque 2.18, il suffit de montrer que  $(\Omega^1)^\chi$  admet une famille génératrice à  $r$  éléments. En fait, on va montrer que  $(\Omega^1)^\chi$  est un  $(T^G)^{-1}R$ -module libre de rang  $r$ . D'après la proposition 1.10, il suffit de montrer que  $(\Omega^1)^\chi$  est un  $G$ -module libre de rang  $r$  ce qui résulte du théorème B de Chevalley [CHE]. De façon précise, on a

$$(S(V^*) \otimes M^*)^\chi = (S(V^*) \otimes M^* \otimes \mathbb{C}_\chi^*)^G \otimes \mathbb{C}_\chi = (S(V^*) \otimes (M \otimes \mathbb{C}_\chi)^*)^G \otimes \mathbb{C}_\chi.$$

On obtient ainsi

$$(S(V^*) \otimes M^*)^\chi = R \otimes (S_G \otimes (M \otimes \mathbb{C}_\chi)^*)^G \otimes \mathbb{C}_\chi$$

et  $(S(V^*) \otimes M^*)^\chi$  est un  $R$ -module libre de rang  $\dim_{\mathbb{C}}(\text{Hom}_G(S_G, M \otimes \mathbb{C}_\chi)) = \dim_{\mathbb{C}}(M \otimes \mathbb{C}_\chi) = r$ . Par tensorisation par  $(T^G)^{-1}R$ , le lemme 1.10 assure que  $(\Omega^1)^\chi$  est libre de rang  $r$ . ■

**Remarque 2.21 — Shepler, Orlik et Solomon.** Si tout hyperplan de  $\mathcal{H}$  est  $(M, \chi)$ -bon, on peut choisir  $\mathcal{M} = \emptyset$ . De même, si  $s_H$  agit sur  $M$  comme une réflexion pour tout  $H \in \mathcal{H}$ , on peut choisir  $\mathcal{M} = \emptyset$ . Ainsi  $T = \mathbb{C}^\times$  et  $T^{-1}S(V^*) = S(V^*)$ . On retrouve ainsi les résultats de [BEC] et donc ceux de [O-S] et [SHE]. ■

**Remarque 2.22 — Si  $\mathcal{M} = \mathcal{H}$ .** Lorsque  $\mathcal{M} = \mathcal{H}$ , les hypothèses 2.16 et 2.17 sont remplies. Ainsi  $\Omega^\chi$  est une  $(T^G)^{-1}R$ -algèbre extérieure. ■

## 2.2 CONSEQUENCES DE LA STRUCTURE D'ALGÈBRE EXTÉRIEURE

Dans cette section, on s'intéresse aux conséquences de ce théorème de structure de  $\Omega^\chi$  dans le cas où  $\mathcal{M} = \emptyset$ . La première de ces conséquences est une égalité entre fractions rationnelles (corollaire 2.27) généralisant celle de Orlik et Solomon [O-S, égalité 3.7]. Dans la sous-section 2.2.3, on obtient de nombreuses identités polynomiales généralisant celles de [O-S], [L-M], [LEH1] et [BLM] qui mènent à des caractérisations de la régularité d'entiers.

**Hypothèse 2.23** Dans cette section, on suppose que  $\mathcal{M} = \emptyset$  c'est-à-dire que tous les hyperplans de  $\mathcal{H}$  sont  $(M, \chi)$ -bons ou que  $s_H$  agit comme une réflexion ou l'identité sur  $M$ , pour tout  $H \in \mathcal{H}$ .

Ainsi  $(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi$  est une  $S(V^*)^G$ -algèbre extérieure.

### 2.2.1 INTRODUCTION ET NOTATIONS

Dans cette sous-section, on met en place les objets étudiés par la suite notamment un élément  $\gamma$  du normalisateur de  $G$ . Par ailleurs, comme le produit sur  $\Omega^\chi$  est une déformation du produit usuel, on introduit un nouveau degré lui aussi déformé par  $Q_\chi$  pour obtenir une bigraduation compatible avec la structure d'algèbre.

**Notation 2.24 – Bigraduation.** On considère  $S_n \subset S(V^*)$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales homogènes de degré  $n$ . Pour  $p \in \llbracket 0, r \rrbracket$ , on définit  $\Omega^p = S(V^*) \otimes \Lambda^p(M^*)$  et  $\Omega_n^p = S_n \otimes \Lambda^p(M^*)$ . On a alors

$$\Omega^\chi = \bigoplus_{p=0}^r (\Omega^p)^\chi \quad \text{et} \quad \Omega^\chi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bigoplus_{p=0}^r (\Omega_n^p)^\chi.$$

Pour  $\omega \in (\Omega_n^p)^\chi$ , on pose  $\deg(\omega) = (n, p)$  et  $\deg'(\omega) = (n - \deg Q_\chi, p)$ . Si  $\mu \in (\Omega_{n'}^{p'})^\chi$  alors

$$\omega \wedge \mu \in (\Omega_{n+n'-\deg Q_\chi}^{p+p'})^\chi$$

et donc  $\deg'(\omega) + \deg'(\mu) = \deg'(\omega \wedge \mu)$ .

Le lemme suivant va servir à prolonger le caractère  $\chi$  au groupe  $\langle G, \gamma \rangle$ .

**Lemme 2.25 – Prolongement.** Soient  $M, N$  et  $P$  trois groupes abéliens et  $\varphi: M \rightarrow N$  et  $\theta: M \rightarrow P$  deux morphismes de groupes. On suppose que  $P$  est divisible. Si  $\text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } \theta$ , il existe un morphisme de groupe  $\tilde{\theta}: N \rightarrow P$  qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ \downarrow \theta & \nearrow \tilde{\theta} & \\ P & & \end{array}$$

**Preuve.** Comme  $\text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } \theta$ , la propriété universelle du quotient permet de définir un morphisme de groupes  $\theta_1: M/\text{Ker } \varphi \simeq \text{Im } \varphi \rightarrow P$  tel que  $\theta_1 \circ \varphi = \theta$ . Comme  $P$  est divisible, on peut prolonger  $\theta_1$  en un morphisme  $\tilde{\theta}: N \rightarrow P$  et on a alors  $\tilde{\theta} \circ \varphi = \theta_1 \circ \varphi = \theta$ . ■

Introduisons à présent quelques nouvelles notations. On considère le normalisateur  $\mathcal{N}$  de  $G$  dans  $\text{GL}(V)$ . On choisit alors  $\gamma \in \mathcal{N}$  que l'on suppose semi-simple (voir [BLM]). On suppose que  $M$  est un  $\langle G, \gamma \rangle$ -module et que  $\gamma$  agit de façon semi-simple sur  $M$ . On suppose de plus que le groupe dérivé  $D$  de  $\langle G, \gamma \rangle$  vérifie  $D \subset \text{Ker } \chi$ . En appliquant le lemme 2.25, avec  $M = G/D(G)$ ,  $N = \langle G, \gamma \rangle/D$ ,  $P = \mathbb{U}$  le groupe des nombres complexes de module 1 et  $\theta = \chi$ , on peut prolonger  $\chi$  en un caractère linéaire de  $\langle G, \gamma \rangle$  (que l'on note encore  $\chi$ ).

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \langle G, \gamma \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/D(G) & \xrightarrow{\varphi} & \langle G, \gamma \rangle/D \\ \downarrow \chi & \nearrow \chi & \\ \mathbb{U} & & \end{array}$$

On note alors  $\mathbb{C}_\chi$  la représentation (de  $\langle G, \gamma \rangle$ ) de caractère  $\chi$  sur  $\mathbb{C}$  et on définit  $M_\chi = M \otimes \mathbb{C}_\chi$ . Ainsi  $M_\chi$  est un  $\langle G, \gamma \rangle$ -module et, grâce au théorème B de Chevalley [CHE], on dispose de l'isomorphisme de  $G$ -modules gradués et de  $R$ -modules

$$(\Omega^1)^\chi = (S(V^*) \otimes M^*)^\chi = (S(V^*) \otimes M^* \otimes \mathbb{C}_\chi^*)^G \otimes \mathbb{C}_\chi = (S(V^*) \otimes M_\chi^*)^G \otimes \mathbb{C}_\chi = R \otimes (S_G \otimes M_\chi^*)^G \otimes \mathbb{C}_\chi.$$

Ainsi, par définition des  $M_\chi$ -exposants, on peut choisir une  $R$ -base  $\mathcal{B} = (\omega_1, \dots, \omega_r)$  de  $(\Omega^1)^\chi$  bihomogène avec  $\deg'(\omega_i) = (m_i(M_\chi) - \deg(Q_\chi), 1)$ . De plus, l'hypothèse  $D \subset \text{Ker } \chi$  assure que  $\gamma$  stabilise l'espace vectoriel  $N^\chi$  des  $\chi$ -invariants de  $N$ , pour tout  $\langle G, \gamma \rangle$ -module  $N$ . Ainsi, on obtient l'isomorphisme de  $\langle \gamma \rangle$ -modules gradués et de  $R$ -modules

$$(\Omega^1)^\chi = (S(V^*) \otimes M^*)^\chi = (R \otimes S_G \otimes M^*)^\chi = R \otimes (S_G \otimes M^*)^\chi.$$

On peut donc supposer que les  $\omega_i$  sont des vecteurs propres de  $\gamma$ . On note  $\varepsilon_{i,\gamma,\chi}(M)$  la valeur propre de  $\gamma$  associée à  $\omega_i$ . Les deux isomorphismes données ci-dessus montrent que l'ensemble des couples  $(\varepsilon_{i,\gamma,\chi}(M), m_i(M_\chi))$  comptés avec leur multiplicité ne dépend pas du choix de la base de  $(\Omega^1)^\chi$ .

**Remarque 2.26 —  $m_i, \varepsilon_i$ .** Lorsque  $\chi = \mathbf{1}$  est le caractère trivial, on note  $\varepsilon_{i,\gamma}(M) := \varepsilon_{i,\gamma,\mathbf{1}}(M)$ . De même, lorsque  $\gamma = \text{id}$ , on note  $\varepsilon_{i,\chi}(M) := \varepsilon_{i,\text{id},\chi}(M)$ . La famille des  $\varepsilon_{i,\gamma,\chi}(M)$  dépend bien entendu du choix du prolongement de  $\chi$  au groupe  $\langle G, \gamma \rangle$ .

La famille  $\varepsilon_{i,\gamma}(V)$  peut aussi être considérée comme la famille des valeurs propres de  $\gamma$  dont les vecteurs propres associés  $(P_1, \dots, P_\ell)$  forment une famille de générateurs de  $R$  homogènes algébriquement indépendants (voir [BLM]).

## 2.2.2 FRACTION RATIONNELLE

On suit ici la méthode du théorème 2.1 et de l'égalité 2.3 de [LEH1] et de la proposition 2.3 de [L-M].

**Corollaire 2.27 — Fraction rationnelle.** Si  $s_H$  agit sur  $M$  comme l'identité ou une réflexion pour tout  $H \in \mathcal{H}$  ou si  $n_H(M) < e_H - n_H(\chi)$  pour tout  $H \in \mathcal{H}$ , alors

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \frac{\det(1 + (g\gamma)_M Y)}{\det(1 - g\gamma X)} = X^{\deg(Q_\chi)} \frac{\prod_{i=1}^r (1 + \varepsilon_{i,\gamma,\chi}(M) Y X^{m_i(M_\chi) - \deg(Q_\chi)})}{\prod_{i=1}^\ell (1 - \varepsilon_{i,\gamma}(V) X^{d_i})}.$$

**Preuve.** L'hypothèse  $D \subset \text{Ker } \chi$  assure que  $\gamma$  stabilise l'espace vectoriel  $N^\chi$  des  $\chi$ -invariants de  $N$ , pour tout  $\langle G, \gamma \rangle$ -module  $N$ . En particulier  $\gamma$  définit un endomorphisme bigradué de  $\Omega^\chi$ . Pour démontrer l'égalité, on calcule de deux manières la trace graduée  $P_{\Omega^\chi, \gamma}(X, Y)$  de l'endomorphisme  $\gamma$  de  $\Omega^\chi$ . Par définition,

$$P_{\Omega^\chi, \gamma}(X, Y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{p=0}^r \text{tr} \left( \gamma|_{\Omega_n^\chi} \right) X^n Y^p.$$

Comme  $(\Omega_n^\chi)^\chi$  est la composante  $\chi$ -isotypique de  $\Omega_n^\chi$ ,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} g_{\Omega_n^\chi}$$

est un projecteur sur  $(\Omega_n^\chi)^\chi$ . D'où

$$\text{tr} \left( \gamma|_{\Omega_n^\chi} \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \text{tr} \left( (g\gamma)|_{\Omega_n^\chi} \right).$$

$$\text{Ainsi } P_{\Omega^\chi, \gamma}(X, Y) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{p=0}^r \text{tr} \left( (g\gamma)|_{\Omega_n^\chi} \right) X^n Y^p.$$

Finalement, les formules 1.20 de Molien donnent

$$P_{\Omega^\chi, \gamma}(X, Y) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \frac{\det(1 + (g\gamma)_M Y)}{\det(1 - g\gamma X)}. \quad (\alpha)$$

Par ailleurs, les propositions 2.13 et 2.19 montrent que  $\Omega^\chi = R \otimes \lambda((\Omega^1)^\chi)$  où  $\lambda((\Omega^1)^\chi)$  est la  $\mathbb{C}$ -algèbre (pour  $\lambda$ ) engendrée par  $(\Omega^1)^\chi$ . Comme le produit  $\lambda$  est biadditif pour  $\deg'$  et que l'élément neutre  $e = Q_\chi$  pour  $\lambda$  a pour degré  $\deg'(e) = (0, 0)$ , on a

$$P_{\lambda((\Omega^1)^\chi), \gamma}(X, Y) = X^{\deg(Q_\chi)} \prod_{i=1}^r (1 + \varepsilon_{i,\gamma,\chi}(M) Y X^{m_i(M_\chi) - \deg(Q_\chi)}).$$

De plus,

$$P_{R, \gamma}(X) = \prod_{i=1}^\ell (1 - \varepsilon_{i,\gamma}(V) X^{d_i})^{-1},$$

$$\text{d'où } P_{\Omega^\chi, \gamma}(X, Y) = X^{\deg(Q_\chi)} \frac{\prod_{i=1}^r (1 + \varepsilon_{i,\gamma,\chi}(M) Y X^{m_i(M_\chi) - \deg(Q_\chi)})}{\prod_{i=1}^\ell (1 - \varepsilon_{i,\gamma}(V) X^{d_i})}. \quad (\beta)$$

Les égalités  $(\alpha)$  et  $(\beta)$  donnent le résultat souhaité. ■

**Remarque 2.28 —  $m_i(M_\chi)$ .** Si  $n_H(M) < e_H - n_H(\chi)$  pour tout  $H \in \mathcal{H}$ , alors les multi-ensembles

$$\{m_1(M) + \deg(Q_\chi), \dots, m_r(M) + \deg(Q_\chi)\} \quad \text{et} \quad \{m_1(M_\chi), \dots, m_r(M_\chi)\}$$

sont égaux. En effet, en reprenant la démonstration de la proposition 2.19, on constate que, sous nos hypothèses, la famille  $(Q_\chi \nu_i)_{1 \leq i \leq r}$  est une base de  $(\Omega^1)^\chi$ . Or les propriétés des matrices minimales permettent de choisir  $\nu_i$  bihomogène de degré  $(m_i(M), 1)$ . ■

### 2.2.3 ENTIER RÉGULIER

De manière analogue à l'article de Lehrer et Michel [L-M] et à celui de [LEH1], voyons ce que donne l'identité 2.27 aux représentations  $V^\sigma$  et  $V^{*\sigma}$  où  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . Soit  $d \in \mathbb{N}$  et  $\xi$  une racine  $d^e$  primitive de l'unité ; on définit alors

$$A_\gamma(d) = \{i \in [\![1, \ell]\!], \quad \varepsilon_{i,\gamma}(V)\xi^{-d_i} = 1\} \quad \text{et} \quad a_\gamma(d) = |A_\gamma(d)|,$$

et pour  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ,  $r_i(\sigma, \chi) = \deg(Q_\chi) - m_i(V_\chi^\sigma)$ ,  $r_i^*(\sigma, \chi) = \deg(Q_\chi) - m_i(V_\chi^{*\sigma})$  ;

$$B_{\sigma,\gamma}(d, \chi) = \{j \in [\![1, \ell]\!], \quad \varepsilon_{j,\gamma,\chi}(V^\sigma)\xi^{-\sigma}\xi^{r_j(\sigma,\chi)} = 1\} \quad \text{et} \quad b_{\sigma,\gamma}(d, \chi) = |B_{\sigma,\gamma}(d, \chi)|;$$

$$\text{et} \quad B_{\sigma,\gamma}^*(d, \chi) = \{j \in [\![1, \ell]\!], \quad \varepsilon_{j,\gamma,\chi}(V^{*\sigma})\xi^{\sigma}\xi^{r_j^*(\sigma,\chi)} = 1\} \quad \text{et} \quad b_{\sigma,\gamma}^*(d, \chi) = |B_{\sigma,\gamma}^*(d, \chi)|.$$

Pour  $h \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ , on note  $\det'(h)$  le produit des valeurs propres non nulles de  $h$ ,  $V(h, \xi)$  le sous-espace propre de  $h$  associé à la valeur propre  $\xi$  et  $d(h, \xi) = \dim(V(h, \xi))$ .

**Théorème 2.29** On a  $a_\gamma(d) \leq b_{\sigma,\gamma}(d, \chi)$  et l'égalité suivante dans  $\mathbb{C}[T]$

$$\xi^{\deg(Q_\chi)} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} T^{d(g\gamma, \xi)} (\det'(1 - \xi^{-1}g\gamma))^{\sigma-1} = \begin{cases} \prod_{j \in B_{\sigma,\gamma}(d, \chi)} (T - r_j(\sigma, \chi)) \prod_{j \notin B_{\sigma,\gamma}(d, \chi)} (1 - \varepsilon_j \xi^{r_j(\sigma, \chi)} - \sigma) \prod_{j \notin A_\gamma(d)} \frac{d_j}{1 - \varepsilon_j' \xi^{-d_j}} & \text{si } a_\gamma(d) = b_{\sigma,\gamma}(d, \chi), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i,\gamma,\chi}(V^\sigma)$  et  $\varepsilon'_i = \varepsilon_{i,\gamma}(V)$ .

On a  $a_\gamma(d) \leq b_{\sigma,\gamma}^*(d, \chi)$  et l'égalité suivante dans  $\mathbb{C}[T]$

$$(-1)^\ell \xi^{\deg(Q_\chi) + \ell\sigma} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} (-T)^{d(g\gamma, \xi)} (\det'(1 - \xi^{-1}g\gamma))^{\sigma-1} \det(g\gamma)^{-\sigma} = \begin{cases} \prod_{j \in B_{\sigma,\gamma}^*(d, \chi)} (T - r_j^*(\sigma, \chi)) \prod_{j \notin B_{\sigma,\gamma}^*(d, \chi)} (1 - \varepsilon_j \xi^{r_j^*(\sigma, \chi)} + \sigma) \prod_{j \notin A_\gamma(d)} \frac{d_j}{1 - \varepsilon_j' \xi^{-d_j}} & \text{si } a_\gamma(d) = b_{\sigma,\gamma}^*(d, \chi), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i,\gamma,\chi}(V^{*\sigma})$  et  $\varepsilon'_i = \varepsilon_{i,\gamma}(V)$ .

**Preuve.** Pour toute réflexion  $s \in G$ , l'application  $s_{V^\sigma}$  est encore une réflexion. Ainsi le corollaire 2.27 s'applique au  $G$ -module  $V^\sigma$ . Pour  $g \in G$ , on note  $\lambda_1(g\gamma), \dots, \lambda_\ell(g\gamma)$  les valeurs propres de  $g\gamma$  sur  $V$ . Ainsi

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{(1 + Y(\lambda_i(g\gamma)))^\sigma}{(1 - X\lambda_i(g\gamma))} = X^{\deg(Q_\chi)} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{(1 + \varepsilon_i Y X^{-r_i(\sigma, \chi)})}{(1 - \varepsilon_i' X^{d_i})}.$$

On effectue à présent le changement d'indéterminée  $Y = \xi^{-\sigma}(T(1 - \xi X) - 1)$ .

Commençons par le membre de gauche. Il devient

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1 - (\lambda_i(g\gamma)\xi^{-1})^\sigma (1 - T(1 - \xi X))}{1 - X\lambda_i(g\gamma)}.$$

Distinguons dans chacun des termes de la somme les valeurs propres de  $g\gamma$  égales à  $\xi$  de celles qui ne le sont pas. On obtient alors dans  $\mathbb{C}(T, X)$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \left( \prod_{\{i \mid \lambda_i = \xi\}} T \prod_{\{i \mid \lambda_i \neq \xi\}} \frac{1 - (\lambda_i(g\gamma)\xi^{-1})^\sigma (1 - T(1 - \xi X))}{1 - X\lambda_i(g\gamma)} \right).$$

Ainsi  $\xi^{-1}$  n'est pas un pôle de cette fraction rationnelle en  $X$  et en évaluant en ce point, on obtient

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} T^{d(g\gamma, \xi)} \left( \prod_{\{i \mid \lambda_i \neq \xi\}} \frac{1 - (\xi^{-1}\lambda_i(g\gamma))^\sigma}{1 - \xi^{-1}\lambda_i(g\gamma)} \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} T^{d(g\gamma, \xi)} (\det'(1 - \xi^{-1}g\gamma))^{\sigma-1}.$$

Considérons maintenant le membre de droite de l'égalité. Après le changement d'indéterminée, il devient

$$X^{\deg(Q_\chi)} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1 - \varepsilon_i \xi^{-\sigma} (1 - T(1 - \xi X)) X^{-r_i(\sigma, \chi)}}{1 - \varepsilon_i' X^{d_i}}.$$

Comptons sous cette forme la multiplicité de  $\xi^{-1}$  comme zéro du numérateur et du dénominateur de cette fraction rationnelle en  $X$ . Pour le dénominateur,  $\xi^{-1}$  est racine de  $1 - \varepsilon_i' X^{d_i}$  si et seulement si  $i \in A_\gamma(d)$  et de plus cette racine est simple. Donc  $\xi^{-1}$  est un zéro d'ordre  $a_\gamma(d)$  du dénominateur. Pour le numérateur,

$$1 - \varepsilon_i \xi^{-\sigma} (1 - T(1 - \xi X)) X^{-r_i(\sigma, \chi)}$$

s'annule en  $\xi^{-1}$  si et seulement si  $i \in B_\sigma(d, \chi)$ . De plus, en différentiant par rapport à  $X$ , on obtient

$$-\varepsilon_i \xi^{-\sigma} (-r_i(\sigma, \chi)(1 - T(1 - \xi X))X^{-r_i(\sigma, \chi)-1} + T \xi X^{-r_i(\sigma, \chi)})$$

qui ne s'annule pas en  $X = \xi^{-1}$ . Donc, l'ordre de  $\xi^{-1}$  en tant que zéro du numérateur est  $b_{\sigma, \gamma}(d, \chi)$ .

Dans le membre de gauche,  $\xi^{-1}$  n'est pas un pôle, donc

$$a_\gamma(d) \leq b_{\sigma, \gamma}(d, \chi).$$

On en déduit également que le second membre est nul si  $a_\gamma(d) < b_{\sigma, \gamma}(d, \chi)$ . Le deuxième cas est ainsi démontré.

Supposons à présent  $a_\gamma(d) = b_{\sigma, \gamma}(d, \chi)$ . Soit  $i \in B_{\sigma, \gamma}(d, \chi)$ , alors  $\varepsilon_i \xi^{-\sigma} = \xi^{-r_i(\sigma, \chi)}$  et donc

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon_i \xi^{-\sigma} (1 - T(1 - \xi X))X^{-r_i(\sigma, \chi)} &= 1 - (1 - T(1 - \xi X))(\xi X)^{-r_i(\sigma, \chi)} \\ &= 1 - (\xi X)^{-r_i(\sigma, \chi)} + T(1 - \xi X)(\xi X)^{-r_i(\sigma, \chi)} \\ &= (1 - \xi X) \left( T(\xi X)^{-r_i(\sigma, \chi)} + \sum_{k=0}^{-r_i(\sigma, \chi)-1} (\xi X)^k \right). \end{aligned}$$

Soit  $j \in A_\gamma(d)$ , alors  $\varepsilon'_j = \xi^{d_j}$  et donc

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon'_j X^{d_j} &= 1 - \xi^{d_j} X^{d_j} \\ &= (1 - \xi X) \sum_{k=0}^{d_j-1} (\xi X)^k. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour  $j \in A_\gamma(d)$  et  $i \in B_{\sigma, \gamma}(d, \chi)$ , on obtient

$$\frac{1 - \varepsilon_i \xi^{-\sigma} (1 - T(1 - \xi X))X^{-r_i(\sigma, \chi)}}{1 - X^{d_j}} = \frac{T(\xi X)^{-r_i(\sigma, \chi)} + \sum_{k=0}^{-r_i(\sigma, \chi)-1} (\xi X)^k}{\sum_{k=0}^{d_j-1} (\xi X)^k}.$$

En évaluant en  $\xi^{-1}$ , cela donne

$$\frac{T - r_i(\sigma, \chi)}{d_j}.$$

Finalement, en choisissant pour chacun des facteurs du numérateur dont l'indice appartient à  $B_{\sigma, \gamma}(d, \chi)$ , l'un des facteurs du dénominateur dont l'indice appartient à  $A_\gamma(d)$  (ce qui est possible puisqu'on suppose que  $a_\gamma(d) = b_{\sigma, \gamma}(d, \chi)$ ), on obtient après évaluation en  $\xi^{-1}$

$$\xi^{-\deg(Q_X)} \frac{\prod_{j \in B_{\sigma, \gamma}(d, \chi)} (T - r_j(\sigma, \chi)) \prod_{j \notin B_{\sigma, \gamma}(d, \chi)} (1 - \varepsilon_j \xi^{r_j(\sigma, \chi)-\sigma})}{\prod_{j \in A_\gamma(d)} d_j \prod_{j \notin A_\gamma(d)} (1 - \varepsilon'_j \xi^{-d_j})}.$$

Compte tenu de la relation  $|G| = \prod_{i=1}^{\ell} d_i$ , on obtient la relation voulue.

Pour la deuxième relation, il s'agit d'appliquer la relation à  $V^{*\sigma} = V^{\sigma*}$  sur lequel  $s_H$  agit comme une réflexion pour tout  $H \in \mathcal{H}$ . On effectue le changement de variable  $Y = \xi^\sigma (T(1 - \xi X) - 1)$  et on utilise la relation  $(1 - z^{-1})(1 - z)^{-1} = -z^{-1}$ . ■

### LORSQUE $\gamma$ EST TRIVIAL

On s'intéresse au cas où  $\gamma = \text{id}$ . Pour simplifier, on note

$$B^*(d, \chi) := B_{\text{id}, \text{id}}^*(d, \chi) = \{j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket, \quad d \mid 1 + r_j^*(\text{id}, \chi)\} \quad \text{et} \quad b^*(d, \chi) = |B^*(d, \chi)|;$$

$$B(d, \chi) := B_{\text{id}, \text{id}}(d, \chi) = \{j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket, \quad d \mid 1 - r_j(\text{id}, \chi)\} \quad \text{et} \quad b(d, \chi) = |B(d, \chi)|;$$

et enfin

$$A(d) := A_{\text{id}}(d) = \{j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket, \quad d \mid d_j\} \quad \text{et} \quad a(d) = |A(d)|.$$

Rappelons que  $d$  est régulier si l'un des  $V(g, \xi)$  rencontre le complémentaire des hyperplans de  $\mathcal{H}$ . Le corollaire suivant généralise les résultats de [L-M] et [LEH1].

**Corollaire 2.30 — Cas particuliers et conséquences.** On obtient les formules suivantes

$$(i) \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} T^{d(g, 1)} (\det'(1 - g))^{\sigma-1} = \prod_{j=1}^{\ell} (T - r_j(\sigma, \chi)).$$

$$(ii) \xi^{\deg(Q_X)} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} T^{d(g, \xi)} = \begin{cases} \prod_{j \in B(d, \chi)} (T - r_j(\text{id}, \chi)) \prod_{j \notin B(d, \chi)} (1 - \xi^{r_j(\text{id}, \chi)-1}) \prod_{j \notin A(d)} \frac{d_j}{1 - \xi^{-d_j}}, & \text{si } a(d) = b(d, \chi), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (iii)  $\sum_{g \in G} \chi(g) T^{d(g,1)} = \prod_{j=1}^{\ell} (T - r_j(\text{id}, \chi)).$
- (iv) On a  $a(d) \leq b^*(d, \chi)$  et
- $$(-1)^{\ell} \xi^{\ell + \deg(Q_\chi)} \sum_{g \in G} (-T)^{d(g, \xi)} (\chi \cdot \det)(g^{-1}) =$$
- $$\begin{cases} \prod_{j \in B^*(d, \chi)} (T - r_j^*(\text{id}, \chi)) \prod_{j \notin B^*(d, \chi)} (1 - \xi^{r_j^*(\text{id}, \chi)+1}) \prod_{j \notin A(d)} \frac{d_j}{1 - \xi^{-d_j}}, & \text{si } a(d) = b^*(d, \chi), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
- (v)  $\sum_{g \in G} T^{d(g,1)} (\chi \cdot \det)(g) = \prod_{j=1}^{\ell} (T + r_j^*(\text{id}, \chi)).$
- (vi) Les deux multi-ensembles  $\{-r_1^*(\text{id}, \chi), \dots, -r_\ell^*(\text{id}, \chi)\}$  et  $\{r_1(\text{id}, \chi \cdot \det), \dots, r_\ell(\text{id}, \chi \cdot \det)\}$  sont identiques et  $b^*(d, \chi) = b(d, \chi \cdot \det).$
- (vii) Si  $d$  est régulier, alors  $a(d) = b_\sigma(d, \chi)$  pour tout caractère linéaire  $\chi$  et tout  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ .
- (viii) Si pour tout  $H \in \mathcal{H}$ , la restriction de  $\chi \cdot \det$  à  $G_H$  est non-triviale, alors  $d$  est régulier si et seulement si  $a(d) = b(\chi, d)$ .

### Preuve.

(i) C'est l'application du théorème 2.29 dans le cas  $d = 1$  et donc  $\xi = 1$ . On a alors

$$A(1) = B_{\sigma, \text{id}}(1, \chi) = \llbracket 1, \ell \rrbracket \quad \text{et} \quad a(1) = b_{\sigma, \text{id}}(1, \chi).$$

(ii) C'est l'application du théorème 2.29 dans le cas où  $\sigma = \text{id}$ . On retrouve le théorème 2.1 de [LEH1].

(iii) Comme  $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$  et  $d(g, 1) = d(g^{-1}, 1)$ , c'est un cas particulier de (i) pour  $\sigma = \text{id}$  ou de (ii) pour  $d = 1$ . C'est l'égalité 3.2 de Lehrer [LEH1].

(iv) C'est l'application de la deuxième formule du théorème 2.29 pour  $\sigma = \text{id}$ .

(v) C'est l'application de (iv) pour  $d = 1 = \xi$ , en remarquant que  $d(g, 1) = d(g^{-1}, 1)$ .

(vi) Il suffit de comparer l'égalité (iii) appliquée au caractère  $\chi \cdot \det$  à l'égalité (v). Par ailleurs,

(vii) D'après le théorème 3.4 de Springer [SPR1], le polynôme de gauche dans le théorème 2.29 est de degré au plus  $a(d)$ . Calculons le coefficient de  $T^{a(d)}$ . Comme  $d$  est régulier, les  $g \in G$  vérifiant  $d(g, \xi) = a(d)$  forment une classe de conjugaison. Ainsi  $\overline{\chi(g) \det'(1 - \xi^{-1}g)^{\sigma-1}}$  ne dépend pas de  $g$  lorsque  $g$  vérifie  $d(g, \xi) = a(d)$ . Le coefficient de  $T^{a(d)}$  est donc non nul et le polynôme est non nul, ainsi  $a(d) = b_\sigma(d, \chi)$ .

(viii) Il s'agit du point (vi) associé au corollaire 3.9 de Lehrer [LEH1] appliqué au caractère  $\chi \cdot \det$ . ■

### LORSQUE $\gamma$ N'EST PAS NÉCESSAIREMENT TRIVIAL

Le cas  $\chi = \mathbf{1}$  est traité dans [BLM]. Rappelons que l'entier  $d$  est  $\gamma$ -régulier si l'un des sous-espaces propres  $V(g\gamma, \xi)$  rencontre le complémentaire des hyperplans de  $\mathcal{H}$ . Pour simplifier, on note

$$B_\gamma^*(d, \chi) := B_{\text{id}, \gamma}^*(d, \chi), \quad b_\gamma^*(d, \chi) := |B_\gamma^*(d, \chi)|, \quad B_\gamma(d, \chi) := B_{\text{id}, \gamma}(d, \chi) \quad \text{et} \quad b_\gamma(d, \chi) := |B_\gamma(d, \chi)|.$$

**Corollaire 2.31 – Cas particuliers et conséquences.** On obtient les formules suivantes

(i)  $\xi^{\deg(Q_\chi)} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} T^{d(g\gamma, \xi)} =$

$$\begin{cases} \prod_{j \in B_\gamma(d, \chi)} (T - r_j(\text{id}, \chi)) \prod_{j \notin B_\gamma(d, \chi)} (1 - \varepsilon_j \xi^{r_j(\text{id}, \chi)-1}) \prod_{j \notin A_\gamma(d)} \frac{d_j}{1 - \varepsilon'_j \xi^{-d_j}}, & \text{si } a_\gamma(d) = b_\gamma(d, \chi), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i, \gamma, \chi}(V)$  et  $\varepsilon'_i = \varepsilon_{i, \gamma}(V)$ .

(ii)  $(-1)^\ell \xi^{\deg(Q_\chi)+\ell} \det(\gamma^{-1}) \sum_{g \in G} (\chi \cdot \det)(g^{-1}) (-T)^{d(g\gamma, \xi)} =$

$$\begin{cases} \prod_{j \in B_\gamma^*(d, \chi)} (T - r_j^*(\text{id}, \chi)) \prod_{j \notin B_\gamma^*(d, \chi)} (1 - \varepsilon_j \xi^{r_j^*(\text{id}, \chi)+1}) \prod_{j \notin A_\gamma(d)} \frac{d_j}{1 - \varepsilon'_j \xi^{-d_j}} & \text{si } a_\gamma(d) = b_\gamma^*(d, \chi), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i, \gamma, \chi}(V^*)$  et  $\varepsilon'_i = \varepsilon_{i, \gamma}(V)$ .

(iii) On a  $\{-r_i^*(\text{id}, \chi), \quad i \in B_\gamma^*(d, \chi)\} = \{r_i(\text{id}, \chi \cdot \det), \quad i \in B_\gamma(d, \chi)\}$  et  $b_\gamma^*(d, \chi) = b_\gamma(d, \chi \cdot \det)$ .

(iv) Si  $d$  est  $\gamma$ -régulier, alors  $a_\gamma(d) = b_{\sigma, \gamma}(d, \chi) = b_{\sigma, \gamma}^*(\chi, d)$  pour tout caractère linéaire  $\chi$  et tout  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ .

- (v) Si pour tout  $H \in \mathcal{H}$ , la restriction de  $\chi$  à  $G_H$  est non-triviale, alors  $d$  est  $\gamma$ -régulier si et seulement si  $a_\gamma(d) = b_\gamma(\chi, d)$ .
- (vi) Si pour tout  $H \in \mathcal{H}$ , la restriction de  $\chi \cdot \det$  à  $G_H$  est non-triviale, alors  $d$  est  $\gamma$ -régulier si et seulement si  $a_\gamma(d) = b_\gamma^*(\chi, d)$ .

### Preuve.

- (i) C'est l'application de la première partie du théorème 2.29 dans le cas  $\sigma = \text{id}$ .
- (ii) C'est l'application de la deuxième partie du théorème 2.29 dans le cas  $\sigma = \text{id}$ .
- (iii) Il suffit de comparer les racines de (i) appliquée à  $\chi \cdot \det$  et de (ii).
- (iv) D'après le théorème 3.4 de Springer [SPR1], le polynôme de gauche dans le théorème 2.29 est de degré au plus  $a_\gamma(d)$ . Calculons le coefficient de  $T^{a_\gamma(d)}$ . Comme  $d$  est régulier, les  $g \in G$  vérifiant  $d(g\gamma, \xi) = a_\gamma(d)$  forment une classe de conjugaison. Ainsi  $\overline{\chi(g) \det'(1 - \xi^{-1}g)^{\sigma-1}}$  ne dépend pas de  $g$  lorsque  $g$  vérifie  $d(g\gamma, \xi) = a_\gamma(d)$ . Le coefficient de  $T^{a_\gamma(d)}$  est donc non nul et le polynôme est non nul, ainsi  $a_\gamma(d) = b_{\sigma, \gamma}(d, \chi)$ .
- (v) D'après (iv), il suffit de montrer que si  $a_\gamma(d) = b_\gamma(\chi, d)$  alors  $d$  est  $\gamma$ -régulier. D'après l'égalité (i), le coefficient en  $T^{a_\gamma(d)} = T^{b_\gamma(\chi, d)}$  est non nul. Ainsi, toujours grâce au théorème de Springer, le coefficient de  $T^{a_\gamma(d)}$  se factorise par  $\sum_{g \in C} \chi(g)$  où

$$C = \{g \in G, \quad \forall x \in V(h\gamma, \xi), \quad gx = x\} \quad \text{avec} \quad d(h\gamma, \xi) = a_\gamma(d).$$

Si  $C$  n'est pas trivial,  $C$  contient l'un des  $G_H$  (d'après le théorème de Steinberg) et comme la restriction de  $\chi$  à  $G_H$  n'est pas triviale, on a  $\sum_{g \in C} \chi(g) = 0$ . On aboutit ainsi à un contradiction et donc  $C = 1$ , ce qui signifie que  $d$  est  $\gamma$ -régulier.

- (vi) C'est la conséquence des (iii) et (v). ■

## 2.3 EXEMPLE 1 : ÉTUDE DES HYPERPLANS DE $\mathfrak{S}_n$

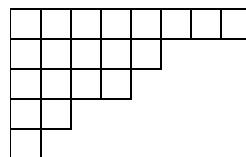
Dans la sous-section 2.1.1, on a défini différents types d'hyperplans (voir la définition 2.3). Dans cette section et les deux suivantes, on étudie la situation pour différents groupes de réflexions. On commence par l'étude des hyperplans des groupes  $\mathfrak{S}_n$ . On introduit tout d'abord, dans la sous-section 2.3.1, les outils combinatoires utiles à l'étude des représentations du groupe  $\mathfrak{S}_n$  : les partitions et leur représentation géométrique que sont les diagrammes de Young. On définit ensuite les tableaux de Young et la notion de tabloïde. Dans la sous-section 2.3.2, on dénombre les (ou plutôt on minore le nombre de) tableaux vérifiant certaines contraintes. Enfin dans la sous-section 2.3.3, on relie le travail combinatoire qui précède aux représentations de  $\mathfrak{S}_n$  pour aboutir à l'étude des différents types d'hyperplans (corollaire 2.52) de  $\mathfrak{S}_n$  en suivant le chapitre 6 de [MAL]. Pour une autre approche combinatoire des représentations de  $\mathfrak{S}_n$ , on pourra consulter [O-V].

### 2.3.1 OUTILS COMBINATOIRES

**Définition 2.32 — Partition.** Une *partition* est une suite décroissante d'entiers naturels non nuls. On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des partitions. Pour  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathcal{P}$ , on dit que les  $\lambda_i$  sont les *parts* de  $\lambda$ . Le nombre de parts  $r$  est la *hauteur* de  $\lambda$  et  $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_r$  est la *longueur* de  $\lambda$ .

**Définition 2.33 — Diagramme de Young.** Un *diagramme de Young* est un tableau dont les lignes sont rectifiées à gauche et tel que le nombre de cases (de colonnes) d'une ligne est plus grand que celui de la ligne suivante.

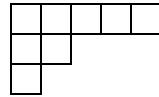
**Exemple 2.34 — Diagramme de Young.** Par exemple



est un diagramme de Young. ■

**Remarque 2.35 – Partition et diagramme de Young.** Partitions et diagrammes de Young se correspondent : à  $\lambda \in \mathcal{P}$ , on associe le diagramme de Young dont la  $i^e$  ligne a  $\lambda_i$  cases ; réciproquement à un diagramme de Young à  $r$  lignes, on a associe la partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  tel que  $\lambda_i$  soit le nombre de colonnes de la  $i^e$  ligne.

Par exemple, la partition  $(5, 3, 2)$  est représentée par



On identifiera toujours partition et diagramme via cette correspondance. On notera donc aussi  $\lambda$  le tableau de Young correspondant à la partition  $\lambda$ . On identifiera encore la partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  ou son diagramme correspondant au sous-ensemble de  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

$$E_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad j \in \llbracket 1, \lambda_i \rrbracket\}.$$

**Définition 2.36 – Tableau.** Soit  $\lambda$  une partition de longueur  $n$ . Un  $\lambda$ -tableau est un arrangement sans répétition des entiers de 1 à  $n$  dans les cases du diagramme de Young correspondant à  $\lambda$ . L'identification d'une partition  $\lambda$  et de son diagramme de Young avec un sous-ensemble de  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  permet d'identifier alors les  $\lambda$ -tableaux avec l'ensembles des applications injectives de  $E_\lambda$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Un  $\lambda$ -tableau est un  $\lambda$ -tableau standard si les lignes sont rangées par ordre croissant de gauche à droite et les colonnes sont rangées par ordre croissant de haut en bas. Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  ; dans l'identification entre  $\lambda$ -tableaux et applications injectives de  $E_\lambda$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , les  $\lambda$ -tableaux standards correspondent aux applications telles que pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , l'application  $j \mapsto f(i, j)$  est croissante et pour tout  $j \in \llbracket 1, \lambda_1 \rrbracket$ , l'application  $i \mapsto f(i, j)$  est croissante.

**Exemple 2.37 – Tableau.** Par exemple,

4	8	7	3	1
5	6			
2				

est un  $(5, 2, 1)$ -tableau et

1	3	4	7	8
2	6			
5				

est un  $(5, 2, 1)$ -tableau standard.

**Définition 2.38 – Action de  $\mathfrak{S}_n$  sur les tableaux.** Soient  $\lambda$  une partition de longueur  $n$ . En identifiant les  $\lambda$ -tableaux aux applications injectives de  $E_\lambda$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on en déduit une action du groupe  $\mathfrak{S}_n$  sur l'ensemble des  $\lambda$ -tableaux. En effet, si  $G$  est un groupe et  $X$  un ensemble sur lequel  $G$  agit alors pour tout ensemble  $Y$ ,  $G$  agit sur l'ensemble des  $\text{Inj}(Y, X)$  des applications injectives  $Y$  dans  $X$  : si  $f \in \text{Inj}(Y, X)$  et  $g \in G$ , on pose  $gf : x \mapsto gf(x)$  (qui est injective puisque  $f$  l'est et la multiplication par  $g$  aussi). Ainsi  $\mathfrak{S}_n$  agit sur l'ensemble des applications injectives de  $E_\lambda$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et donc sur les  $\lambda$ -tableaux.

Finalement, si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $t$  un  $\lambda$ -tableau,  $\sigma t$  est le  $\lambda$ -tableau obtenu en mettant  $\sigma(i)$  dans la case de  $t$  contenant  $i$ .

**Exemple 2.39 – Action de  $\mathfrak{S}_n$  sur les tableaux.** Par exemple, pour  $\sigma = (1, 3, 5, 6)(2, 4)(7, 8)$  et

$t =$	4	8	7	3	1
	5	6			
	2				

on a

$\sigma t =$	2	7	8	5	3
	6	1			
	4				

**Définition 2.40 – Sous-groupe associé à un tableau.** Soit  $\lambda$  une partition de longueur  $n$  et  $t$  un  $\lambda$ -tableau. On considère les sous-groupes stabilisateurs respectivement des colonnes et des lignes de  $t$

$$V_t = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \sigma(C) = C \text{ pour toutes colonnes de } t\} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \forall i, \sigma(i) \text{ et } i \text{ sont dans la même colonne}\}$$

$$\text{et } H_t = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \sigma(L) = L \text{ pour toutes lignes de } t\} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \forall i, \sigma(i) \text{ et } i \text{ sont dans la même ligne}\}.$$

On pose

$$\kappa_t = \sum_{\sigma \in V_t} \varepsilon(\sigma) \sigma \in \mathbb{C}[V_t] \subset \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n].$$

**Exemple 2.41 — Sous-groupe associé à un tableau.** Par exemple, pour le  $(5, 2, 1)$ -tableau

4	8	7	3	1
5	6			
2				

on a  $V_t = \mathfrak{S}_{\{2,4,5\}} \times \mathfrak{S}_{\{6,8\}}$  et  $H_t = \mathfrak{S}_{\{1,3,4,7,8\}} \times \mathfrak{S}_{\{5,6\}}$ . ■

**Lemme 2.42 — Action sur les tableaux.** Soit  $\lambda$  une partition de longueur  $n$ . L'action de  $\mathfrak{S}_n$  sur les  $\lambda$ -tableaux est simplement transitive. De plus, pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $t$  un  $\lambda$ -tableau, on a  $H_{\sigma t} = \sigma H_t \sigma^{-1}$  et  $V_{\sigma t} = \sigma V_t \sigma^{-1}$ .

**Preuve.** L'ensemble  $E_\lambda$  a  $n$  éléments ainsi une application injective  $f : E_\lambda \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  est bijective et il y a donc  $n!$   $\lambda$ -tableaux. De plus, si  $f = \sigma f$  alors  $\sigma = \text{id}$  et donc tous les stabilisateurs sont triviaux. On en déduit que l'orbite de  $f$  à  $|\mathfrak{S}_n| = n!$  éléments. On en déduit que deux  $\lambda$ -tableaux sont dans la même orbite.

Pour  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on note  $L_i \subset \llbracket 1, n \rrbracket$  la  $i^{\text{e}}$  ligne de  $t$ . La  $i^{\text{e}}$  ligne de  $\sigma t$  est  $\sigma L_i$ . Tout élément de  $\sigma H_t \sigma^{-1}$  vérifie bien sûr  $\sigma H_t \sigma^{-1}(\sigma L_i) = \sigma L_i$ . Ainsi  $\sigma H_t \sigma^{-1} \subset H_{\sigma t}$ . Comme  $t = \sigma^{-1}(\sigma t)$ , on en déduit l'égalité souhaitée.

Un raisonnement analogue donne le résultat pour les colonnes. ■

**Proposition-Définition 2.43 — Tabloïde.** Soient  $\lambda$  une partition. On définit une relation d'équivalence  $\sim$  sur l'ensemble des  $\lambda$ -tableaux par

$$t \sim t' \iff \exists \sigma \in H_t, \quad t' = \sigma t.$$

Soit  $t$  un  $\lambda$ -tableau ; on note  $\{t\}$  la classe d'équivalence de  $t$  pour la relation  $\sim$ . Chaque classe d'équivalence admet un représentant privilégié : celui dont les lignes sont classées par ordre croissant. Un élément du quotient est appelé un  $\lambda$ -tabloïde.

**Preuve.** Montrons que  $\sim$  est bien une relation d'équivalence. Comme  $\text{id} \in H_t$ , on a bien  $t \sim t$ . Si  $t \sim t'$  alors  $t' = \sigma t$  pour  $\sigma \in H_t$ . Les lignes de  $t'$  sont donc à permutation près les mêmes que celles de  $t$ . Ainsi  $H_{t'} = H_t$  et donc  $t = \sigma^{-1}t'$  avec  $\sigma^{-1} \in H_{t'}$  et  $t' \sim t$ . Soient  $t \sim t'$  et  $t' \sim t''$ . On a  $t' = \sigma t$  et  $t'' = \sigma' t'$  avec  $\sigma \in H_t$  et  $\sigma' \in H_{t'} = H_t$ . On a  $t'' = \sigma' \sigma t$  avec  $\sigma' \sigma \in H_t$  et donc  $t \sim t''$ . ■

**Proposition-Définition 2.44 — Action sur les tabloïdes.** Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  une partition de longueur  $n$ . L'action de  $\mathfrak{S}_n$  sur les  $\lambda$ -tableaux passe au quotient et définit une action de  $\mathfrak{S}_n$  sur les  $\lambda$ -tabloïdes. L'action est transitive et le stabilisateur du tabloïde  $\{t\}$  est  $H_t$ . Le nombre de  $\lambda$ -tabloïde est donc

$$\frac{n!}{\lambda_1! \cdots \lambda_r!}.$$

**Preuve.** On considère  $t, t'$  deux  $\lambda$ -tableaux tels que  $t \sim t'$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Montrons que  $\sigma t \sim \sigma t'$ . Par hypothèse, il existe  $\tau \in H_t$  tel que  $t' = \tau t$ . On a alors  $\sigma t' = \sigma \tau \sigma^{-1}(\sigma t)$ . Le lemme 2.42 montre que  $\sigma \tau \sigma^{-1} \in H_{\sigma t}$  et donc  $\sigma t' \sim \sigma t$ . Ainsi l'action de  $\mathfrak{S}_n$  passe au quotient : on peut poser  $\sigma \{t\} = \{\sigma t\}$ .

Comme l'action sur les  $\lambda$ -tableaux est transitive, celle sur les  $\lambda$ -tabloïdes l'est aussi : soient  $\{t\}, \{t'\}$  deux  $\lambda$ -tabloïdes, il existe  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  tel que  $t' = \sigma t$  et donc  $\{t'\} = \{\sigma t\} = \sigma \{t\}$ .

On a vu dans la proposition-définition 2.43 que si  $t \sim t'$  alors  $H_t = H_{t'}$ . Ainsi le groupe  $H_t$  ne dépend pas du choix du représentant. Par ailleurs, si  $\sigma \in H_t$  alors  $t \sim \sigma t$  par définition de  $\sim$ . Ainsi  $\{t\} = \{\sigma t\} = \sigma \{t\}$ . Ainsi  $H_t$  est contenu dans le stabilisateur de  $\{t\}$ . Réciproquement, si  $\{t\} = \sigma \{t\} = \{\sigma t\}$ , il existe  $\tau \in H_t$  tel que  $\sigma t = \tau t$ . Comme  $\mathfrak{S}_n$  agit les  $\lambda$ -tableaux de façon simple, on en déduit que  $\sigma = \tau \in H_t$ . Ainsi  $H_t$  est bien le stabilisateur de  $\{t\}$ .

Le nombre de  $\lambda$ -tabloïde découle alors de la bijection entre l'orbite d'un point et le quotient du groupe par le stabilisateur du point en question et du fait que  $|H_t| = \lambda_1! \cdots \lambda_r!$ . ■

### 2.3.2 QUELQUES DÉNOMBREMENTS DE PARTITIONS

Au vu de la proposition 2.49, on minore, dans cette sous-section, le nombre de  $\lambda$ -tableaux standards dont la première case de la deuxième ligne est 2 pour les différentes partitions  $\lambda$ .

**Lemme 2.45 — Tableaux standards.**

(i) Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  une partition avec  $\lambda_1 \geq 4$  et  $\lambda_2 \geq 3$ . Il existe au moins 4  $\lambda$ -tableaux standards dont la première case de la première ligne est 1 et dont la première case de la deuxième ligne est 2.

- (ii) Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  une partition avec  $\lambda_2 = 2$ . Il existe au moins  $(\lambda_1 - 1)$   $\lambda$ -tableaux standards dont la première case de la première ligne est 1 et dont la première case de la deuxième ligne est 2.
- (iii) Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  une partition avec  $\lambda_2 = 1$  et  $\lambda_1 \geq 2$ . Il existe au moins  $(r - 1)$   $\lambda$ -tableaux standards dont la première case de la première ligne est 1 et dont la première case de la deuxième ligne est 2.

**Preuve.** On peut toujours compléter en  $\lambda$ -tableaux standard, les tableaux suivants :

<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td></td></tr></table>	1	3	5	7	2	4	6		<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>7</td><td></td></tr></table>	1	3	5	6	2	4	7		<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td></td></tr></table>	1	3	4	7	2	5	6		<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td></td></tr></table>	1	3	4	7	2	5	6	
1	3	5	7																																
2	4	6																																	
1	3	5	6																																
2	4	7																																	
1	3	4	7																																
2	5	6																																	
1	3	4	7																																
2	5	6																																	

On pose  $\mu = \lambda_1 + 2$ . Soit  $s \in \llbracket 4, \mu \rrbracket$ . On peut toujours compléter en  $\lambda$ -tableaux standard, le tableau suivant dont la première ligne contient la suite croissante des entiers de 1 à  $\lambda_1 + 2$  excepté 2 et  $s$  :

<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td></td><td><math>\widehat{s}</math></td><td></td><td><math>\mu</math></td></tr><tr><td>2</td><td><math>s</math></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	4	5		$\widehat{s}$		$\mu$	2	$s$						
1	3	4	5		$\widehat{s}$		$\mu$									
2	$s$															

Comme on a  $\mu - 4 + 1 = \lambda_1 - 1$  tels tableaux, on obtient le résultat souhaité.

Soit  $s \in \llbracket 3, r + 1 \rrbracket$ . On peut toujours compléter en  $\lambda$ -tableaux standard, le tableau suivant dont la première ligne contient la suite croissante des entiers de 1 à  $r$  excepté  $s$  :

<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td><math>s</math></td></tr></table>	1	$s$
1	$s$	
2		
3		
$\widehat{s}$		
$r$		

Comme on a  $r + 1 - 3 + 1 = r - 1$  tels tableaux, on obtient le résultat souhaité. ■

**Lemme 2.46 – Partition à moins de 4 tableaux standards.** Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  une partition telle que le nombre de  $\lambda$ -tableaux standards dont la première case de la première ligne est 1 et dont la première case de la deuxième ligne est 2 est inférieur ou égal à 3. On a alors  $\lambda = (|\lambda|)$  ou  $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$  ou  $\lambda = (|\lambda| - 1, 1)$  ou  $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_r \leq 6$  et si  $|\lambda| = 6$  alors  $\lambda = (4, 2)$  ou  $\lambda = (3, 3)$  ou  $\lambda = (2, 2, 2)$ .

**Preuve.** Si  $\lambda_2 = 0$  alors il n'y a aucun  $\lambda$ -tableaux standards dont la première case de la première ligne est 1 et dont la première case de la deuxième ligne est 2. Dans ce cas, on a  $\lambda = (|\lambda|)$ .

On suppose à présent que  $\lambda_2 \geq 1$ . D'après le point (i) du lemme 2.45, on a  $\lambda_1 \leq 3$  ou  $\lambda_2 \leq 2$ .

On suppose que  $\lambda_1 = 3$ . Comme  $1 \leq \lambda_2$  (puisque la deuxième ligne n'est pas vide) et  $\lambda_2 \leq \lambda_1$ , on a  $\lambda_2 \in \{1, 2, 3\}$ .

(i) Si  $\lambda_2 = 3$  et  $|\lambda| > 6$  alors on peut toujours compléter en  $\lambda$ -tableaux standard, les tableaux suivants :

<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>7</td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	5	2	4	6	7			<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>7</td></tr><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	5	2	4	7	6			<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>7</td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	4	2	5	6	7			<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	4	2	5	7	6		
1	3	5																																					
2	4	6																																					
7																																							
1	3	5																																					
2	4	7																																					
6																																							
1	3	4																																					
2	5	6																																					
7																																							
1	3	4																																					
2	5	7																																					
6																																							

On en déduit que si  $\lambda_1 = 3$  et  $\lambda_2 = 3$ , on a  $6 = \lambda_1 + \lambda_2 \leq |\lambda| \leq 6$  et donc  $\lambda = (3, 3)$ .

(ii) Si  $\lambda_2 = 2$  et  $|\lambda| \geq 6$  alors on peut toujours compléter en  $\lambda$ -tableaux standard, les tableaux suivants :

<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	4	2	5		6			<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	4	2	6		5			<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	5	2	4		6			<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	6	2	5		4			<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	5	2	6		4			<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	6	2	4		5		
1	3	4																																																									
2	5																																																										
6																																																											
1	3	4																																																									
2	6																																																										
5																																																											
1	3	5																																																									
2	4																																																										
6																																																											
1	3	6																																																									
2	5																																																										
4																																																											
1	3	5																																																									
2	6																																																										
4																																																											
1	3	6																																																									
2	4																																																										
5																																																											

On en déduit que si  $\lambda_1 = 3$  et  $\lambda_2 = 2$ , on a  $5 = \lambda_1 + \lambda_2 \leq |\lambda| < 6$  et donc  $\lambda = (3, 2)$ .

(iii) Si  $\lambda_2 = 1$  et  $|\lambda| \geq 6$  alors on peut toujours compléter en  $\lambda$ -tableaux standard, les tableaux suivants :

<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	4	2			5			6			<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	5	2			4			6			<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	6	2			4			5			<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr></table>	1	4	5	2			3			6		
1	3	4																																																	
2																																																			
5																																																			
6																																																			
1	3	5																																																	
2																																																			
4																																																			
6																																																			
1	3	6																																																	
2																																																			
4																																																			
5																																																			
1	4	5																																																	
2																																																			
3																																																			
6																																																			

On en déduit que si  $\lambda_1 = 3$  et  $\lambda_2 = 1$ , on a  $|\lambda| < 6$ .

On suppose que  $\lambda_1 = 2$ . Comme  $1 \leq \lambda_2$  (puisque la deuxième ligne n'est pas vide) et  $\lambda_2 \leq \lambda_1$ , on a  $\lambda_2 \in \{1, 2\}$ .

(i) On suppose  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 1$  et  $|\lambda| \geq 6$ . alors on peut toujours compléter en  $\lambda$ -tableaux standard, les tableaux suivants :

1	3
2	4
5	
6	

1	3
2	5
4	
6	

1	4
2	5
3	
6	

1	4
2	6
3	
5	

On en déduit que si  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = 2$  et  $\lambda_3 = 1$ , on a  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5 \leq |\lambda| < 6$  et donc  $\lambda = (2, 2, 1)$ .

(ii) On suppose  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 2$  et  $|\lambda| > 6$  alors on peut toujours compléter en  $\lambda$ -tableaux standard, les tableaux suivants :

1	3
2	4
5	6
7	

1	3
2	4
5	7
6	

1	3
2	5
4	6
7	

1	4
2	5
3	6
7	

On en déduit que si  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = 2$  et  $\lambda_3 = 2$ , on a  $6 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq |\lambda| \leq 6$  et donc  $\lambda = (2, 2, 2)$ .

(iii) Si  $\lambda_2 = 1$  et  $|\lambda| \geq 6$  alors  $r = |\lambda| - 1 \geq 5$ . Le lemme 2.45 assure qu'il y a au moins 4  $\lambda$ -tableaux standards. On en déduit que si  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = 1$ , on a  $|\lambda| < 6$ .

On suppose que  $\lambda_1 = 1$  alors  $\lambda_i = 1$  pour tout  $i$  et  $\lambda = (1, \dots, 1)$ .

On suppose à présent que  $\lambda_1 \geq 4$ . On a donc  $\lambda_2 \leq 2$ . On suppose que  $\lambda_2 = 2$ , le lemme 2.45 assure que  $\lambda_1 - 1 \leq 3$  et donc  $4 \leq \lambda_1 \leq 4$ . Si  $|\lambda| > 6$ , on peut compléter  $\lambda$ -tableaux standard, les tableaux suivants :

1	3	4	5
2	6		
7			

1	3	4	5
2	7		
6			

1	4	5	6
2	7		
3			

1	4	5	7
2	6		
3			

On en déduit que si  $\lambda_1 \geq 4$  et  $\lambda_2 = 2$  alors  $\lambda_1 = 4$  et  $|\lambda| = 6$  et  $\lambda = (4, 2)$ .

On suppose à présent que  $\lambda_1 \geq 4$  et  $\lambda_2 = 1$ . Si  $\lambda_3 = 1$  alors on peut compléter  $\lambda$ -tableaux standard, les tableaux suivants :

1	3	4	5
2			
6			

1	3	4	6
2			
5			

1	3	5	6
2			
4			

1	4	5	6
2			
3			

On en déduit que si  $\lambda_1 \geq 4$  et  $\lambda_2 = 1$  alors  $\lambda_3 = 0$  et  $\lambda = (|\lambda| - 1, 1)$ . ■

**Lemme 2.47 — Partition à moins de 2 tableaux standards.** Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  une partition telle que le nombre de  $\lambda$ -tableaux standards dont la première case de la première ligne est 1 et dont la première case de la deuxième ligne est 2 est inférieur ou égal à 1. On a alors  $\lambda = (|\lambda|)$  ou  $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$  ou  $\lambda = (|\lambda| - 1, 1)$  ou  $\lambda = (2, 2)$ .

**Preuve.** Si  $\lambda_2 = 0$ , il n'y a aucun  $\lambda$ -tableaux standards dont la première case de la première ligne est 1 et dont la première case de la deuxième ligne est 2. Dans ce cas, on a  $\lambda = (|\lambda|)$ .

On suppose que  $\lambda_2 \geq 1$ . Si  $\lambda_1 \geq 2$  et  $\lambda_3 \geq 1$ , alors on peut toujours compléter en  $\lambda$ -tableaux standard, les tableaux suivants :

1	3
2	
4	

1	4
2	
3	

On a donc  $\lambda_1 = 1$  ou  $\lambda_3 = 0$ . Dans le premier cas, on a  $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$ . On suppose à présent que  $\lambda_3 = 0$  c'est-à-dire  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ . Si  $\lambda_2 \geq 2$  et  $\lambda_1 \geq 3$  alors on peut toujours compléter en  $\lambda$ -tableaux standard, les tableaux suivants :

1	3	4
2	5	

1	3	5
2	4	

On en déduit que  $\lambda_2 = 1$  ou  $\lambda_1 = 2$ . Le premier cas donne les partitions  $(|\lambda| - 1, 1)$ , le deuxième donne la partition  $\lambda = (2, 2)$ . ■

### 2.3.3 LIEN AVEC LES REPRÉSENTATIONS DU GROUPE SYMÉTRIQUE

Dans cette sous-section, on relie diagrammes de Young et représentations du groupe symétrique par les modules de Specht. La proposition 2.49 et le dénombrement ci-dessus permettent alors de déterminer les différents types d'hyperplans pour le groupe symétrique.

**Définition 2.48 – Module de Specht.** Soit  $\lambda$  une partition de longueur  $n$ . On note  $M^\lambda$  le  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ -module donné par la représentation par permutation associée à l'ensemble des  $\lambda$ -tableoïdes (voir [SER, 1.2.c]). Comme toute représentation par permutation associée à une action transitive, on a  $M^\lambda = \text{Ind}_{\mathfrak{H}_t}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}$  où  $t$  est un  $\lambda$ -tableau standard (voir [MAL, 6.3.3]).

Pour  $t$  un  $\lambda$ -tableau, on pose  $e_t = \kappa_t \{t\} \in M^\lambda$ . On dit que  $e_t$  est un  $\lambda$ -polytableoïde. Si  $t$  est un  $\lambda$ -tableau standard, on dit que  $e_t$  est un  $\lambda$ -polytableoïde standard. L'application  $t \mapsto e_t$  de l'ensemble des  $\lambda$ -tableaux standards dans l'ensemble des  $\lambda$ -polytableoïdes standards est injective.

Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on a  $\sigma e_t = e_{\sigma t}$ . Ainsi  $S^\lambda = \langle e_t, \quad t \in \lambda - \text{tableau} \rangle_{\mathbb{C}-\text{ev}}$  est un  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ -module. Il est irréductible. L'ensemble des  $\lambda$ -polytableoïdes standards forment une  $\mathbb{C}$ -base de  $S^\lambda$ . De plus, les  $\lambda$ -polytableoïdes sont combinaisons linéaires à coefficients entiers des  $\lambda$ -polytableoïdes standards.

La famille des  $S^\lambda$  pour  $\lambda$  partition de longueur  $n$  est une famille de représentants des représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$  (voir [MAL, chapitre 6]).

**Proposition 2.49 – Tableau standard et transposition.** Soit  $\lambda$  une partition et  $t$  un tableau standard dont la première case de la première ligne contient 1 et dont la première case de la deuxième ligne contient 2. On a  $(1, 2)e_t = -e_t$ .

**Preuve.** On a  $(1, 2) \in V_t$  et donc  $(1, 2)\kappa_t = \varepsilon((1, 2))\kappa_t = -\kappa_t$ . Ainsi  $(1, 2)e_t = (1, 2)\kappa_t \{t\} = -\kappa_t \{t\} = -e_t$ . ■

**Corollaire 2.50 – Représentations acceptables.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$  pour lesquelles la multiplicité de la valeur propre  $-1$  sous l'action d'une transposition est inférieure ou égale à 3 sont la représentation triviale ( $\lambda = (n)$ ), la signature ( $\lambda = (1, \dots, 1)$ ), la représentation canonique ( $\lambda = (n-1, 1)$ ) si  $n \geq 6$ . Si  $n \leq 5$  toutes les représentations irréductibles conviennent. Si  $n = 6$ , il faut ajouter les  $S^\lambda$  pour  $\lambda = (3, 3)$ ,  $\lambda = (4, 2)$  et  $\lambda = (2, 2, 2)$ .

**Preuve.** Pour  $n \geq 6$ , il s'agit d'une conséquence de l'indépendance linéaire des polytableoïdes standards (voir la définition 2.48) et des propositions 2.49 et 2.46.

Pour  $n \leq 4$  les représentations irréductibles sont de dimension inférieure ou égale à 3.

Pour  $n = 5$ , la table de caractère de  $\mathfrak{S}_5$  donne le résultat (voir [FUL, 3.1])

Pour  $n = 6$ , il reste à calculer la multiplicité de la valeur propre  $-1$  pour les partitions  $\lambda = (3, 3)$ ,  $\lambda = (4, 2)$  et  $\lambda = (2, 2, 2)$ . En utilisant les formules données dans [FUL, égalité (4.11) et exercice (4.17.c)] pour calculer la dimension de  $S^\lambda$  et la valeur  $\chi_\lambda((1, 2))$  du caractère de  $S^\lambda$  sur  $(1, 2)$ . On obtient  $\dim S^\lambda = 5$  et  $\chi_\lambda(1, 2) = 1$  pour  $\lambda = (3, 3)$  ;  $\dim S^\lambda = 5$  et  $\chi_\lambda(1, 2) = -1$  pour  $\lambda = (2, 2, 2) = (3, 3)'$  et  $\dim S^\lambda = 9$  et  $\chi_\lambda(1, 2) = 3$  pour  $\lambda = (4, 2)$ . La multiplicité de la valeur  $-1$  est donc successivement 2, 3, 3. ■

**Corollaire 2.51 – Représentations de réflexions.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$  pour lesquelles les transpositions agissent comme des réflexions sont la signature ( $\lambda = (1, \dots, 1)$ ), la représentation canonique ( $\lambda = (n-1, 1)$ ) et la représentation associée à  $\lambda = (2, 2)$  si  $n = 4$ .

**Preuve.** Il s'agit d'une conséquence de l'indépendance linéaire des polytableoïdes standards (voir la définition 2.48) et des propositions 2.49 et 2.47 si  $n \neq 4$ .

Si  $n = 4$ , il reste à étudier la représentation  $S^{(2,2)}$ . Il s'agit de la représentation irréductible canonique de  $\mathfrak{S}_3$  qu'on étend à  $\mathfrak{S}_4$  via le morphisme surjectif  $\mathfrak{S}_4 \mapsto \mathfrak{S}_3$ . Comme ce morphisme envoie transposition sur transposition, les transpositions agissent sur  $S^{(2,2)}$  comme des réflexions. ■

## CONCLUSION

**Corollaire 2.52 – Hyperplans et représentations.** Soient  $H$  un hyperplan du groupe de réflexions  $\mathfrak{S}_n$  et  $\rho$  une représentation irréductible de  $\mathfrak{S}_n$ .

- (i) L'hyperplan  $H$  est  $\rho$ -excellent si  $\rho$  est la signature, la représentation triviale, la représentation canonique et  $\rho = S^{(2,2)}$ .
- (ii) L'hyperplan  $H$  est  $\rho$ -bon si  $\rho$  est la signature, la représentation triviale, la représentation canonique et  $\rho = S^{(2,2)}$ .
- (iii) L'hyperplan  $H$  est  $(\rho, \mathbf{1})$ -bon si  $\rho$  est la signature, la représentation triviale, la représentation canonique et  $\rho = S^{(2,2)}$ .

- (iv) L'hyperplan  $H$  est  $(\rho, \varepsilon)$ -bon si  $\rho$  est la représentation triviale.
- (v) L'hyperplan  $H$  est  $(\rho, \mathbf{1})$ -acceptable si  $\rho$  est la signature, la représentation triviale, la représentation canonique,  $n \leq 5$  et  $\rho = S^\lambda$  avec  $\lambda = (2, 2, 2)$ ,  $\lambda = (3, 3)$  et  $\lambda = (4, 2)$ .
- (vi) L'hyperplan  $H$  est  $(\rho, \varepsilon)$ -acceptable si  $\rho$  est la signature, la représentation triviale, la représentation canonique et  $\rho = S^{(2,2)}$ .

**Preuve.** Les réflexions de  $\mathfrak{S}_n$  sont les transpositions qui sont conjuguées et d'ordre 2. Les hyperplans sont donc tous conjugués et la remarque 2.5 associée aux corollaires 2.50 et 2.51 donne le résultat. ■

## 2.4 EXEMPLE 2 : LES GROUPES DE RÉFLEXIONS $G(de, e, r)$

Dans cette section, on s'intéresse aux types (au sens de la définition 2.3) des hyperplans du groupe  $G(de, e, r)$ . On commence donc, dans la sous-section 2.4.1 par définir et étudier rapidement les groupes  $G(de, e, r)$ . En particulier, on montre que ce sont bien des groupes de réflexions complexes et on détermine leurs hyperplans (proposition 2.62) et les orbites d'hyperplans sous l'action de  $G(de, e, r)$  (remarque 2.64). Ensuite, dans la sous-section 2.4.2, on étudie les deux classes de conjugaison d'hyperplan de  $G(d, 1, r)$  pour  $r \geq 3$  et  $d \geq 2$ . Enfin, dans la sous-section 2.4.3, on étudie le cas des groupes  $G(de, e, 2)$ .

### 2.4.1 DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Dans cette sous-section, on rappelle quelques propriétés des groupes  $G(de, e, r)$ . On commence par des rappels sur les matrices monomiales et le lien avec le groupe symétrique puis on définit la série infinie  $G(de, e, r)$  et on montre qu'il s'agit de groupes de réflexions complexes. On donne alors quelques propriétés élémentaires de  $G(de, e, r)$  en lien avec l'irréductibilité, la commutativité ou encore les groupes de Coxeter.

**Définition 2.53 — Matrice monomiale.** Soient  $R$  un anneau commutatif unitaire et  $r \in \mathbb{N}$ . Une matrice  $A \in M_r(R)$  est dite *monomiale* si, pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , la  $i^{\text{e}}$  ligne de  $A$  admet exactement un coefficient non nul et, pour tout  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , la  $j^{\text{e}}$  colonne de  $A$  admet exactement un coefficient non nul. On note  $\text{Monom}_r(R)$  l'ensemble des matrices monomiales de  $M_r(R)$ .

Soient  $A \in \text{Monom}_r(R)$  et  $i, j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . On définit  $c_j(A) \in R$  comme le coefficient non nul de la  $j^{\text{e}}$  colonne de  $A$  et  $\ell_i(A) \in R$  comme le coefficient non nul de la  $i^{\text{e}}$  ligne de  $A$ .

Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ , on désigne par  $P_\sigma$  la matrice de permutation associée à  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ .

**Remarque 2.54 — Permutation associée à une matrice monomiale.** Notons  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$  la base canonique de  $R^r$ . Soit  $A \in \text{Monom}_r(R)$ . Il existe un unique entier  $\sigma(j) \in \llbracket 1, r \rrbracket$  tel que  $A\varepsilon_j = c_j(A)\varepsilon_{\sigma(j)}$ . On obtient ainsi  $a_{\sigma(j)j} = c_j(A) \neq 0$ . Comme  $A$  a un seul coefficient non nul sur chaque ligne, l'application  $\sigma$  est injective et donc bijective. On définit ainsi une application

$$\pi: \begin{cases} \text{Monom}_r(R) \longrightarrow \mathfrak{S}_r \\ A \quad \longmapsto \sigma. \end{cases}$$

De plus, une simple opération sur les colonnes assure alors que  $A = P_\sigma \text{diag}(c_1(A), \dots, c_r(A))$

Par ailleurs, soient  $A, B \in \text{Monom}_r(R)$ . On note  $\sigma = \pi(A)$  (resp.  $\sigma' = \pi(B)$ ) la permutation associée à  $A$  (resp.  $B$ ). Pour  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on a  $AB\varepsilon_j = c_j(B)A\varepsilon_{\sigma'(j)} = c_j(B)c_{\sigma'(j)}(A)\varepsilon_{\sigma\sigma'(j)}$ . On en déduit que

$$AB = P_{\sigma\sigma'} \text{diag}(c_1(B)c_{\sigma'(1)}(A), \dots, c_r(B)c_{\sigma'(r)}(A)).$$

est une matrice monomiale et que la permutation associée à  $AB$  est le produit des permutations associées à  $A$  et  $B$ . Comme  $\text{Id}_r$  est une matrice monomiale et que  $\pi(\text{Id}_r) = \text{id}_{\llbracket 1, r \rrbracket}$ , on en déduit que  $\text{Monom}_r(R)$  est un monoïde et que  $\pi$  est un morphisme de monoïdes.

**Remarque 2.55 — Matrice monomiale inversible.** Soient  $R$  un anneau commutatif unitaire,  $r$  un entier naturel et  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq r} \in \text{Monom}_r(R)$ . Montrons que  $A \in \text{GL}_r(R)$  si et seulement si  $c_j(A) \in R^\times$  pour tout  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$  si et seulement si  $\ell_i(A) \in R^\times$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

Le calcul de la remarque 2.54 assure que  $A = P_\sigma \text{diag}(c_1(A), \dots, c_r(A))$ . Ainsi  $\det A = \varepsilon(\sigma)c_1(A) \cdots c_r(A)$  où  $\varepsilon$  désigne la signature. On en déduit que, lorsque  $c_j(A) \neq 0$  pour tout  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$  alors  $\det A$  est inversible si et seulement si  $c_j(A)$  l'est pour tout  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

Finalement,  $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$  si et seulement si  $\det A \in \mathbb{R}^\times$  (voir [BPM, proposition 4.79]) si et seulement si  $c_j(A) \in \mathbb{R}^\times$  pour tout  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

La propriété sur les lignes s'obtient en passant à la transposée. ■

**Lemme 2.56 – Conjugaison par une matrice de permutation.** Soient  $R$  un anneau commutatif unitaire,  $r$  un entier naturel et  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq r} \in M_r(R)$ . Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ , on a  $P_\sigma A P_\sigma^{-1} = (a_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)})_{1 \leq i, j \leq r}$ .

En particulier, si  $A = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_r)$  alors  $P_\sigma A P_\sigma^{-1} = \mathrm{diag}(a_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(r)})$ .

**Preuve.** Pour  $i, j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on a  $(P_\sigma)_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}$  et  $(P_\sigma^{-1})_{ij} = ({}^t P_\sigma)_{ij} = \delta_{j\sigma(i)}$ . On a alors

$$(P_\sigma A P_\sigma^{-1})_{ij} = \sum_{k=1}^r \sum_{\ell=1}^r (P_\sigma)_{ik} a_{k\ell} (P_\sigma^{-1})_{\ell j} = \sum_{k=1}^r \sum_{\ell=1}^r \delta_{i\sigma(k)} a_{k\ell} \delta_{j\sigma(\ell)} = a_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)}.$$

Le cas d'une matrice diagonale tombe aussitôt puisque  $\sigma^{-1}(i) \neq \sigma^{-1}(j)$  si  $i \neq j$ . ■

**Notation 2.57 –  $D(de, e, r)$ .** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$  le groupe des racines  $n^e$  de l'unité. Soient  $d, e, r \in \mathbb{N}^*$ . On note

$$D(de, e, r) = \left\{ A = \mathrm{diag}(\xi_1, \dots, \xi_r) \in M_r(\mathbb{C}), \det^d(A) = (\xi_1 \cdots \xi_r)^d = 1, \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, \xi_j^{de} = 1 \right\}.$$

L'ensemble  $D(de, e, r)$  est évidemment un sous-groupe de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$  isomorphe à  $\mathbb{U}_d^{r-1} \times \mathbb{U}_d$  via les isomorphismes de groupes réciproques l'un de l'autre

$$\varphi: \begin{cases} D(de, e, r) \longrightarrow \mathbb{U}_d^{r-1} \times \mathbb{U}_d \\ \mathrm{diag}(\xi_1, \dots, \xi_r) \longmapsto \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{r-1} \\ \xi_1 \cdots \xi_r \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi: \begin{cases} \mathbb{U}_d^{r-1} \times \mathbb{U}_d \longrightarrow D(de, e, r) \\ \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{r-1} \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \mathrm{diag}(\xi_1, \dots, \xi_{r-1}, y/(\xi_1 \cdots \xi_{r-1})) \end{cases},$$

En particulier,  $D(de, e, r)$  est de cardinal  $(de)^{r-1}d = d^r e^{r-1}$ .

**Proposition-Définition 2.58 – Les groupes  $G(de, e, r)$ .** L'ensemble

$$G(de, e, r) = \{A \in \mathrm{Monom}_r(\mathbb{R}), (c_1(A) \cdots c_r(A))^d = 1, \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, c_j(A)^{de} = 1\}$$

est un sous-groupe de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$  d'ordre  $d^r e^{r-1} r!$  et produit semi-direct de  $\mathfrak{S}_r$  et  $D(de, e, r)$ .

**Preuve.** Il est clair que  $G(de, e, r)$  contient  $\mathfrak{S}_r$  et  $D(de, e, r)$  et est contenu dans  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$  (d'après la remarque 2.55). Par ailleurs, le calcul de la remarque 2.54 montre que tout élément de  $A \in G(de, e, r)$  s'écrit  $A = P_\sigma \mathrm{diag}(c_1(A), \dots, c_r(A))$  avec  $\mathrm{diag}(c_1(A), \dots, c_r(A)) \in D(de, e, r)$ .

De même, en reprenant le calcul de la remarque 2.54, on obtient que pour  $A, B \in G(de, e, r)$ , on a

$$AB = P_{\sigma\sigma'} \mathrm{diag}(c_1(B)c_{\sigma'(1)}(A), \dots, c_r(B)c_{\sigma'(r)}(A))$$

est une matrice monomiale vérifiant  $c_j(AB) = c_j(B)c_{\sigma'(j)}(A) \in \mathbb{U}_{de}$  et

$$c_1(AB) \cdots c_r(AB) = (c_1(A) \cdots c_r(A))(c_1(B) \cdots c_r(B)) \in \mathbb{U}_d$$

Ainsi  $AB \in G(de, e, r)$ . Enfin, si  $A = P_\sigma \mathrm{diag}(c_1(A), \dots, c_r(A)) \in G(de, e, r)$ , on a

$$A^{-1} = \mathrm{diag}^{-1}(c_1(A), \dots, c_r(A))P_{\sigma^{-1}}$$

est un matrice monomiale dont le coefficient non nuls sont des racines  $de^e$  de l'unité et dont le produit des coefficients non nuls est  $(c_1(A) \cdots c_r(A))^{-1} \in \mathbb{U}_d$ . Ainsi  $A^{-1} \in G(de, e, r)$ . Finalement,  $G(de, e, r)$  est bien un sous-groupe de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ .

Par ailleurs, on a vu que  $G(de, e, r) = \mathfrak{S}_r D(de, e, r)$ . De plus, on a évidemment  $\mathfrak{S}_r \cap D(de, e, r) = \{1\}$ . Il reste à montrer que  $D(de, e, r)$  est distingué dans  $G(de, e, r)$  pour conclure. Comme  $D(de, e, r)$  est un sous-groupe de  $G(de, e, r)$  et que  $G(de, e, r) = \mathfrak{S}_r D(de, e, r)$ , il suffit que montrer que  $P_\sigma DP_\sigma^{-1} \in D(de, e, r)$  pour tout  $D \in D(de, e, r)$  ce qui résulte immédiatement du lemme 2.56. ■

**Remarque 2.59 – Structure de produit en couronne sur  $G(d, 1, r)$ .** On a vu dans la proposition-définition 2.58 que  $G(d, 1, r)$  est un produit semi-direct de  $\mathbb{U}_d^r$  par  $\mathfrak{S}_r$ . Le morphisme de  $\mathfrak{S}_r$  dans  $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_d^r)$  associé est :

$$\Psi: \begin{cases} \mathfrak{S}_r \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_d^r) \\ \sigma \longmapsto ((\xi_1, \dots, \xi_r) \mapsto (\xi_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \xi_{\sigma^{-1}(r)})) \end{cases}.$$

Passons au cas du produit en couronne  $\mathbb{U}_d \wr \mathfrak{S}_r$ . On considère  $\mathbb{U}_d$  comme groupe de permutation de lui-même via l'action naturelle par translation et  $\mathfrak{S}_r$  agissant par permutation sur  $\llbracket 1, r \rrbracket$ . La définition du produit en couronne montre que  $\mathbb{U}_d \wr \mathfrak{S}_r$  est isomorphe à  $\mathbb{U}_d^r \rtimes \mathfrak{S}_r$  et que le morphisme de  $\mathfrak{S}_r$  dans  $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_d^r)$  associé est :

$$\Psi_1: \begin{cases} \mathfrak{S}_r \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{U}_d^r) \\ \sigma \longmapsto ((\xi_1, \dots, \xi_r) \mapsto (\xi_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \xi_{\sigma^{-1}(r)})) \end{cases}$$

Les deux produits semi-directs sont donc les mêmes et  $G(d, 1, r) \xrightarrow{\text{gr.}} \mathbb{U}_d \wr \mathfrak{S}_r$ . ■

**Remarque 2.60 — Inclusion entre les  $G(de, e, r)$ .** Soit  $r \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Montrons que  $G(de, e, r) \subset G(d'e', e', r)$  si et seulement si  $de \mid d'e'$  et  $d \mid d'$ .

On suppose que  $G(de, e, r) \subset G(d'e', e', r)$ . Soit  $\xi$  (resp.  $\zeta$ ) une racine  $d^e$  (resp.  $de^e$ ) primitive de l'unité. Comme les éléments  $g = \text{diag}(\xi, 1, \dots, 1)$  et  $h = \text{diag}(\zeta, \zeta^{-1}, 1, \dots, 1)$  sont dans  $G(de, e, r)$ , on a  $\xi^{d'} = 1$  et  $\zeta^{d'e'} = 1$  c'est-à-dire  $d \mid d'$  et  $de \mid d'e'$ .

Réciproquement, si  $de \mid d'e'$  et  $d \mid d'$  alors toute racine  $d^e$  (resp.  $de^e$ ) de l'unité est une racine  $d'e'$  (resp.  $d'e'^e$ ) de l'unité et donc  $G(de, e, r) \subset G(d'e', e', r)$ .

Pour  $r = 1$ , la définition de  $G(de, e, 1)$  montre que  $G(de, e, 1) = G(d, 1, 1) = \mathbb{U}_d$ . On en déduit que  $G(de, e, 1) \subset G(d'e', e', 1)$  si et seulement si  $d \mid d'$ . ■

**Lemme 2.61 — Réduction d'un endomorphisme.** Soient  $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n$ . La matrice

$$A = \begin{bmatrix} & & a_n \\ a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

est diagonalisable, ses valeurs propres sont les  $n$  racines  $n^e$  de  $a_1 \cdots a_n$ . De façon précise, si  $\alpha \in \mathbb{C}$  vérifie  $\alpha^n = a_1 \cdots a_n$  alors  $\alpha$  est valeur propre de  $A$ . De plus, le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\alpha$  est engendrée par le vecteur  $X = (1, a_1/\alpha, a_1 a_2/\alpha^2, \dots, a_1 \cdots a_{n-1}/\alpha^{n-1})$ .

**Preuve.** Les indices sont pris dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et on note  $\xi = \exp(2i\pi/n)$ . Pour commencer, on remarque que  $A^n = a_1 a_2 \cdots a_n \text{Id}_n$ . On en déduit que  $A$  est diagonalisable et que les valeurs propres de  $A$  sont des racines  $n^e$  de  $a = a_1 \cdots a_n$ . Par ailleurs, si  $X = (x_1, \dots, x_n)$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\alpha$  alors

$$Y = (y_1, \dots, y_n) = (x_1, \xi x_2, \dots, \xi^{n-1} x_n)$$

est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\alpha \xi^{-1}$ . En effet, l'égalité matricielle  $AX = \alpha X$  se traduit par  $x_i a_i = \alpha x_{i+1}$  pour  $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ce qui donne  $(AY)_{i+1} = a_i y_i = x_i \xi^{i-1} a_i = \alpha \xi^{i-1} x_{i+1} = \xi^{-1} \alpha y_{i+1}$  pour  $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . On obtient bien  $AY = \alpha \xi^{-1} Y$ . Toutes les racines  $n^e$  de  $a$  sont donc valeurs propres de  $A$ . De plus, elles sont nécessairement simples. Enfin, la résolution du système  $x_i a_i = \alpha x_{i+1}$  pour  $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  montre que l'on peut choisir comme vecteur propre associé à la valeur propre  $\alpha$  le vecteur  $X = (1, a_1/\alpha, a_1 a_2/\alpha^2, \dots, a_1 \cdots a_{n-1}/\alpha^{n-1})$ . ■

**Proposition 2.62 —  $G(de, e, r)$  est un groupe de réflexions.** Pour  $d, e, r \in \mathbb{N}^*$ , le groupe  $G(de, e, r)$  est un groupe de réflexions complexes. Les réflexions de  $G(de, e, r)$  sont les éléments de la forme

$$D_{i,\xi} = \text{diag}(1, \dots, 1, \xi, 1, \dots, 1) \quad \text{avec} \quad i \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad \text{et} \quad \xi \in \mathbb{U}_d \setminus \{1\} \text{ est la } i^{\text{e}} \text{ coordonnée}$$

$$\text{et} \quad T_{i,j,\zeta} = \text{Id}_r - E_{ii} - E_{jj} + \zeta E_{ij} + \zeta^{-1} E_{ji} \quad \text{avec} \quad i < j \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad \text{et} \quad \zeta \in \mathbb{U}_{de},$$

c'est-à-dire

$$T_{i,j,\zeta} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & 0 & & \zeta \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \zeta^{-1} & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots & 1 \end{bmatrix}.$$

En particulier, le nombre de réflexions de  $G(de, e, r)$  est  $\text{der}(r-1)/2 + r(d-1)$ .

On note  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^r$ . L'hyperplan (resp. la droite) de  $D_{i,\xi}$  est donné par l'équation  $x_i = 0$  (resp. engendré par le vecteur  $\varepsilon_i$ ). L'hyperplan (resp. la droite) de  $T_{i,j,\zeta}$  est donné par l'équation  $\zeta x_j - x_i = 0$  (resp. engendré par le vecteur  $\zeta^{-1} \varepsilon_j - \varepsilon_i$ ). La réflexion  $D_{i,\xi}$  est d'ordre égal à l'ordre de  $\xi$  et la réflexion  $T_{i,j,\zeta}$  est d'ordre 2.

**Preuve.** Pour  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  et  $\xi \in \mathbb{U}_d$ , on a  $D_{i,\xi} \in G(de, e, r)$  et est évidemment une réflexion d'ordre égal à l'ordre de  $\xi$ , d'hyperplan  $x_i = 0$  et de droite  $\mathbb{C}\varepsilon_i$ . Pour  $i < j$  et  $\zeta \in \mathbb{U}_{de}$ , on a  $T_{i,j,\zeta} \in G(de, e, r)$  et  $T_{i,j,\zeta}^2 = \text{Id}_r$ . De plus,

$$\text{Ker}(\text{T}_{i,j,\zeta} - \text{Id}_r) = \{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{C}^r, \quad \zeta x_j - x_i = 0\} \quad \text{et} \quad \text{Im}(\text{T}_{i,j,\zeta} - \text{Id}_r) = \mathbb{C}(\zeta^{-1}\varepsilon_j - \varepsilon_i).$$

Ainsi  $\text{T}_{i,j,\zeta}$  est une réflexion d'hyperplan d'équation  $\zeta x_j - x_i = 0$  et de droite  $\mathbb{C}(\zeta^{-1}\varepsilon_j - \varepsilon_i)$ .

Montrons qu'il n'y a pas d'autres réflexions dans  $G(de, e, r)$ . Soient  $\pi : G(de, e, r) \rightarrow \mathfrak{S}_r$  la surjection associée à la structure de produit semi-direct et  $g \in G(de, e, r)$  une réflexion. La décomposition de  $\pi(g) \in \mathfrak{S}_r$  en cycles à support disjoint fournit une famille de sous-espaces de  $\mathbb{C}^r$  stable par  $g$  sur lequel  $g$  agit comme une matrice du type du lemme 2.61. Autrement dit,  $g$  est conjuguée par une matrice de permutation et donc dans  $G(de, e, r)$  à une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_d \end{bmatrix}$$

où  $A_i$  est comme dans le lemme 2.61 et on peut supposer que la taille des matrices  $A_i$  est décroissante. Toujours d'après le lemme 2.61, 1 est valeur propre de multiplicité au plus un de chacun des  $A_i$  donc au plus  $d$  de  $g$ . Comme  $g$  est une réflexion, 1 est valeur propre de multiplicité  $r - 1$ . On en déduit que  $r - 1 \leq d$ . On a donc  $d = r$  ou  $d = r - 1$ .

Si  $d = r$  alors toutes les matrices  $A_i$  sont de taille 1. La conjuguée de  $g$  est donc diagonale et donc dans  $D(de, e, r)$ . Comme  $D(de, e, r)$  est distingué dans  $G(de, e, r)$ , on en déduit que  $g \in D(de, e, r)$ . Comme  $g$  est une réflexion, il existe  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  et  $\xi \in \mathbb{U}_d \setminus \{1\}$  tel que  $g = D_{i,\xi}$ .

Si  $d = r - 1$  alors les matrices  $A_i$  sont de taille 1 et égal à  $\text{Id}_1$  sauf une (la matrice  $A_1$  par décroissance des tailles) qui est de taille 2 et possède 1 comme valeur propre. D'après le lemme 2.61, on en déduit que le produit des coefficients non nuls de cette matrice de taille 2 est 1. Elle est donc de la forme

$$\begin{bmatrix} \zeta^{-1} \\ \zeta \end{bmatrix}$$

avec  $\zeta \in \mathbb{U}_{de}$ . Ainsi  $g$  est conjugué par une matrice de permutation  $P_\sigma$  de la matrice  $\text{diag}(\zeta, \zeta^{-1}, 1, \dots, 1)P_{(1,2)}$ . Or  $P_\sigma P_{(1,2)}P_\sigma^{-1} = P_{(\sigma(1), \sigma(2))}$  et, d'après le lemme 2.56, on a

$$P_\sigma \text{diag}(\zeta, \zeta^{-1}, 1, \dots, 1)P_\sigma^{-1} = \text{diag}(1, \dots, 1, \zeta, 1, \dots, 1, \zeta^{-1}, 1, \dots, 1) \quad (*)$$

où  $\zeta$  est à la place  $\sigma(1)$  et  $\zeta^{-1}$  à la place  $\sigma(2)$ . Ainsi  $g = \text{T}_{\sigma(1), \sigma(2), \zeta}$  si  $\sigma(1) < \sigma(2)$  et  $g = \text{T}_{\sigma(2), \sigma(1), \zeta^{-1}}$  si  $\sigma(2) < \sigma(1)$ . On a bien ainsi toutes les réflexions de  $G(de, e, r)$  qui sont au nombre de  $(d - 1)r + \text{der}(r - 1)/2$ .

Il reste à montrer que  $G(de, e, r)$  est engendré par ses réflexions. Comme  $\mathfrak{S}_r$  est engendré par les transpositions et que les transpositions sont les  $\text{T}_{i,j,1}$  pour  $i < j$ , le sous-groupe de  $G(de, e, r)$  engendré par ses réflexions contient  $\mathfrak{S}_r$ . Par ailleurs, les isomorphismes  $\varphi$  et  $\psi$  de la notation 2.57 montre que  $D(de, e, r)$  est engendré par  $g_i = (1, \dots, 1, \zeta, 1, \dots, 1, \zeta^{-1})$  où  $\zeta$  est une racine  $de^e$  primitive de l'unité à la place  $i$  pour  $i \in \llbracket 1, r - 1 \rrbracket$  et par  $g_r = (1, \dots, 1, \xi)$  où  $\xi$  est une racine  $d^e$  primitive de l'unité. Or  $g_r$  est une réflexion et pour  $i \in \llbracket 1, r - 1 \rrbracket$ , on a  $g_i = \text{T}_{i,r,\zeta} \text{T}_{i,r,1}$ . Ainsi  $G(de, e, r)$  est bien un groupe de réflexion. ■

**Lemme 2.63 – Sous-groupe de  $\mathbb{U}_{de}$ .** Soient  $d, e \in \mathbb{N}^*$ . Le sous-groupe  $\widetilde{\mathbb{U}}$  de  $\mathbb{U}_{de}$  engendré par  $\mathbb{U}_d$  et l'ensemble des carrés de  $\mathbb{U}_{de}$  est  $\mathbb{U}_{de}/\text{pgcd}(e, 2)$ .

**Preuve.** Le sous-groupe de  $\mathbb{U}_{de}$  engendré par les carrés est évidemment engendré par  $\exp(4i\pi/de)$ . Par ailleurs,  $\mathbb{U}_d$  est le sous-groupe engendré par  $\exp(2ei\pi/de)$ . Ainsi  $\widetilde{\mathbb{U}}$  est le sous-groupe engendré par  $\exp(4i\pi/de)$  et  $\exp(2ei\pi/de)$  c'est-à-dire le sous-groupe engendré par  $\exp(\text{pgcd}(2, e)2i\pi/de)$ . Comme  $\text{pgcd}(2, e) \mid de$ , on obtient le résultat. ■

**Remarque 2.64 – Classes de conjugaison d'hyperplans.** Si  $r = 1$  et  $d = 1$ , il n'y a pas de réflexions ni d'hyperplans. Si  $r = 1$  et  $d > 1$  alors le seul hyperplan est  $z = 0$  et tous les éléments autres que l'élément neutre sont des réflexions qui sont seules dans leur classe de conjugaison puisque  $G(de, e, 1)$  est commutatif.

On suppose  $r \geq 3$ . Si  $d = 1$ , il y a une seule classe de conjugaison d'hyperplans et de réflexions. Si  $d > 1$ , il y a deux classes de conjugaison d'hyperplans et  $d$  classes de conjugaison de réflexions.

Commençons par étudier les  $\text{T}_{i,j,\zeta}$  où  $\zeta \in \mathbb{U}_{de}$  et  $i < j$ . Le calcul (\*) de la démonstration de la proposition 2.62 montre que l'orbite  $\text{T}_{1,2,\zeta}$  contient  $\text{T}_{i,j,\zeta}$  pour tout  $i < j$ . Par ailleurs, si  $\zeta' \in \mathbb{U}_{de}$ , on a

$$\text{diag}(1, \zeta'^{-1}, \zeta', 1, \dots, 1) \text{T}_{1,2,\zeta} \text{diag}(1, \zeta', \zeta'^{-1}, 1, \dots, 1) = \text{T}_{1,2,\zeta\zeta'}.$$

Ainsi la classe de conjugaison de  $\text{T}_{1,2,\zeta}$  contient tous les  $\text{T}_{1,2,\zeta'}$  pour  $\zeta' \in \mathbb{U}_{de}$ . Finalement, la classe de conjugaison de  $\text{T}_{1,2,\zeta}$  contient tous les  $\text{T}_{i,j,\zeta'}$  pour  $i < j$  et  $\zeta' \in \mathbb{U}_{de}$ . En particulier, les hyperplans d'équation  $x_i - \zeta x_j = 0$  sont tous conjugués.

Par ailleurs, comme  $D(de, e, r)$  est distingué dans  $G(de, e, r)$ , la classe de conjugaison d'un  $D_{i,\xi}$  est formé d'éléments de cette même forme. On en déduit que la classe de conjugaison de  $\text{T}_{1,2,\zeta}$  ne contient pas d'autres réflexions et donc pas d'autres éléments de  $G(de, e, r)$ . Étudions à présent les réflexions de la forme  $D_{i,\xi}$ . Comme

$D(de, e, r)$  est commutatif,  $D(de, e, r)$  est contenu dans le centralisateur de  $D_{i,\xi}$ . Par ailleurs, le sous-groupe  $\mathfrak{S}_r^{(i)}$  de  $\mathfrak{S}_r$  formé des éléments qui fixent  $i$  est aussi contenu dans le centralisateur de  $D_{i,\xi}$ . Ainsi le centralisateur de  $D_{i,\xi}$  contient au moins  $(r-1)!d^r e^{r-1}$  éléments. Par ailleurs, d'après le lemme 2.56, on a  $P_{(i,j)} D_{i,\xi} P_{(i,j)}^{-1} = D_{j,\xi}$ . Ainsi l'orbite de  $D_{i,\xi}$  contient au moins  $r$  éléments. Finalement, le stabilisateur de  $D_{i,\xi}$  est  $\mathfrak{S}_r^{(i)} D(de, e, r)$  et l'orbite de  $D_{i,\xi}$  est formé des  $D_{j,\xi}$  pour  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . On obtient ainsi  $d-1$  nouvelles classes de conjugaisons de réflexions. De plus, le calcul précédent montre que les hyperplans  $x_i = 0$  de  $D_{i,\xi}$  et  $x_j = 0$  de  $D_{j,\xi}$  sont conjugués (ce sont bien des hyperplans de réflexion si  $d > 1$ ). Enfin, s'il existe  $g \in G(de, e, r)$  tel que  $g \{x_i = 0\} = x_k - \zeta x_\ell$  alors il existe  $\xi \in \mathbb{U}_d$  tel que  $g D_{i,\xi} g^{-1} = T_{k,\ell,\zeta}$  ce qui n'est pas possible. Finalement, on a bien le résultat souhaité.

On suppose  $r = 2$ . On va étudier les classes de conjugaison de  $G(de, e, 2)$  de façon exhaustive. On reprend la notation  $\tilde{\mathbb{U}}$  du lemme 2.63 pour le sous-groupe de  $\mathbb{U}_{de}$  engendré par les carrés de  $\mathbb{U}_{de}$  et  $\mathbb{U}_d$ . On a  $d \text{pgcd}(e, 2)$  classes de conjugaison formée d'une matrice scalaire,  $d(de - \text{pgcd}(e, 2))/2$  classes de conjugaison formées de 2 matrices diagonales non scalaires et  $d^2 e/|\tilde{\mathbb{U}}| = \text{pgcd}(e, 2)d$  classes de conjugaison de matrices non diagonales formées de  $|\tilde{\mathbb{U}}| = de/\text{pgcd}(e, 2)$  matrices.

En particulier, si  $d = 1$  et  $e$  impair, il y a une seule classe de conjugaison d'hyperplans et de réflexions. Si  $d = 1$  et  $e$  pair, il y a deux classes de conjugaison d'hyperplans et de réflexions. Si  $d > 1$  et  $e$  impair, il y a deux classes de conjugaisons d'hyperplans et  $d$  classes de conjugaison de réflexions. Si  $d > 1$  et  $e$  pair, il y a trois classes de conjugaisons d'hyperplans et  $d+1$  classes de conjugaisons de réflexions.

Supposons que  $D \in D(de, e, 2)$  est diagonale. Comme  $D(de, e, 2)$  est commutatif, le centralisateur de  $D$  contient  $D(de, e, r)$  et donc est d'indice au plus 2 dans  $G(de, e, r)$ . Par ailleurs, pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{U}_{de}$  tel que  $\alpha\beta \in \mathbb{U}_d$ , on a

$$\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \\ & \alpha \end{bmatrix}$$

On en déduit que si  $\alpha = \beta$  (c'est-à-dire si  $D$  est scalaire), le centralisateur de  $D$  contient  $P_{(1,2)}$  et donc  $G(de, e, r)$ . On en déduit aussi que si  $\alpha \neq \beta$  (c'est-à-dire si  $D$  est diagonale mais n'est pas scalaire), la classe de conjugaison de  $D$  contient au moins 2 éléments distincts. Finalement, dans ce cas, la classe de conjugaison est formée de 2 éléments et le centralisateur est  $D(de, e, 2)$ . En particulier, comme dans le cas  $r \geq 3$ , la classe de conjugaison de  $D_{i,\xi}$  est formé des  $D_{j,\xi}$  pour  $j \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$  et que le centralisateur de  $D_{i,\xi}$  est  $D(de, e, 2)$ . On obtient ainsi  $d-1$  classes de conjugaison de réflexions et une classe d'hyperplans si  $d > 1$ . Enfin, déterminons les matrices scalaires contenues dans  $G(de, e, 2)$ . Soit  $D = \zeta id$  une telle matrice. Par définition de  $G(de, e, 2)$ , on doit avoir  $\zeta \in \mathbb{U}_{de}$  et  $\zeta^2 \in \mathbb{U}_d$ . On a donc  $\zeta^{de} = 1$  et  $\zeta^{2d} = 1$ . Grâce à l'égalité de Bézout, on en déduit que  $\zeta^{\text{pgcd}(2,e)d} = 1$ . On en a donc bien  $d \text{pgcd}(2, e)$  matrices scalaires dans  $G(de, e, 2)$ .

Supposons que  $T = \text{diag}(\alpha, \beta)P_{(1,2)} \in G(de, e, r)$  n'est pas diagonale. Soit  $\zeta \in \mathbb{U}_{de}$  et  $\xi \in \mathbb{U}_d$ , on a alors

$$\begin{bmatrix} \zeta & \\ & \zeta^{-1}\xi^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \alpha \\ \beta & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta^{-1} & \\ & \zeta\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \alpha\xi^2\xi \\ \beta\xi^{-2}\xi^{-1} & \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \alpha \\ \beta & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \beta \\ \alpha & \end{bmatrix}.$$

Or

$$\begin{bmatrix} & \alpha\xi^2\xi \\ \beta\xi^{-2}\xi^{-1} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \beta \\ \alpha & \end{bmatrix}$$

si et seulement si  $\alpha\xi^2\xi = \beta$ . Or, on a  $\alpha\beta \in \mathbb{U}_d$ , en choisissant  $\xi^{-1} = \alpha\beta$  et  $\zeta = \beta$ , on obtient que la classe de conjugaison de  $T$  est formée de  $|\tilde{\mathbb{U}}|$  éléments. Ainsi, on a  $d^2 e/|\tilde{\mathbb{U}}|$  classes de conjugaison de matrices non diagonales formées de  $|\tilde{\mathbb{U}}|$  matrices. Et de façon plus précise, la classe de conjugaison de  $T = \text{diag}(\alpha, \beta)P_{(1,2)} \in G(de, e, r)$  est formée des  $T' = \text{diag}(\alpha z, \beta z^{-1})P_{(1,2)}$  pour  $z \in \tilde{\mathbb{U}}$ . Finalement, si  $e$  est impair, on a  $d$  classes de conjugaison de matrices non diagonales ; la classe de conjugaison de  $T_{1,2,1}$  est l'ensemble des  $T_{1,2,\zeta}$  pour  $\zeta \in \mathbb{U}_{de}$ . On a ainsi une classe de conjugaison de réflexions formée de matrices non diagonale et donc une seule autre classe d'hyperplans. Si  $e$  est pair, on a  $2d$  classes de conjugaison de matrice non diagonales formés de  $de/2$  éléments ; la classe de conjugaison de  $T_{1,2,1}$  est l'ensemble des  $T_{1,2,\zeta'}$  pour  $\zeta' \in \mathbb{U}_{de/2}$  ; si  $\zeta$  est une racine  $de^e$  primitive de 1, la classe de conjugaison de  $T_{1,2,\zeta}$  est l'ensemble des  $T_{1,2,\zeta'}$  pour  $\zeta' \notin \mathbb{U}_{de/2}$ . On a ainsi deux classes de conjugaison de réflexions (d'ordre 2) formées de matrices non diagonales. Comme les réflexions sont d'ordre 2, on obtient deux classes d'hyperplans. On a ainsi bien les résultats souhaités. ■

**Proposition 2.65 — Le  $G(de, e, r)$ -module  $\mathbb{C}^r$ .** Dans l'action canonique de  $G(de, e, r)$  sur  $\mathbb{C}^r$  l'ensemble des points fixes est

(i)  $\mathbb{C}(1, \dots, 1)$  si  $r = d = 1$  ;

(ii)  $\mathbb{C}(1, \dots, 1)$  si  $r \geq 2$  et  $d = e = 1$  ;

(iii) réduit à 0 sinon.

Le  $G(de, e, r)$ -module  $\mathbb{C}^r$

(i) n'est pas irréductible si  $e = r = 2$  et  $d = 1$  ;

(ii) n'est pas irréductible si  $r \geq 2$  et  $d = e = 1$ .

(iii) est irréductible sinon.

**Preuve.** Comme  $\mathfrak{S}_r \subset G(de, e, r)$ , on a  $(\mathbb{C}^r)^{G(de, e, r)} \subset (\mathbb{C}^r)^{\mathfrak{S}_r}$ . Or pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$  et  $X = (x_1, \dots, x_r)$ , on a

$$\sigma \cdot X = P_\sigma X = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Comme  $\sigma$  agit transitivement sur  $\llbracket 1, r \rrbracket$ , on en déduit que  $(\mathbb{C}^r)^{\mathfrak{S}_r} = \mathbb{C}(1, \dots, 1)$ .

Si  $r = 1$  alors  $G(de, e, 1) = \mathbb{U}_d$  est le groupe cyclique d'ordre  $d$  des racines  $d^e$  de l'unité. Si  $d > 1$  alors  $\mathbb{C}^{\mathbb{U}_d} = \{0\}$ . Si  $d = 1$  alors  $G(e, e, 1) = \{1\}$  et  $\mathbb{C}^{\{1\}} = \mathbb{C}$ .

Si  $r \geq 2$  alors  $G(de, e, r)$  contient l'élément  $g = \text{diag}(\xi, \xi^{-1}, 1, \dots, 1)$  où  $\xi$  est une racine  $d^e$  primitive de l'unité. On a alors  $g((1, \dots, 1)) = (\xi, \xi^{-1}, 1, \dots, 1)$ . Si  $de \neq 1$  alors  $\xi \neq 1$  et  $(1, \dots, 1) \notin (\mathbb{C}^r)^{G(de, e, r)}$ . On en déduit que  $(\mathbb{C}^r)^{G(de, e, r)} = \{0\}$ . Si  $de = 1$  c'est-à-dire  $d = e = 1$  alors  $G(1, 1, r) = \mathfrak{S}_r$  et  $(\mathbb{C}^r)^{\mathfrak{S}_r} = \mathbb{C}(1, \dots, 1)$ .

Passons à l'étude de l'irréductibilité. Si  $r = 1$  alors  $G(de, e, 1)$  agit bien sûr sur  $\mathbb{C}$  de façon irréductible.

On suppose  $r > 1$ . Soit  $V$  un sous- $G(de, e, r)$ -module de  $\mathbb{C}^r$  avec  $V \neq \{0\}$  et  $V \neq \mathbb{C}^r$ . L'espace  $V$  est en particulier stable par les matrices de permutation. On en déduit que  $V = \mathbb{C}(1, \dots, 1)$  ou  $V$  est l'hyperplan  $H$  des vecteurs dont la somme des coordonnées est nulle. De plus, comme tout sous-espace stable par  $G(de, e, r)$  admet un supplémentaire stable par  $G(de, e, r)$ , on en déduit que  $\mathbb{C}(1, \dots, 1)$  est stable par  $G(de, e, r)$  si et seulement si  $H$  l'est. Il suffit donc d'étudier  $\mathbb{C}(1, \dots, 1)$ .

On suppose  $r \geq 3$ . Si  $de \neq 1$ , on considère  $g = \text{diag}(\xi, \xi^{-1}, 1, \dots, 1)$  où  $\xi$  est une racine  $d^e$  primitive de l'unité. On a alors  $g((1, \dots, 1)) = (\xi, \xi^{-1}, 1, \dots, 1) \notin \mathbb{C}(1, \dots, 1)$  puisque  $\xi \neq 1$ . Si  $de = 1$  alors  $G(1, 1, r) = \mathfrak{S}_r$  n'est pas irréductible.

On suppose que  $r = 2$  et on considère  $g = \text{diag}(\xi, \xi^{-1})$  où  $\xi$  est une racine  $d^e$  primitive de l'unité. On a alors  $g((1, 1)) = (\xi, \xi^{-1})$  et donc  $g((1, 1)) \in \mathbb{C}(1, 1)$  si et seulement si  $\xi = \xi^{-1}$  c'est-à-dire si et seulement si  $\xi^2 = 1$  ou encore si et seulement si  $de \mid 2$ .

On en déduit que si  $\mathbb{C}(1, 1)$  est stable par  $G(de, e, 2)$  alors  $de \mid 2$  c'est-à-dire

a) soit  $d = e = 1$  ;

b) soit  $d = 2$  et  $e = 1$  ;

c) soit  $d = 1$  et  $e = 2$ .

Dans le cas b), on a  $\text{diag}(-1, 1) \in G(2, 1, 2)$  et  $g((1, 1)) = (-1, 1) \notin \mathbb{C}(1, 1)$ . Dans le cas a) et c),  $G(de, e, 2)$  a respectivement 2 et 4 éléments et donc est commutatif. Une représentation de dimension 2 ne peut donc être irréductible.

**Lemme 2.66 – Commutant des matrices de permutations.** Soient  $R$  un anneau commutatif unitaire,  $r$  un entier naturel et  $A \in M_r(R)$  telle que  $AP_\sigma = P_\sigma A$  pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ . Il existe  $a, b \in R$  telle que

$$A = A(a, b) = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{bmatrix}.$$

**Preuve.** D'après le lemme 2.56,  $A = (a_{ij})_{i,j}$  commute avec toutes les matrices de permutation si et seulement si  $a_{\sigma(i)\sigma(j)} = a_{ij}$  pour tout  $\sigma$  et tout  $(i, j)$ . Comme  $\mathfrak{S}_r$  est transitif sur  $\llbracket 1, r \rrbracket$  et doublement transitif sur  $\llbracket 1, r \rrbracket$  si  $r \geq 2$ , on en déduit que  $A$  est de la forme souhaitée.  $\blacksquare$

**Proposition 2.67 – Quelques propriétés de commutativité dans les groupes  $G(de, e, r)$ .** Le centre de  $G(de, e, r)$  est

(i)  $G(1, 1, 2) = \mathfrak{S}_2$  si  $d = e = 1$  et  $r = 2$  ;

(ii)  $G(2, 2, 2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \cong^{\text{gr.}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$  si  $d = 1$  et  $e = r = 2$  ;

(iii)  $\mathbb{U}_{d \text{pgcd}(e, r)} \text{Id}_r$  sinon.

Le groupe  $G(de, e, r)$  est

(i) commutatif si  $r = 1$  ;

- (ii) commutatif si  $d = 1$  et  $e = r = 2$  ;
- (iii) commutatif si  $d = e = 1$  et  $r = 2$  ;
- (iv) n'est pas commutatif sinon.

Le groupe  $\text{Hom}_{\text{gr}}(G(de, e, r), \mathbb{C}^\times)$  est isomorphe à

- (i)  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  si  $r = 1$  ;
- (ii)  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  si  $r = 2$  et  $e$  pair ;
- (iii)  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  sinon.

**Preuve.** *Étude du centre : première démonstration.* Soit  $g \in \text{ZG}(de, e, r)$ . En particulier,  $g$  commute avec toutes les matrices de permutations et donc, d'après le lemme 2.66,  $g = A(a, b)$  pour  $a, b \in \mathbb{C}$ . Si  $a \neq 0$  alors comme le nombre de coefficients non nuls dans la matrice  $g$  est  $r$ , on en déduit que  $g$  est scalaire. Si  $a = 0$  alors nécessairement  $b \neq 0$  puisque  $g$  est inversible mais le nombre de coefficient non nuls de  $g$  est  $r(r-1)$ . On a donc  $r(r-1) = r$  c'est-à-dire  $r = 2$ .

Ainsi, si  $r \neq 2$  le centre de  $G(de, e, r)$  est formé de matrices scalaires. On a donc  $g = \zeta \text{id}$  avec  $\zeta \in \mathbb{U}_{de}$  et  $\zeta^{rd} = 1$  ce qui est équivalent à  $g = \zeta \text{id}$  avec  $\zeta^{d\text{pgcd}(e, r)} = 1$ . Ainsi, le centre est  $\mathbb{U}_{d\text{pgcd}(e, r)} \text{Id}_r$  et a pour cardinal  $d\text{pgcd}(e, r)$ .

Si  $r = 2$  alors soit  $g$  est scalaire et donc comme ci-dessus  $g = \zeta \text{id}$  avec  $\zeta \in \mathbb{U}_{d\text{pgcd}(2, e)}$ . Si  $G(de, e, 2)$  a un élément non scalaire dans son centre, on peut écrire avec ce qui précède

$$g = \begin{bmatrix} 0 & \xi \\ \xi & 0 \end{bmatrix}$$

avec  $\xi \in \mathbb{U}_{de}$  et  $\xi^{2d} = 1$ . Comme  $g$  commute avec  $\text{diag}(\zeta, \zeta^{-1}) \in G(de, e, r)$  avec  $\zeta$  racine  $de^e$  primitive de l'unité, on en déduit que  $\xi\zeta = \xi\zeta^{-1}$  et donc  $\zeta^2 = 1$  ce qui signifie que  $de \mid 2$ .

Si  $de = 1$  alors  $d = e = 1$  et  $G(1, 1, 2) = \mathfrak{S}_2$  est commutatif et donc égal à son centre. Si  $de = 2$  alors soit  $d = 2$  et  $e = 1$  soit  $d = 1$  et  $e = 2$ . Dans le premier cas,  $g$  commute avec  $\text{diag}(-1, 1)$  ce qui donne  $-\xi = \xi$  ce qui est absurde donc  $g$  est scalaire. Dans le deuxième cas, on a

$$G(2, 2, 2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Il est donc de cardinal 4 et isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$  puisque tous ses éléments sont d'ordre 2. Finalement, on obtient le résultat souhaité.

*Étude du centre : deuxième démonstration.* Si  $G(de, e, r)$  agit sur  $\mathbb{C}^r$  de façon irréductible alors, d'après le lemme de Schur (voir [SER, proposition 2.2.4]), tout élément  $g \in \text{ZG}(de, e, r)$  est une matrice scalaire. On a donc  $g = \zeta \text{id}$  avec  $\zeta \in \mathbb{U}_{de}$  et  $\zeta^{rd} = 1$  ce qui est équivalent à  $g = \zeta \text{id}$  avec  $\zeta^{d\text{pgcd}(e, r)} = 1$ . Ainsi, le centre est  $\mathbb{U}_{d\text{pgcd}(e, r)} \text{Id}_r$  et a pour cardinal  $d\text{pgcd}(e, r)$ .

D'après la proposition 2.65, il reste à traiter les cas  $de = 1$  et  $r \geq 2$  et  $e = r = 2$  et  $d = 1$ . Dans le premier cas, on a  $G(1, 1, r) = \mathfrak{S}_r$  qui a un centre trivial (et bien égal à  $\mathbb{U}_{d\text{pgcd}(e, r)} \text{Id}_r$ ) sauf si  $r = 2$ . Si  $r = 2$ , on a  $\text{ZG}(1, 1, 2) = G(1, 1, 2)$ . Dans le deuxième cas,  $G(2, 2, 2)$  est commutatif et donc  $\text{ZG}(2, 2, 2) = G(2, 2, 2)$ .

*Étude de la commutativité : première démonstration.* Le groupe  $G(de, e, r)$  est abélien si et seulement si  $\text{ZG}(de, e, r) = G(de, e, r)$ . Pour  $r = 1$ ,  $G(de, e, 1)$  est bien sûr commutatif. Si  $r \neq 1$  alors  $G(de, e, r)$  n'est pas contenu dans le groupe des matrices scalaires. Donc  $G(de, e, r) \neq \text{ZG}(de, e, r)$  sauf si le centre n'est pas constitué uniquement de matrices scalaires c'est-à-dire si  $d = e = 1$  et  $r = 2$  ou  $d = 1$  et  $e = r = 2$ . Dans le premier cas, on a  $\text{ZG}(1, 1, 2) = G(1, 1, 2) = \mathfrak{S}_2$  est commutatif; dans le deuxième cas on a  $\text{ZG}(2, 2, 2) = G(2, 2, 2)$  est commutatif.

*Étude de la commutativité : deuxième démonstration.* Si  $G(de, e, r)$  est commutatif et  $r \geq 2$  alors l'action de  $G(de, e, r)$  sur  $\mathbb{C}^r$  n'est pas irréductible. Par la proposition 2.65, on en déduit que  $e = r = 2$  et  $d = 1$  ou  $de = 1$ . Dans le premier cas, on trouve  $G(2, 2, 2)$  qui est bien commutatif; dans le deuxième cas, on trouve  $\mathfrak{S}_r$  qui n'est pas commutatif sauf si  $r = 2$ .

*Caractères linéaires.* Le théorème de Stanley 1.47 et la remarque 2.64 donnent le résultat. ■

**Notation 2.68 — Polynôme symétrique élémentaire.** Soient  $R$  un anneau commutatif et  $a_1, \dots, a_r \in R^r$ . Pour  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on pose

$$\Sigma_k(a_1, \dots, a_r) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r} a_{i_1} \cdots a_{i_r}$$

le  $k^{\text{e}}$  polynôme symétrique élémentaire en  $a_1, \dots, a_r$ .

**Proposition 2.69 — Degrés pour le groupe  $G(de, e, r)$ .** La famille

$$\mathcal{F} = \left\{ P_r = (X_1 \cdots X_r)^d, P_k = \Sigma_k(X_1^{de}, \dots, X_r^{de}), \quad 1 \leq k \leq r-1 \right\}$$

est une famille d'invariants fondamentaux pour le groupe  $G(de, e, r)$ . Les degrés de  $G(de, e, r)$  sont les entiers  $de, 2de, \dots, (r-1)de, rd$ .

**Preuve.** Les  $P_i$  sont évidemment invariants par  $\mathfrak{S}_r$  et  $D(de, e, r)$ . Par ailleurs, on a  $P_r^e = \Sigma_r(X_1^{de}, \dots, X_r^{de})$ . Comme les  $X_i^{de}$  sont algébriquement indépendants, le théorème de structure sur les polynômes symétriques assure que la famille  $(P_r^e, P_1, \dots, P_{r-1})$  est formée d'éléments algébriquement indépendants. On en déduit que la famille  $(P_1, \dots, P_r)$  est formée d'éléments algébriquement indépendants. Comme le produit des degrés des  $P_i$  est  $|G(de, e, r)|$ , on en déduit (voir le corollaire 1.37) que  $\mathcal{F}$  est une famille d'invariants fondamentaux pour le groupe  $G(de, e, r)$ . Les degrés de  $G(de, e, r)$  sont donc les entiers  $de, 2de, \dots, (r-1)de, rd$ . ■

**Corollaire 2.70 –  $G(de, e, r)$  et groupes de Coxeter.** Le groupe  $G(de, e, r)$

- (i) est un groupe de Coxeter si  $d = 2$  et  $r = 1$  : c'est le groupe  $A_1$  ;
- (ii) est un groupe de Coxeter si  $d = e = 1$  et  $r \geq 2$  : c'est le groupe  $A_{r-1}$  ;
- (iii) est un groupe de Coxeter si  $d = 2$  et  $e = 1$  et  $r \geq 2$  : c'est le groupe  $B_r$  ;
- (iv) est un groupe de Coxeter si  $d = 1$  et  $e = 2$  et  $r \geq 2$  : c'est le groupe  $D_r$  ;
- (v) est un groupe de Coxeter si  $d = 1$  et  $r = 2$  : c'est le groupe  $I_2(e)$  ;
- (vi) n'est pas un groupe de Coxeter sinon.

**Preuve.** Commençons par le cas où  $G(de, e, r)$  est irréductible. D'après la proposition 1.69,  $G(de, e, r)$  est un groupe de Coxeter si et seulement si un de ses degrés est 2.

Si  $r = 1$ , le degré de  $G(de, e, r)$  est  $d$  et donc  $G(de, e, 1)$  est un groupe de Coxeter si et seulement si  $d = 2$ .

Si  $r = 2$ , les degrés sont  $de$  et  $2d$ . Ainsi  $G(de, e, r)$  est de Coxeter si et seulement si  $de = 2$  ou  $d = 1$  (et  $G(de, e, r)$  est irréductible). La proposition 2.65 donne alors que  $G(de, e, r)$  est de Coxeter si et seulement si ( $d = 2$  et  $e = 1$ ) ou ( $d = 1$  et  $e \neq 2$ ).

Si  $r \geq 3$  alors  $rd \geq 3$  et donc  $G(de, e, r)$  est de Coxeter si et seulement si  $de = 1$  ou  $de = 2$ . Toujours avec la proposition 2.65, l'irréductibilité exclut le cas  $de = 1$ .

On suppose à présent que  $G(de, e, r)$  est réductible. Le cas  $de = 1$  et  $r \geq 2$  donne le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_r$  qui est un groupe de Weyl donc de Coxeter. Le cas  $G(2, 2, 2)$  est le groupe  $D_2$ .

Finalement, pour  $r = 2$ , on obtient que  $G(de, e, r)$  est un groupe de Coxeter si et seulement si ( $d = 2$  et  $e = 1$ ) ou  $d = 1$ ; et pour  $r \geq 3$ , le groupe  $G(de, e, r)$  est de Coxeter si et seulement si  $de = 1$  ou  $de = 2$ . ■

## 2.4.2 ÉTUDE DES HYPERPLANS DE $G(d, 1, r)$

L'objectif de cette sous-section est d'étudier les types d'hyperplans du groupe  $G(d, 1, r)$  pour  $d > 1$  et  $r \geq 3$  (le cas  $d = 1$  ayant été traité dans la section 2.3, le cas  $r \leq 2$  sera traité dans la sous-section 2.4.3). Il s'agit donc d'étudier les représentations irréductibles du groupe  $G(d, 1, r)$ . Pour les déterminer, on suit pas à pas la méthode des petits groupes de Wigner et Mackey exposée dans [SER, paragraphe 8.2]. Pour conclure, dans le cas des hyperplans d'ordre 2, cette méthode nécessite l'introduction d'un outil combinatoire : les  $(\lambda, \mu)$ -matrices (voir la définition 2.71). C'est cet outil que nous commençons par étudier avant de nous lancer à proprement parler dans la méthode de Wigner et Mackey.

### UN OUTIL COMBINATOIRE

**Définition 2.71 –  $(\lambda, \mu)$ -matrices.** Soient  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$  et  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{s'})$  deux partitions de  $r$ . On dit que  $M = (m_{ij})_{i,j} \in M_r(\{0, 1\})$  est une  $(\lambda, \mu)$ -matrice si

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^r m_{ij} = \lambda_i \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \sum_{i=1}^r m_{ij} = \mu_j.$$

Autrement dit, on veut que le nombre de 1 dans la  $i^e$  ligne est  $\lambda_i$  et le nombre de 1 dans la  $j^e$  colonne est  $\mu_j$ .

**Proposition 2.72** Soit  $\lambda = (2, 1, \dots, 1)$  de longueur  $r$ . Le nombre de  $(\lambda, \mu)$ -matrice est supérieur ou égal à 4 si et seulement si  $\mu \notin \{(r), (r-1, 1), (3, 2), (2, 2), (1, 1, 1)\}$ .

**Preuve.** Soit  $\mu$  tel que le nombre de  $(\lambda, \mu)$ -matrices soit inférieur ou égal à 3. Montrons pour commencer que  $\mu_4 = 0$ . Si  $\mu_4 \geq 1$  alors on peut compléter les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

en  $(\lambda, \mu)$ -matrice en mettant sur la première colonne des 1 sur les lignes de 4 à  $\mu_1 + 2$  puis sur la deuxième colonne des 1 sur les lignes de  $\mu_1 + 3$  à  $\mu_1 + \mu_2 + 1$  puis sur la troisième colonne des 1 sur les lignes de  $\mu_1 + \mu_2 + 2$  à  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$  puis sur la quatrième colonne des 1 sur les lignes de  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + 1$  à  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 - 1$  puis pour la colonne  $j$  pour  $j \geq 5$  en mettant des 1 sur les lignes de  $\mu_1 + \dots + \mu_{j-1}$  à  $\mu_1 + \dots + \mu_j - 1$ .

Montrons à présent que  $\mu_3 \leq 1$ . Si  $\mu_3 \geq 2$  alors  $\mu_2 \geq 2$  et on peut compléter les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

en  $(\lambda, \mu)$ -matrice en mettant sur la première colonne des 1 sur les lignes de 5 à  $\mu_1 + 3$  puis sur la deuxième colonne des 1 sur les lignes de  $\mu_1 + 4$  à  $\mu_1 + \mu_2 + 1$  puis sur la troisième colonne des 1 sur les lignes  $\mu_1 + \mu_2 + 2$  à  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - 1 = r - 1$  (puisque  $\mu_4 = 0$ ).

On suppose que  $\mu_3 = 1$ . Montrons que  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . Si  $\mu_1 \geq 2$  alors on peut compléter les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

en  $(\lambda, \mu)$ -matrice en mettant sur la première colonne des 1 sur les lignes de 4 à  $\mu_1 + 1$  puis sur la deuxième colonne des 1 sur les lignes de  $\mu_1 + 2$  à  $\mu_1 + \mu_2 = r - 1$  (puisque  $\mu_3 = 1$  et  $\mu_4 = 0$ ). Ainsi si  $\mu_3 = 1$ , on a  $\mu = (1, 1, 1)$ .

On suppose à présent que  $\mu_3 = 0$ . Montrons que  $\mu_2 \leq 2$ . Si  $\mu_2 \geq 3$  alors  $\mu_1 \geq 3$  et on peut compléter les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \end{bmatrix}$$

en  $(\lambda, \mu)$ -matrice en mettant sur la première colonne des 1 sur les lignes de 6 à  $\mu_1 + 2$  puis sur la deuxième colonne des 1 sur les lignes de  $\mu_1 + 3$  à  $\mu_1 + \mu_2 - 1 = r - 1$  (puisque  $\mu_3 = 0$ ).

On suppose à présent que  $\mu_2 = 2$ . Montrons que  $\mu_1 \leq 3$ . Si  $\mu_1 \geq 4$  alors on peut compléter les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \end{bmatrix}$$

en  $(\lambda, \mu)$ -matrice en mettant sur la première colonne des 1 sur les lignes de 6 à  $\mu_1 + 1 = r - 1$ .

Intéressons-nous à présent à la réciproque. Si  $\mu = (1, 1, 1)$ , il y a trois  $((2, 1), (1, 1, 1))$ -matrices :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Si  $\mu = (3, 2)$ , il y a trois  $((2, 1, 1, 1), (3, 2))$ -matrices :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & & & \\ 1 & & & \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Si  $\mu = (2, 2)$ , il y a deux  $((2, 1, 1), (2, 2))$ -matrices :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

Si  $\mu = (n-1, 1)$ , il y a une seule  $(\lambda, \mu)$ -matrice (pour  $\lambda = (2, 1, \dots, 1)$ ).

Si  $\mu = (n)$ , il y a pas de  $(\lambda, \mu)$ -matrice (avec  $\lambda = (2, 1, \dots, 1)$ ) puisque la première colonne ne peut pas contenir tous les 1 (car il y en a deux sur la première ligne).  $\blacksquare$

### REPRÉSENTATION DU GROUPE $G(d, 1, r)$

On applique la méthode de Wigner et Mackey pour la décomposition de  $G(d, 1, r)$  en produit semi-direct donnée par  $D(d, 1, r) \rtimes \mathfrak{S}_r$ . Il s'agit donc dans un premier temps de déterminer les orbites, sous l'action de  $\mathfrak{S}_r$ , de  $\widehat{D(d, 1, r)} = \text{Hom}_{\text{gr}}(D(d, 1, r), \mathbb{C}^\times)$  et les stabilisateurs correspondants : c'est la proposition 2.75. La construction des représentations irréductibles en découle alors immédiatement (proposition 2.76).

**Proposition-Définition 2.73 – Action du groupe symétrique.** Soit  $X = \{x_1, \dots, x_d\}$  un ensemble à  $d$  éléments. Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_r$  agit sur  $X^r$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathfrak{S}_r \times X^r & \longrightarrow X^r \\ (\sigma, y_1, \dots, y_r) \longmapsto (y_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, y_{\sigma^{-1}(r)}). \end{cases}$$

On note  $I_r(d) = \{(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d, n_1 + \dots + n_d = r\}$ . Pour  $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , on définit

$$c_j: \begin{cases} X^r & \longrightarrow \mathbb{N} \\ (y_1, \dots, y_r) \longmapsto |\{i \in \llbracket 1, r \rrbracket, y_i = x_j\}|. \end{cases}$$

Ainsi  $c_j(y_1, \dots, y_r)$  est le nombre de fois que  $x_j$  apparaît dans la liste  $(y_1, \dots, y_r)$ . La fonction  $c_j$  est constante sur chacune des orbites de  $X^r$  sous  $\mathfrak{S}_r$  et définit donc une application (encore notée  $c_j$ ) de  $X/\mathfrak{S}_r$  dans  $\mathbb{N}$ .

L'application produit

$$c: \begin{cases} X^r/\mathfrak{S}_r & \longrightarrow I_r(d) \\ x & \longmapsto (c_1(x), \dots, c_d(x)) \end{cases}$$

est alors une bijection.

**Preuve.** On a  $\text{id} \cdot (y_1, \dots, y_r) = (y_1, \dots, y_r)$  et si  $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_r$  et  $(y_1, \dots, y_r) \in X^r$  alors

$$\sigma' \cdot (\sigma \cdot (y_1, \dots, y_r)) = \sigma'(y_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, y_{\sigma^{-1}(r)}).$$

En posant  $z_i = y_{\sigma^{-1}(i)}$ , on obtient

$$\sigma'(y_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, y_{\sigma^{-1}(r)}) = (y_{\sigma^{-1}\sigma'^{-1}(1)}, \dots, y_{\sigma^{-1}\sigma'^{-1}(r)}) = \sigma'\sigma \cdot (y_1, \dots, y_r).$$

Ainsi, on a bien défini une action de  $\mathfrak{S}_r$  (voir aussi la remarque 2.59).

Deux éléments d'une même orbite diffèrent seulement d'une permutation : le nombre d'éléments égaux à  $x_j$  dans chacun des deux  $r$ -uplets est donc le même.

L'application  $c$  est bien à valeurs dans  $I_r(d)$ . Elle est surjective : si  $(n_1, \dots, n_d) \in I_r(d)$  alors

$$t = (\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n_1}, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{n_2}, \dots, \underbrace{x_d, \dots, x_d}_{n_d}) \in X^r$$

vérifie  $c(t) = (n_1, \dots, n_d)$ . Par ailleurs, par  $r$ -transitivité de l'action de  $\mathfrak{S}_r$  sur  $\llbracket 1, r \rrbracket$ , l'orbite de  $y = (y_1, \dots, y_r)$  contient un élément de la forme  $t = (x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_2, \dots, x_d, \dots, x_d)$ . Comme les  $c_j$  sont constantes sur les orbites, le nombre de  $x_j$  apparaissant dans  $t$  est  $c_j(y)$ . Ainsi si  $c(y) = c(z) = (n_1, \dots, n_d)$  avec  $y, z \in X^r$  alors  $y$  et  $z$  sont dans l'orbite de

$$(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n_1}, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{n_2}, \dots, \underbrace{x_d, \dots, x_d}_{n_d}) \in X^r$$

et donc  $y$  et  $z$  sont dans la même orbite.  $\blacksquare$

**Notation 2.74 – Sous-groupe de  $\mathfrak{S}_r$ .** Soient  $r, d \in \mathbb{N}$  et  $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in I_r(d)$ . On pose

$$\mathfrak{S}_{\underline{n}} = \mathfrak{S}_{\{1, \dots, n_1\}} \times \mathfrak{S}_{\{n_1+1, \dots, n_1+n_2\}} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\{n_1+\dots+n_{d-1}+1, \dots, n_1+\dots+n_d\}}.$$

**Proposition 2.75 – Représentation linéaire du groupe  $D(d, 1, r)$ .** L'application

$$\Delta: \begin{cases} (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^r & \longrightarrow \widehat{D(d, 1, r)} = \text{Hom}_{\text{gr}}(D(d, 1, r), \mathbb{C}^\times) \\ (k_1, \dots, k_r) \longmapsto (\text{diag}(y_1, \dots, y_r) \mapsto y_1^{k_1} \cdots y_r^{k_r}) \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes  $\mathfrak{S}_r$ -équivariant.

Pour  $\underline{r} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{I}_r(d)$ , on définit

$$\chi_{\underline{r}}(\text{diag}(y_1, \dots, y_r)) = y_1^0 \cdots y_{n_1}^0 y_{n_1+1} \cdots y_{n_1+n_2} \cdots y_{n_1+\cdots+n_{d-1}+1}^{-(d-1)} \cdots y_{n_1+\cdots+n_d}^{-(d-1)}.$$

La famille  $(\chi_{\underline{r}})_{\underline{r} \in \mathbf{I}_r(d)}$  est une famille de représentant des orbites de  $\widehat{G(d, 1, r)}$  sous  $\mathfrak{S}_r$ . Le groupe d'isotropie de  $\chi_{\underline{r}}$  est  $\mathfrak{S}_r$ .

**Preuve.** La théorie des caractères des groupes abéliens finis assure que l'application  $\Delta$  est un isomorphisme de groupes.

Par ailleurs, le groupe  $\mathfrak{S}_r$  agit sur  $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^r$  (voir la proposition-définition 2.73). De même le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_r$  agit sur  $D(d, 1, r)$  par conjugaison par les matrices de permutation : pour  $\text{diag}(y_1, \dots, y_r) \in D(d, 1, r)$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ , on a

$$\sigma \cdot \text{diag}(y_1, \dots, y_r) = P_\sigma \text{diag}(y_1, \dots, y_r) P_\sigma^{-1} = \text{diag}(y_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, y_{\sigma^{-1}(r)}).$$

Comme la conjugaison par  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$  ne définit pas seulement une bijection mais un automorphisme de  $D(d, 1, r)$ , on en déduit que  $\mathfrak{S}_r$  agit sur  $\widehat{D(d, 1, r)}$  : pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ ,  $x \in D(d, 1, r)$  et  $\chi \in \widehat{D(d, 1, r)}$ , on a

$$(\sigma \cdot \chi)(x) = \chi(\sigma^{-1} \cdot x) = \chi(P_\sigma^{-1} x P_\sigma).$$

L'application  $\Delta$  est alors  $\mathfrak{S}_r$ -équivariante pour ces actions de  $\mathfrak{S}_r$  : on a

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma(k_1, \dots, k_r))(\text{diag}(y_1, \dots, y_r)) &= y_1^{k_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots y_r^{k_{\sigma^{-1}(r)}} = y_{\sigma(1)}^{k_1} \cdots y_{\sigma(r)}^{k_r} \\ &= \Delta(k_1, \dots, k_r)(\text{diag}(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)})) \\ &= \Delta(k_1, \dots, k_r)(P_\sigma^{-1} \text{diag}(y_1, \dots, y_r) P_\sigma) \\ &= (\sigma \cdot \Delta(k_1, \dots, k_r))(\text{diag}(y_1, \dots, y_r)). \end{aligned}$$

La proposition-définition 2.73 et la  $\mathfrak{S}_r$ -équivariance de  $\Delta$  montre que  $(\chi_{\underline{r}})_{\underline{r} \in \mathbf{I}_r(d)}$  est une famille de représentants des orbites de  $\widehat{G(d, 1, r)}$  sous  $\mathfrak{S}_r$ .

Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ . On a  $\sigma \chi_{\underline{r}} = \chi_{\underline{r}}$  si et seulement si pour tout  $(y_1, \dots, y_r) \in \mathbb{U}_d^r$ , on a

$$y_{\sigma(1)}^0 \cdots y_{\sigma(n_1)}^0 \cdots y_{\sigma(n_1+\cdots+n_{d-1}+1)} \cdots y_{\sigma(n_1+\cdots+n_d)} = y_1^0 \cdots y_{n_1}^0 \cdots y_{n_1+\cdots+n_{d-1}+1} \cdots y_{n_1+\cdots+n_d}.$$

En faisant  $y_k = \exp(2i\pi/d)$  et  $y_j = 1$  si  $j \neq k$ , on obtient que si  $k \in [n_1 + \cdots + n_\ell + 1, n_1 + \cdots + n_{\ell+1}]$  alors  $\sigma^{-1}(k) \in [n_1 + \cdots + n_\ell + 1, n_1 + \cdots + n_{\ell+1}]$ . Ainsi  $\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_{\underline{r}}$  et donc  $\sigma$  aussi. ■

**Proposition 2.76 — Représentations irréductibles de  $G(d, 1, r)$ .** Soit  $\underline{r} \in \mathbf{I}_r(d)$ . On prolonge le caractère  $\chi_{\underline{r}}$  de  $D(d, 1, r)$  en un caractère (encore noté  $\chi_{\underline{r}}$ ) de  $D(d, 1, r)\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  en posant pour  $D \in D(d, 1, r)$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{r}}$

$$\chi_{\underline{r}}(DP_\sigma) = \chi_{\underline{r}}(D).$$

On choisit ensuite une représentation irréductible  $\rho$  de  $\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  qu'on prolonge en une représentation irréductible (notée  $\tilde{\rho}$ ) de  $D(d, 1, r)\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  en posant pour  $D \in D(d, 1, r)$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{r}}$

$$\tilde{\rho}(DP_\sigma) = \rho(P_\sigma).$$

On pose alors  $\beta_{\underline{r}, \rho} = \text{Ind}_{D(d, 1, r)\mathfrak{S}_{\underline{r}}}^{G(d, 1, r)}(\chi_{\underline{r}} \otimes \tilde{\rho})$ . La famille  $(\beta_{\underline{r}, \rho})_{\underline{r} \in \mathbf{I}_r(d), \rho \in \text{Irr}(\mathfrak{S}_{\underline{r}})}$  est une famille de représentants des représentations irréductibles de  $G(d, 1, r)$

**Preuve.** Il s'agit exactement de la méthode de Wigner et Mackey (voir [SER, proposition 25]). ■

**Notation 2.77** Pour simplifier les notations, on pose  $G = G(d, 1, r)$  et  $D = D(d, 1, r)$ . Comme  $r \geq 3$ , il y a deux classes de conjugaison d'hyperplans dans  $G$  donnée respectivement par  $H_1 = \{x_1 - x_2 = 0\}$  et  $H_2 = \{x_1 = 0\}$  (voir la remarque 2.64). Le groupe  $G_1 := G_{H_1}$  des éléments de  $G$  qui fixent  $H_1$  point par point est le groupe engendré par la matrice  $P_{(1,2)}$  et le groupe  $G_2 := G_{H_2}$  est le groupe engendré par  $\text{diag}(\exp(2i\pi/d), 1, \dots, 1)$ . ■

## ÉTUDE DE $H_1$

On étudie ici l'hyperplan  $H_1$ . La détermination des types de  $H_1$  (corollaire 2.81) résulte alors principalement de la proposition 2.72.

**Lemme 2.78 — Double classe.** Soit  $\underline{r} \in \mathbf{I}_r(d)$ . L'application quotient  $\pi : G \rightarrow \mathfrak{S}_r$  induit une bijection entre les ensembles quotients  $G_1 \backslash G / D\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  et  $\mathfrak{S}_\lambda \backslash \mathfrak{S}_r / \mathfrak{S}_{\underline{r}}$  où  $\lambda = (2, 1, \dots, 1) \in \mathbf{I}_r(r-1)$ . En particulier, si  $S$  une famille de représentants des double-classes  $\mathfrak{S}_\lambda \backslash \mathfrak{S}_r / \mathfrak{S}_{\underline{r}}$  alors  $S$  est aussi une famille de représentants des double-classes de  $G_1 \backslash G / D\mathfrak{S}_{\underline{r}}$ . La bijection induite par  $\pi$  envoie bijectivement

$$c = \{s \in S, \quad sD\mathfrak{S}_{\underline{r}}s^{-1} \cap G_1 = \{1\}\} \quad \text{sur} \quad c' = \{s \in S, \quad \mathfrak{S}_\lambda \cap s\mathfrak{S}_{\underline{r}}s^{-1} = \{1\}\}.$$

**Preuve.** Commençons par montrer que l'application  $\pi$  induit une bijection (encore notée  $\pi$ ) entre  $G/D\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  et  $\mathfrak{S}_r/\mathfrak{S}_{\underline{r}}$ . Soient  $x = P_\sigma D_1, y = P_{\sigma'} D_2 \in G$  avec  $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_r$  et  $D_1, D_2 \in D$ . Par définition,  $x$  et  $y$  sont dans la même classe modulo  $D\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  si et seulement si

$$\exists z = D'' P_{\sigma''} \in D\mathfrak{S}_{\underline{r}} \quad \text{avec} \quad D'' \in D \quad \text{et} \quad \sigma'' \in \mathfrak{S}_{\underline{r}}, \quad P_\sigma D = P_{\sigma'} D' z.$$

Or

$$P_\sigma D = P_{\sigma'} D' D'' P_{\sigma''} = P_{\sigma'} P_{\sigma''} P_{\sigma''}^{-1} D' D'' P_{\sigma''}.$$

Comme  $G$  est extension de  $\mathfrak{S}_r$  par  $D$ , on en déduit que  $P_\sigma = \pi(x) = P_{\sigma'} P_{\sigma''} = \pi(y) \pi(z)$  avec  $\pi(z) \in \mathfrak{S}_{\underline{r}}$ .

Réciproquement, si  $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_r$  sont dans la même classe modulo  $\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  alors  $P_\sigma$  et  $P_{\sigma'}$  sont évidemment dans la même classe modulo  $D\mathfrak{S}_{\underline{r}}$ .

Le groupe  $(\text{id}, (1, 2))$  agit par translation à gauche sur  $G/D\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  et  $\mathfrak{S}_r/\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  et l'application  $\pi$  est équivariante pour cette action. On en déduit la bijection souhaitée.

Soit  $s \in c$ . On a alors  $\mathfrak{S}_\lambda \cap s\mathfrak{S}_{\underline{r}} s^{-1} \subset sD\mathfrak{S}_{\underline{r}} s^{-1} \cap G_1 = \{1\}$  et donc  $s \in c'$ . Réciproquement, soit  $s \in c'$ . Comme  $G_1 \subset \mathfrak{S}_r$ , on a

$$G_1 \cap sD\mathfrak{S}_{\underline{r}} s^{-1} = G_1 \cap s\mathfrak{S}_{\underline{r}} s^{-1} = \{1\}.$$

**Lemme 2.79 – Induction depuis le sous-groupe trivial.** Soit  $K$  un groupe fini et  $R$  un anneau commutatif unitaire. On désigne par  $\mathbf{1}$  la représentation triviale (sur  $R$ ) du sous-groupe trivial  $\mathbf{1}$  de  $K$ . On a  $\text{Ind}_1^K(\mathbf{1}) = RK$ .

**Preuve.** En effet, soit  $K'$  un sous-groupe de  $K$  et  $\mathbf{1}$  la représentation triviale de  $K'$  sur le corps  $k$ . Alors  $\text{Ind}_{K'}^K(\mathbf{1})$  est la représentation par permutation de l'action de  $K$  sur  $K/K'$  (voir [SER, exemple 2, p.42]). On obtient le résultat voulu avec  $K' = \{1\}$ . ■

**Proposition 2.80 – Représentations acceptables.** Soient  $d \geq 2$  et  $r \geq 3$ . Les représentations irréductibles de  $G(d, 1, r)$  pour lesquelles la multiplicité de la valeur propre  $-1$  d'une réflexion non diagonale est inférieure ou égale à  $3$  sont les  $\beta_{\underline{r}, \rho}$  avec

- (i)  $\underline{r} = (0, \dots, 0, r, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$ ,  $\rho = \varepsilon$ ,  $\rho$  est la représentation standard ou  $\rho$  quelconque si  $r \leq 5$  ou  $\rho \in \{(3, 3), (2, 2, 2), (4, 2)\}$  si  $r = 6$ .
- (ii)  $\underline{r} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, r-1, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$  ou  $\rho = \varepsilon$  si  $r \in \{3, 4\}$  ou  $\rho$  est la représentation standard si  $r = 3$ .
- (iii)  $\underline{r} = (0, \dots, 0, r-1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$  ou  $\rho = \varepsilon$  si  $r \in \{3, 4\}$  ou  $\rho$  est la représentation standard si  $r = 3$ .
- (iv)  $\underline{r} = (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0, 3, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$ .
- (v)  $\underline{r} = (0, \dots, 0, 3, 0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$ .
- (vi)  $\underline{r} = (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$  ou  $\rho = \varepsilon \otimes \mathbf{1}$  ou  $\rho = \mathbf{1} \otimes \varepsilon$ .
- (vii)  $\underline{r} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$ .

Les représentations irréductibles de  $G(d, 1, r)$  pour lesquelles la multiplicité de la valeur propre  $-1$  d'une réflexion non diagonale est inférieure ou égale à  $1$  sont les  $\beta_{\underline{r}, \rho}$  avec

- (i)  $\underline{r} = (0, \dots, 0, r, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$ ,  $\rho = \varepsilon$ ,  $\rho$  est la représentation standard ou  $\rho = (2, 2)$  si  $r = 4$ .
- (ii)  $\underline{r} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, r-1, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$ .
- (iii)  $\underline{r} = (0, \dots, 0, r-1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$ .

Les représentations irréductibles de  $G(d, 1, r)$  pour lesquelles les réflexions non diagonales agissent trivialement sont les  $\beta_{\underline{r}, \rho}$  avec  $\underline{r} = (0, \dots, 0, r, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$ .

**Preuve.** Soient  $\underline{r} = (n_0, \dots, n_{d-1}) \in I_r(d)$ ,  $\rho$  une représentation irréductible de  $\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  et  $S$  une famille de représentants de  $G_1 \backslash G/D\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  formé de matrices de permutations (voir le lemme 2.78). En appliquant la proposition 22 de [SER], on obtient que

$$\text{Res}_{G_1}^G(\beta_{\underline{r}, \rho}) = \bigoplus_{s \in S} \text{Ind}_{T_s}^{G_1}((\chi_{\underline{r}} \otimes \tilde{\rho})_s) \quad (*)$$

où  $T_s = sD\mathfrak{S}_{\underline{r}} s^{-1} \cap G_1$  et  $(\chi_{\underline{r}} \otimes \tilde{\rho})_s$  désigne la représentation de  $T_s$  donnée par

$$(\chi_{\underline{r}} \otimes \tilde{\rho})_s(x) = (\chi_{\underline{r}} \otimes \tilde{\rho})(s^{-1}xs)$$

pour tout  $x \in T_s$ .

On désigne par  $m$  la multiplicité de la valeur propre  $-1$  de  $\beta_{\underline{r}, \rho}(P_{(1,2)})$ . Les lemmes 2.79 et 2.78 et l'égalité  $(*)$  montrent alors que

$$m \geq |\{s \in S, T_s = \{1\}\}| = |\{s \in S, \mathfrak{S}_\lambda \cap s\mathfrak{S}_{\underline{r}}s^{-1} = \{1\}\}|.$$

Or, d'après [K-J, corollaire 1.3.13],  $|\{s \in S, \mathfrak{S}_\lambda \cap s\mathfrak{S}_{\underline{r}}s^{-1} = \{1\}\}|$  est égal au nombre de  $(\lambda, \underline{r})$ -matrices où  $\underline{r}$  est la partition de  $r$  associée à la suite  $\underline{r}$  qui n'est pas forcément rangée de façon décroissante.

La proposition 2.72 montre que  $\underline{r} \in \{(r), (r-1, 1), (3, 2), (2, 2), (1, 1, 1)\}$ .

- (i) Étude du cas  $\underline{r} = \{(r)\}$ . On a  $\mathfrak{S}_r = \mathfrak{S}_r$ ,  $\rho$  est une représentation irréductible de  $\mathfrak{S}_r$  et  $\beta_{\chi_{\underline{r}}, \rho} = \chi_{\underline{r}} \otimes \rho$ . On en déduit que  $\beta_{\chi_{\underline{r}}, \rho}((1, 2)) = \rho(1, 2)$ . Ainsi, d'après le corollaire 2.50,  $\rho$  est la représentation canonique, la signature, la représentation triviale, ou  $r \leq 5$  ou  $r = 6$  et  $\rho = (3, 3)$  ou  $(2, 2, 2)$  ou  $(4, 2)$ .
- (ii) Étude du cas  $\underline{r} = \{(r-1, 1)\}$ . Il existe donc  $i \neq j$  tel que  $n_i = 1, n_j = r-1$  et  $n_k = 0$  si  $k \neq i, j$ . Si  $i < j$  alors  $\chi_{\underline{r}}(\text{diag}(y_1, \dots, y_r)) = y_1^{-i}(y_2 \cdots y_r)^{-j}$  et  $\mathfrak{S}_{\underline{r}} = \mathfrak{S}_{\{2, \dots, r\}}$ . Dans le cas, les classes à droite  $\mathfrak{S}_r / \mathfrak{S}_{\{2, \dots, r\}}$  sont les  $T_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_r, \sigma(1) = i\}$  pour  $i \in [1, r]$  et les double-classes  $\mathfrak{S}_\lambda \backslash \mathfrak{S}_r / \mathfrak{S}_{\{2, \dots, r\}}$  sont les  $T_i$  pour  $i \in [3, r]$  et  $T_1 \sqcup T_2$ . Une famille de représentants des double-classes est  $S = (1, (1, i))_{3 \leq i \leq r}$ . En calculant  $s\mathfrak{S}_{\underline{r}}s^{-1}$ , on obtient que 1 est la seule double classe pour laquelle  $T_s = 1$ . On considère alors une représentation  $\rho$  de  $\mathfrak{S}_{\{2, \dots, r\}}$  (et aussi  $\rho$  la représentation correspondante de  $\mathfrak{S}_{r-1}$ ). Pour  $3 \leq i \leq r$ , on a  $(1, i)(1, 2)(1, i) = (2, i)$ . Comme  $\chi_{\underline{r}}((2, i)) = 1$ , l'égalité  $(*)$  donne

$$\text{Res}_{G_1}^G(\beta_{\underline{r}, \rho}) = (\mathbb{C}G_1)^{\dim \rho} \oplus \rho^{r-2}.$$

On en déduit que  $m = \dim \rho + (r-2)\alpha \leq 3$  où  $\alpha$  est la multiplicité de  $-1$  comme valeur propre de  $(1, 2)$  dans  $\rho$ . Le cas où  $\rho$  est la représentation triviale convient (puisque alors  $\alpha = 0$ ). Si  $\rho = \varepsilon$  alors  $\alpha = 1$  et  $r-2 \leq 2$  c'est-à-dire  $r \in \{3, 4\}$ . Le cas  $\dim \rho \geq 3$  puisque  $\alpha \geq 1$  (si les réflexions agissent trivialement,  $\rho$  est la représentation triviale) et  $r-2 \geq 1$ . Il reste le cas  $\dim \rho = 2$ , on a alors  $\alpha = 1$  et  $r = 3$  c'est-à-dire  $\rho$  est la représentation standard.

Si  $i > j$  alors  $\chi_{\underline{r}}(\text{diag}(y_1, \dots, y_r)) = (y_1 \cdots y_{r-1})^{-i}y_r^{-j}$  et  $\mathfrak{S}_{\underline{r}} = \mathfrak{S}_{\{1, \dots, r-1\}}$ . Dans le cas, les classes à droite  $\mathfrak{S}_r / \mathfrak{S}_{r-1}$  sont les  $T_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_r, \sigma(r) = i\}$  pour  $i \in [1, r]$  et les double-classes  $\mathfrak{S}_\lambda \backslash \mathfrak{S}_r / \mathfrak{S}_{r-1}$  sont les  $T_i$  pour  $i \in [3, r]$  et  $T_1 \sqcup T_2$ . Une famille de représentants des double-classes est  $S = (1, (i, r))_{2 \leq i \leq r-1}$ . En calculant  $s\mathfrak{S}_{\underline{r}}s^{-1}$ , on obtient que  $(2, r)$  est la seule double classe pour laquelle  $T_s = 1$ . On considère alors une représentation  $\rho$  de  $\mathfrak{S}_{r-1}$ . Pour  $3 \leq i \leq r$ , on a  $(i, r)(1, 2)(i, r) = (1, 2)$ . Comme  $\chi_{\underline{r}}((1, 2)) = 1$ , l'égalité  $(*)$  donne

$$\text{Res}_{G_1}^G(\beta_{\underline{r}, \rho}) = (\mathbb{C}G_1)^{\dim \rho} \oplus \rho^{r-2}.$$

De la même façon que précédemment, on conclut que  $\rho$  est la représentation triviale,  $\rho = \varepsilon$  et  $r \in \{3, 4\}$  ou  $r = 3$  et  $\rho$  est la représentation standard.

- (iii) Étude du cas  $\underline{r} = \{(3, 2)\}$ . Il existe donc  $1 \leq i \neq j \leq 5$  tel que  $n_i = 2, n_j = 3$  et  $n_k = 0$  si  $k \neq i, j$ . Si  $i < j$  alors  $\chi_{\underline{r}}(\text{diag}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)) = (y_1 y_2)^{-i}(y_3 y_4 y_5)^{-j}$  et  $\mathfrak{S}_{\underline{r}} = \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{\{3, 4, 5\}}$ . Si  $j > i$  alors  $\chi_{\underline{r}}(\text{diag}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)) = (y_1 y_2 y_3)^{-i}(y_4 y_5)^{-j}$  et  $\mathfrak{S}_{\underline{r}} = \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_{\{4, 5\}}$ .

Considérons le premier cas. Les classes de  $\mathfrak{S}_5 / \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_3$  sont  $C_1 = \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{\{3, 4, 5\}}$ ,

$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$
(1, 4)	(4, 2)	(5, 1)	(2, 5)	(3, 1)	(3, 2)
(4, 5, 1)	(4, 5, 2)	(5, 4, 1)	(5, 4, 2)	(3, 5, 1)	(3, 5, 2)
(1, 4)(5, 3)	(4, 2)(5, 3)	(5, 1)(4, 3)	(2, 5)(4, 3)	(4, 5)(3, 1)	(4, 5)(3, 2)
(4, 3, 1)	(4, 3, 2)	(5, 3, 1)	(5, 3, 2)	(3, 4, 1)	(3, 4, 2)
(4, 5, 3, 1)	(4, 5, 3, 2)	(5, 4, 3, 1)	(5, 4, 3, 2)	(3, 5, 4, 1)	(3, 5, 4, 2)
(4, 3, 5, 1)	(4, 3, 5, 2)	(5, 3, 4, 1)	(5, 3, 4, 2)	(3, 4, 5, 1)	(3, 4, 5, 2)
(4, 1, 2)	(4, 2, 1)	(5, 1, 2)	(5, 2, 1)	(3, 1, 2)	(3, 2, 1)
(4, 5, 1, 2)	(4, 5, 2, 1)	(5, 4, 1, 2)	(5, 4, 2, 1)	(3, 5, 1, 2)	(3, 5, 2, 1)
(5, 3)(4, 1, 2)	(5, 3)(4, 2, 1)	(4, 3)(5, 1, 2)	(4, 3)(5, 2, 1)	(4, 5)(3, 1, 2)	(4, 5)(3, 2, 1)
(4, 3, 1, 2)	(4, 3, 2, 1)	(5, 3, 1, 2)	(5, 3, 2, 1)	(3, 4, 1, 2)	(3, 4, 2, 1)
(4, 5, 3, 1, 2)	(4, 5, 3, 2, 1)	(5, 4, 3, 1, 2)	(5, 4, 3, 2, 1)	(3, 5, 4, 1, 2)	(3, 5, 4, 2, 1)
(4, 3, 5, 1, 2)	(4, 3, 5, 2, 1)	(5, 3, 4, 1, 2)	(5, 3, 4, 2, 1)	(3, 4, 5, 1, 2)	(3, 4, 5, 2, 1)

$C_8$	$C_9$	$C_{10}$
$(1, 4)(5, 3, 2)$	$(1, 4)(3, 5, 2)$	$(3, 1)(5, 4, 2)$
$(4, 3, 2, 5, 1)$	$(4, 5, 2, 3, 1)$	$(3, 4, 2, 5, 1)$
$(4, 1)(5, 2)$	$(1, 4)(3, 2)$	$(3, 1)(2, 5)$
$(4, 2, 5, 3, 1)$	$(4, 2, 3, 5, 1)$	$(3, 2, 5, 4, 1)$
$(4, 3, 1)(2, 5)$	$(4, 5, 1)(3, 2)$	$(3, 4, 1)(2, 5)$
$(4, 2, 5, 1)$	$(4, 2, 3, 1)$	$(3, 2, 5, 1)$
$(4, 1, 5, 3, 2)$	$(4, 1, 3, 5, 2)$	$(3, 1, 5, 4, 2)$
$(4, 3, 2)(5, 1)$	$(4, 5, 2)(3, 1)$	$(3, 4, 2)(5, 1)$
$(4, 1, 5, 2)$	$(4, 1, 3, 2)$	$(3, 1, 5, 2)$
$(4, 2)(5, 3, 1)$	$(4, 2)(3, 5, 1)$	$(3, 2)(5, 4, 1)$
$(4, 3, 1, 5, 2)$	$(4, 5, 1, 3, 2)$	$(3, 4, 1, 5, 2)$
$(4, 2)(5, 1)$	$(4, 2)(3, 1)$	$(3, 2)(5, 1)$

Les double-classes  $\mathfrak{S}_\lambda \setminus \mathfrak{S}_5 / \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_3$  sont  $C_1, C_2 \sqcup C_3, C_4 \sqcup C_5, C_6 \sqcup C_7, C_8$  et  $C_9 \sqcup C_{10}$ . On peut donc choisir comme représentants  $S = \{\text{id}, (1, 4), (1, 5), (1, 3), (1, 4)(2, 5), (1, 4)(2, 3), (1, 3)(2, 5)\}$ . En calculant,  $s\mathfrak{S}_r s^{-1}$ , on obtient que les  $s \in S$  vérifiant  $T_s = 1$  sont  $(1, 4), (1, 5)$  et  $(1, 3)$ . On considère alors  $\rho$  la représentation de  $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_3$ . Comme il existe trois  $(\lambda, (3, 2))$ -matrices, la dimension de  $\rho$  est nécessairement 1. Ainsi  $\rho = \varepsilon^\delta \otimes \varepsilon^{\delta'}$  avec  $\delta, \delta' \in \{0, 1\}$ . Comme  $\chi_r((i, j)) = 1$  pour tout  $(i, j) \in \mathfrak{S}_r$  et  $(s^{-1}(1, 2)s)_{s, T_s \neq 1} = ((1, 2), (4, 5), (4, 3), (3, 5))$

l'égalité (\*) donne

$$\text{Res}_{G_1}^G(\beta_{r, \rho}) = (\mathbb{C}G_1)^3 \oplus \varepsilon^\delta \oplus \varepsilon^{3\delta'}.$$

On a donc  $m \geq 3$  et  $m = 3$  si et seulement si  $\delta = \delta' = 0$  c'est-à-dire si  $\rho$  est la représentation triviale.

Considérons le deuxième cas. Les classes de  $\mathfrak{S}_5 / \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_2$  sont  $C_1 = \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_{\{4, 5\}}$ ,

$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$
$(1, 4)$	$(1, 5)$	$(2, 4)$	$(2, 5)$	$(3, 4)$	$(3, 5)$
$(1, 2, 4)$	$(1, 2, 5)$	$(2, 1, 4)$	$(2, 1, 5)$	$(3, 2, 4)$	$(3, 2, 5)$
$(1, 4)(2, 3)$	$(1, 5)(2, 3)$	$(2, 4)(1, 3)$	$(2, 5)(1, 3)$	$(1, 2)(3, 4)$	$(1, 2)(3, 5)$
$(1, 3, 4)$	$(1, 3, 5)$	$(2, 3, 4)$	$(2, 3, 5)$	$(3, 1, 4)$	$(3, 1, 5)$
$(1, 2, 3, 4)$	$(1, 2, 3, 5)$	$(2, 1, 3, 4)$	$(2, 1, 3, 5)$	$(3, 2, 1, 4)$	$(3, 2, 1, 5)$
$(1, 3, 2, 4)$	$(1, 3, 2, 5)$	$(2, 3, 1, 4)$	$(2, 3, 1, 5)$	$(3, 1, 2, 4)$	$(3, 1, 2, 5)$
$(1, 4, 5)$	$(1, 5, 4)$	$(2, 4, 5)$	$(2, 5, 4)$	$(3, 4, 5)$	$(3, 5, 4)$
$(1, 2, 4, 5)$	$(1, 2, 5, 4)$	$(2, 1, 4, 5)$	$(2, 1, 5, 4)$	$(3, 2, 4, 5)$	$(3, 2, 5, 4)$
$(2, 3)(1, 4, 5)$	$(2, 3)(1, 5, 4)$	$(1, 3)(2, 4, 5)$	$(1, 3)(2, 5, 4)$	$(1, 2)(3, 4, 5)$	$(1, 2)(3, 5, 4)$
$(1, 3, 4, 5)$	$(1, 3, 5, 4)$	$(2, 3, 4, 5)$	$(2, 3, 5, 4)$	$(3, 1, 4, 5)$	$(3, 1, 5, 4)$
$(1, 2, 3, 4, 5)$	$(1, 2, 3, 5, 4)$	$(2, 1, 3, 4, 5)$	$(2, 1, 3, 5, 4)$	$(3, 2, 1, 4, 5)$	$(3, 2, 1, 5, 4)$
$(1, 3, 2, 4, 5)$	$(1, 3, 2, 5, 4)$	$(2, 3, 1, 4, 5)$	$(2, 3, 1, 5, 4)$	$(3, 1, 2, 4, 5)$	$(3, 1, 2, 5, 4)$

$C_8$	$C_9$	$C_{10}$
$(1, 4)(2, 3, 5)$	$(1, 4)(3, 2, 5)$	$(3, 4)(2, 1, 5)$
$(1, 3, 5, 2, 4)$	$(1, 2, 5, 3, 4)$	$(3, 1, 5, 2, 4)$
$(1, 4)(2, 5)$	$(1, 4)(3, 5)$	$(3, 4)(2, 5)$
$(1, 5, 2, 3, 4)$	$(1, 5, 3, 2, 4)$	$(3, 5, 2, 1, 4)$
$(1, 3, 4)(2, 5)$	$(1, 2, 4)(3, 5)$	$(3, 1, 4)(2, 5)$
$(1, 5, 2, 4)$	$(1, 5, 3, 4)$	$(3, 5, 2, 4)$
$(1, 4, 2, 3, 5)$	$(1, 4, 3, 2, 5)$	$(3, 4, 2, 1, 5)$
$(1, 3, 5)(2, 4)$	$(1, 2, 5)(3, 4)$	$(3, 1, 5)(2, 4)$
$(1, 4, 2, 5)$	$(1, 4, 3, 5)$	$(3, 4, 2, 5)$
$(1, 5)(2, 3, 4)$	$(1, 5)(3, 2, 4)$	$(3, 5)(2, 1, 4)$
$(1, 3, 4, 2, 5)$	$(1, 2, 4, 3, 5)$	$(3, 1, 4, 2, 5)$
$(1, 5)(2, 4)$	$(1, 5)(3, 4)$	$(3, 5)(2, 4)$

Les double-classes  $\mathfrak{S}_\lambda \setminus \mathfrak{S}_5 / \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_2$  sont  $C_1, C_2 \sqcup C_4, C_3 \sqcup C_5, C_6, C_7, C_8$  et  $C_9 \sqcup C_{10}$ . On peut donc choisir comme représentants  $S = \{\text{id}, (1, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (1, 4)(2, 5), (1, 4)(3, 5)\}$ . En calculant,  $s\mathfrak{S}_r s^{-1}$ , on obtient que les  $s \in S$  vérifiant  $T_s = 1$  sont  $(1, 4), (2, 5)$  et  $(1, 4)(3, 5)$ . On considère alors  $\rho$  la représentation de  $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_2$ . Comme il existe trois  $(\lambda, (3, 2))$ -matrices, la dimension de  $\rho$  est nécessairement 1. Ainsi  $\rho = \varepsilon^\delta \otimes \varepsilon^{\delta'}$  avec  $\delta, \delta' \in \{0, 1\}$ . Comme  $\chi_r((i, j)) = 1$  pour tout  $(i, j) \in \mathfrak{S}_r$  et  $(s^{-1}(1, 2)s)_{s, T_s \neq 1} = ((1, 2), (1, 2), (1, 2), (4, 5))$

l'égalité (\*) donne

$$\text{Res}_{G_1}^G(\beta_{r, \rho}) = (\mathbb{C}G_1)^3 \oplus \varepsilon^{3\delta} \oplus \varepsilon^{\delta'}.$$

On a donc  $m \geq 3$  et  $m = 3$  si et seulement si  $\delta = \delta' = 0$  c'est-à-dire si  $\rho$  est la représentation triviale.

- (iv) Étude du cas  $\tilde{\underline{r}} = \{(2, 2)\}$ . On en déduit qu'il existe  $1 \leq i < j \leq d$  tel que  $n_i = n_j = 2$  et  $n_k = 0$  si  $k \neq i, j$ . Ainsi  $\chi_{\underline{r}}(\text{diag}(y_1, y_2, y_3, y_4)) = (y_1 y_2)^{-i} (y_3 y_4)^{-j}$ . On a alors  $\mathfrak{S}_{\underline{r}} = \{\text{id}, (1, 2), (3, 4), (1, 2)(3, 4)\} = \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$  et  $\rho$  est une représentation irréductible de  $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$ . Finalement  $\rho = \varepsilon^\delta \otimes \varepsilon^{\delta'}$  avec  $\delta, \delta' \in \{0, 1\}$ . Les classes de  $\mathfrak{S}_4 / \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$  sont données par

$$C_1 = \{\text{id}, (1, 2), (3, 4), (1, 2)(3, 4)\}, \quad C_2 = \{(2, 3), (2, 1, 3), (2, 3, 4), (1, 3, 4, 2)\},$$

$$C_3 = \{(1, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 2, 3, 4)\}, \quad C_4 = \{(1, 4), (1, 2, 4), (1, 4, 3), (1, 2, 4, 3)\},$$

$$C_5 = \{(2, 4), (2, 1, 4), (2, 4, 3), (2, 1, 4, 3)\} \quad \text{et} \quad C_6 = \{(1, 3, 2, 4), (1, 4, 2, 3), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}.$$

et les classes de  $\mathfrak{S}_\lambda \backslash \mathfrak{S}_4 / \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$  sont données par  $C_1, C_6, C_2 \sqcup C_3$  et  $C_4 \sqcup C_5$ . On peut donc choisir comme représentants  $S = \{1, (1, 3)(2, 4), (1, 3), (1, 4)\}$ . Par ailleurs, les  $s \in S$  vérifiant  $T_s = 1$  sont  $(1, 3)$  et  $(1, 4)$ . Comme  $\chi_{\underline{r}}((i, j)) = 1$  pour tout  $(i, j) \in \mathfrak{S}_{\underline{r}}$  et  $s^{-1}(1, 2)s = (3, 4)$  pour  $s = (1, 3)(2, 4)$ , l'égalité (\*) donne

$$\text{Res}_{G_1}^G(\beta_{\underline{r}, \rho}) = (\mathbb{C}G_1)^2 \oplus \varepsilon^\delta \oplus \varepsilon^{\delta'}.$$

On en déduit que  $2 \leq m \leq 4$  et  $m \leq 3$  sauf si  $\delta = \delta' = 1$ .

- (v) Étude du cas  $\tilde{\underline{r}} = \{(1, 1, 1)\}$ . On a  $\mathfrak{S}_{\underline{r}} = \{1\}$  et donc  $\rho$  et  $\tilde{\rho}$  sont les représentations triviales. On a alors  $\beta_{\underline{r}, \rho} = \text{Ind}_{D(d, 1, 3)}^{G(d, 1, 3)}(\chi_{\underline{r}})$  qui est de dimension 6. Par ailleurs, on a  $S = \mathfrak{S}_\lambda \backslash \mathfrak{S}_r$  qui est de cardinal 3 et il y a trois  $(\lambda, (1, 1, 1))$ -matrices. Ainsi, pour tout  $s \in S$ , on a  $T_s = \{1\}$  et donc, avec la relation (\*), on a  $\text{Res}_{G_1}^G(\beta_{\underline{r}, \rho}) = (\mathbb{C}G_1)^3$  et  $m = 3$ . ■

**Corollaire 2.81 — Conclusion.** Soient  $d \geq 2, r \geq 3$ ,  $H$  un hyperplan du groupe de réflexions  $G(d, 1, r)$  dans la classe de  $H_1$  et  $\rho' = \beta_{\underline{r}, \rho}$  une représentation irréductible de  $G(d, 1, r)$  et  $\chi$  un caractère linéaire de  $G(d, 1, r)$ .

- (i) L'hyperplan  $H$  est  $\rho'$ -excellent,  $\rho'$ -bon,  $(\rho', \chi)$ -bon (pour  $\chi(G_H) = 1$ ),  $(\rho', \chi)$ -acceptable (pour  $\chi(G_H) \neq 1$ ) si et seulement si  $\rho'$  est l'une des représentations suivantes
- $\underline{r} = (0, \dots, 0, r, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$ ,  $\rho = \varepsilon$ ,  $\rho$  est la représentation standard ou  $\rho = (2, 2)$  si  $r = 4$ .
  - $\underline{r} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, r-1, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$ .
  - $\underline{r} = (0, \dots, 0, r-1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$ .
- (ii) L'hyperplan  $H$  est  $(\rho', \chi)$ -bon (pour  $\chi(G_H) \neq 1$ ) si et seulement si  $\underline{r} = (0, \dots, 0, r, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$ .
- (iii) L'hyperplan  $H$  est  $(\rho', \chi)$ -acceptable (pour  $\chi(G_H) = 1$ ) si et seulement si  $\rho'$  est l'une des représentations suivantes
- $\underline{r} = (0, \dots, 0, r, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$ ,  $\rho = \varepsilon$ ,  $\rho$  est la représentation standard ou  $\rho$  quelconque si  $r \leq 5$  ou  $\rho \in \{(3, 3), (2, 2, 2), (4, 2)\}$  si  $r = 6$ .
  - $\underline{r} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, r-1, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$  ou  $\rho = \varepsilon$  si  $r \in \{3, 4\}$  ou  $\rho$  est la représentation standard si  $r = 3$ .
  - $\underline{r} = (0, \dots, 0, r-1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$  ou  $\rho = \varepsilon$  si  $r \in \{3, 4\}$  ou  $\rho$  est la représentation standard si  $r = 3$ .
  - $\underline{r} = (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0, 3, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$ .
  - $\underline{r} = (0, \dots, 0, 3, 0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$ .
  - $\underline{r} = (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$  ou  $\rho = \varepsilon \otimes \mathbf{1}$  ou  $\rho = \mathbf{1} \otimes \varepsilon$ .
  - $\underline{r} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$ .

**Preuve.** La remarque 2.5 associée à la proposition 2.80 donne le résultat. ■

## ÉTUDE DE $H_2$

On étudie ici l'hyperplan  $H_2$ . La détermination des types de  $H_2$  (corollaire 2.81) résulte alors principalement du lemme 2.83.

**Lemme 2.82 — Double classe.** Soit  $\underline{r} \in I_r(d)$ . L'application quotient  $\pi : G \rightarrow \mathfrak{S}_r$  induit une bijection entre les ensembles quotients  $G_2 \backslash G / D\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  et  $\mathfrak{S}_r / \mathfrak{S}_{\underline{r}}$ .

Soit  $S$  une famille de représentants de  $G_2 \backslash G / D\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  formée de matrices de permutations. Pour  $s \in S$ , on a  $sD\mathfrak{S}_{\underline{r}}s^{-1} \cap G_2 = G_2$ .

**Preuve.** D'après ce qu'on a vu dans la démonstration du lemme 2.78,  $\pi$  induit une bijection entre les ensembles  $G / D\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  et  $\mathfrak{S}_r / \mathfrak{S}_{\underline{r}}$ . On choisit alors une famille  $X$  de représentants de  $G / D\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  formée de permutations. Soient  $x, y \in X$ , les doubles classes de  $G_2 \backslash G / D\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  associée à  $x$  et  $y$  sont les mêmes si et seulement s'il existe  $D_1 \in D$  et

$D_2 P_\sigma \in D\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  avec  $D_2 \in D$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{r}}$  telle que  $x = D_1 y D_2 P_\sigma = (D_1 y D_2 y^{-1}) y P_\sigma$ . Comme  $D$  est distingué dans  $G$  et que  $G$  est un produit semidirect de  $D$  par  $\mathfrak{S}_r$ , on en déduit que  $x = y P_\sigma$  avec  $P_\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{r}}$  et donc  $x = y$ . Finalement, les doubles classes  $G_2 \backslash G / D\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  et les classes à droite  $G / D\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  sont les mêmes et on a le résultat souhaité.

Comme  $D$  est distingué, on a  $sD\mathfrak{S}_{\underline{r}}s^{-1} = Ds\mathfrak{S}_{\underline{r}}s^{-1}$  qui contient  $D$  et donc  $G_2$  pour tout  $s \in S$ .  $\blacksquare$

**Lemme 2.83 – Dénombrement dans le groupe symétrique.** Soient  $\underline{r} = (n_0, \dots, n_{d-1}) \in I_r(d)$  et  $\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  le sous-groupe de  $\mathfrak{S}_r$  correspondant. On note  $S$  une famille de représentants de  $\mathfrak{S}_r / \mathfrak{S}_{\underline{r}}$ . Pour  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  et  $\ell \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$ , le nombre de  $s \in S$  tels que  $s^{-1}(1) \in \llbracket n_0 + \dots + n_{\ell-1} + 1, n_0 + \dots + n_\ell \rrbracket$  est  $(n_\ell/r)r!/(n_0! \dots n_{d-1}!)$ .

**Preuve.** En effet, si  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$  vérifie  $\sigma^{-1}(1) \in \llbracket n_0 + \dots + n_{\ell-1} + 1, n_0 + \dots + n_\ell \rrbracket$  alors  $\sigma\sigma'$  aussi pour tout  $\sigma' \in \mathfrak{S}_{\underline{r}}$ . Ainsi l'ensemble considéré est une réunion de classes à droite modulo  $\mathfrak{S}_{\underline{r}}$ . Pour dénombrer le nombre de représentants, il suffit de compter le nombre de permutation vérifiant la propriété. Il y en a  $n_\ell(r-1)!$ . On obtient alors le nombre de classes à droite en divisant par le cardinal d'une classe  $n_1! \dots n_d!$ .  $\blacksquare$

**Proposition 2.84 – Restriction à  $G_2$ .** Soit  $\underline{r} = (n_0, \dots, n_{d-1}) \in I_r(d)$ ,  $\rho$  une représentation irréductible de  $\mathfrak{S}_{\underline{r}}$ . On a

$$\text{Res}_{G_2}^G(\beta_{\underline{r}, \rho}) = \bigoplus_{j=0}^{d-1} \dim \rho \frac{n_j}{r} \frac{r!}{n_0! \dots n_{d-1}!} \det^{-j}.$$

**Preuve.** Soit  $S$  une famille de représentants de  $G_2 \backslash G / D\mathfrak{S}_{\underline{r}}$  formée de matrices de permutations (voir le lemme 2.82). En appliquant la proposition 22 de [SER], on obtient que

$$\text{Res}_{G_2}^G(\beta_{\underline{r}, \rho}) = \bigoplus_{s \in S} \text{Ind}_{T_s}^{G_1}((\chi_{\underline{r}} \otimes \tilde{\rho})_s)$$

où  $T_s = sD\mathfrak{S}_{\underline{r}}s^{-1} \cap G_2$  et  $(\chi_{\underline{r}} \otimes \tilde{\rho})_s$  désigne la représentation de  $T_s$  donnée par

$$(\chi_{\underline{r}} \otimes \tilde{\rho})_s(x) = (\chi_{\underline{r}} \otimes \tilde{\rho})(s^{-1}xs)$$

pour tout  $x \in T_s$ . Or, le lemme 2.82 assure que  $T_s = G_2$  pour tout  $s \in S$ . Par ailleurs,  $\tilde{\rho}(s^{-1}xs) = \text{id}$  pour tout  $x \in G_2$  et  $s \in S$  puisque  $s^{-1}xs$  est diagonale. On en déduit que

$$\text{Res}_{G_2}^G(\beta_{\underline{r}, \rho}) = \bigoplus_{s \in S} (\chi_{\underline{r}})_s^{\dim \rho}$$

De plus, pour  $s \in S$ ,  $s^{-1}G_2s = \langle D_{s^{-1}(1), \xi} \rangle$  où  $\xi$  est une racine primitive de l'unité. On en déduit que, pour  $j \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$ , le nombre de  $s \in S$  tel que  $(\chi_{\underline{r}})_s = \det^{-j}$  est le nombre de  $s \in S$  vérifiant

$$s^{-1}(1) \in \llbracket n_0 + \dots + n_{j-1} + 1, n_0 + \dots + n_j \rrbracket.$$

Le lemme 2.83 montre alors que  $\text{Res}_{G_2}^G(\beta_{\underline{r}, \rho}) = \bigoplus_{j=0}^{d-1} \dim \rho \frac{n_j}{r} \frac{r!}{n_0! \dots n_{d-1}!} \det^{-j}$ .  $\blacksquare$

**Corollaire 2.85 – Conclusion.** Soient  $d \geq 2$ ,  $r \geq 3$ ,  $H$  un hyperplan du groupe de réflexions  $G(d, 1, r)$  dans la classe de  $H_2$  et  $\rho' = \beta_{\underline{r}, \rho}$  une représentation irréductible de  $G(d, 1, r)$  (avec  $\underline{r} = (n_0, \dots, n_{d-1})$ ) et  $\chi$  un caractère linéaire de  $G(d, 1, r)$ .

(i) L'hyperplan  $H$  est  $\rho'$ -bon si  $\sum_{j=0}^{d-1} \dim \rho \frac{j n_j}{r} \frac{r!}{n_0! \dots n_{d-1}!} < d$

(ii) L'hyperplan  $H$  est  $\rho'$ -excellent si  $\rho'$  est l'une des représentations suivantes

a)  $\underline{r} = (r, 0, \dots, 0)$  et  $\rho$  quelconque (ce sont les représentations de  $\mathfrak{S}_r$ ).

b)  $\underline{r} = (0, 0, \dots, 0, r, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$  ou  $\rho = \varepsilon$ .

c)  $\underline{r} = (r-1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  et  $\rho = \mathbf{1}$  ou  $\rho = \varepsilon$ .

(iii) L'hyperplan  $H$  est  $(\rho', \chi)$ -bon si  $\sum_{j=0}^{d-1} \dim \rho \frac{j n_j}{r} \frac{r!}{n_0! \dots n_{d-1}!} < d - n_H(\chi)$ .

**Preuve.** Les cas  $\rho'$ -bon et  $(\rho', \chi)$ -bon découlent immédiatement de la proposition 2.84. Il reste le cas  $\rho'$ -excellent. La proposition 2.84 assure que  $n_j = 0$  pour tout  $j \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket$  sauf éventuellement un  $j_0$ . Si tous les  $n_j$  pour  $j \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket$  sont nuls alors  $G_H$  agit trivialement via  $\rho'$ . Sinon,  $(\dim \rho) C_{r-1}^{n_0} = 1$  c'est-à-dire  $\dim \rho = 1$  et  $n_{j_0} = r$  ou  $n_0 = r-1$ .  $\blacksquare$

### 2.4.3 ÉTUDE DES REPRÉSENTATIONS DE $G(de, e, 2)$

On termine cette section sur  $G(de, e, r)$  par l'étude du cas  $r = 2$ . Toujours par la méthode de Wigner et Mackey, on détermine la table de caractère du groupe  $G(de, e, 2)$  et les types des différents hyperplans.

**Notation 2.86 — Représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_2$ .** On note dans cette sous-section  $s$  la matrice de permutation associé à la transposition  $(1, 2)$  dans  $GL_2(\mathbb{C})$ . Les représentations irréductibles du groupe  $\mathfrak{S}_2$  engendré par  $s$  sont le caractère trivial  $\mathbf{1}$  et la signature  $\varepsilon$ .

**Proposition 2.87 — Caractère linéaire de  $D(de, e, 2)$ .** Soient  $d, e \in \mathbb{N}^*$ . L'application

$$\Delta: \begin{cases} \mathbb{Z}/de\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \longrightarrow \widehat{D(de, e, 2)} = \text{Hom}_{gr}(D(de, e, 2), \mathbb{C}^\times) \\ (k, k') \longmapsto (\text{diag}(\alpha, \beta) \mapsto \alpha^{-k}(\alpha\beta)^{-k'}) \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes.

L'action de  $s$  sur  $\chi \in \widehat{D(de, e, 2)}$  se traduit via  $\Delta$  en une action sur  $\mathbb{Z}/de\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  par  $s(k, k') = (-k, k + k')$ .

Les points fixes de  $\mathbb{Z}/de\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  sous l'action de  $s$  sont les  $(k, k')$  vérifiant  $\text{pgcd}(2, e)k = 0[de]$ .

**Preuve.** Le fait que  $\Delta$  soit un isomorphisme de groupes résulte de l'isomorphisme  $\varphi$  de la notation 2.57 et de la théorie des caractères linéaires de  $\mathbb{U}_{de} \times \mathbb{U}_d$ .

Par ailleurs, comme  $s\text{diag}(\alpha, \beta)s^{-1} = \text{diag}(\beta, \alpha)$  et  $\beta^{-k}(\alpha\beta)^{-k'} = \alpha^k(\alpha\beta)^{-(k+k')}$ , on obtient le résultat.

On a  $s(k, k') = (k, k')$  si et seulement si

$$\begin{cases} k = -k[de] \\ k' = k' + k[d] \end{cases} \iff \begin{cases} 2k = 0[de] \\ k = 0[d] \end{cases} \iff \begin{cases} 2k = 0[de] \\ ek = 0[de] \end{cases}$$

ce qui est encore équivalent à  $\text{pgcd}(2, e)k = 0[de]$ .

**Proposition 2.88 — Le cas  $d, e$  impairs.** Soient  $d, e \in \mathbb{N}^*$  avec  $d, e$  impairs. Une famille de représentants des orbites de  $\mathbb{Z}/de\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  sous l'action de  $s$  est donnée par  $((0, k')_{k' \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}, (k, k')_{1 \leq k \leq de/2, k' \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}})$ .

Pour  $k' \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ , on prolonge  $\Delta((0, k'))$  à  $G(de, e, 2)$  en posant  $\Delta((0, k'))(dx) = \Delta((0, k'))(d)$  pour tout  $d \in D(de, e, 2)$  et  $x \in \mathfrak{S}_2$ . On prolonge  $\rho$  représentation irréductible de  $\mathfrak{S}_2$  à  $G(de, e, 2)$  en posant  $\rho(dx) = \rho(x)$  pour tout  $d \in D(de, e, 2)$  et  $x \in \mathfrak{S}_2$ . On définit alors  $\beta_{k', \rho}(dx) = \rho(dx)\Delta((0, k'))(dx) = \rho(x)\Delta(0, k')(d)$  pour tout  $d \in D(de, e, 2)$  et  $x \in \mathfrak{S}_2$ .

Pour  $(k, k') \in [\![1, de/2]\!] \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ , on pose  $\beta_{k, k'} = \text{Ind}_{D(de, e, 2)}^{G(de, e, 2)} \Delta((k, k'))$ .

La famille  $(\beta_{k', \mathbf{1}}, \beta_{k', \varepsilon})_{k' \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}, (\beta_{k, k'})_{(k, k') \in [\![1, de/2]\!] \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$  est une famille de représentants des représentations irréductibles de  $G(de, e, 2)$ .

Soit  $\xi \in \mathbb{U}_d$ . La table des caractères de  $G(de, e, 2)$  est donnée par

	$\xi \text{Id}$	$\text{diag}(\alpha, \beta)$ $\alpha \neq \beta$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \xi \end{bmatrix}$
$\beta_{k', \mathbf{1}}$	$\xi^{-2k'}$	$(\alpha\beta)^{-k'}$	$\xi^{-k'}$
$\beta_{k', \varepsilon}$	$\xi^{-2k'}$	$(\alpha\beta)^{-k'}$	$-\xi^{-k'}$
$\beta_{k, k'}$	$2\xi^{-(k+2k')}$	$(\alpha^{-k} + \beta^{-k})(\alpha\beta)^{-k'}$	0

Une version matricielle de  $\beta_{(k, k')}$  est donnée par

$$\begin{cases} G(de, e, 2) \longrightarrow GL_2(\mathbb{C}) \\ \text{diag}(\alpha, \beta) \longmapsto \text{diag}(\alpha^{-k}(\alpha\beta)^{-k'}, \beta^{-k}(\alpha\beta)^{-k'}) \\ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \alpha^{-k}(\alpha\beta)^{-k'} \\ \beta^{-k}(\alpha\beta)^{-k'} \end{bmatrix} \end{cases}.$$

**Proposition 2.89 — Le cas  $e$  impair,  $d$  pair.** Soient  $d, e \in \mathbb{N}^*$  avec  $d = 2d'$  pair et  $e$  impair. Une famille de représentants des orbites de  $\mathbb{Z}/de\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  sous l'action de  $s$  est donnée par

$$((0, k')_{k' \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}, (k, k')_{1 \leq k \leq d'e-1, k' \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}, (d'e, k')_{0 \leq k' \leq d'-1}).$$

Pour  $k' \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ , on prolonge  $\Delta((0, k'))$  à  $G(de, e, 2)$  en posant  $\Delta((0, k'))(dx) = \Delta((0, k'))(d)$  pour tout  $d \in D(de, e, 2)$  et  $x \in \mathfrak{S}_2$ . On prolonge  $\rho$  représentation irréductible de  $\mathfrak{S}_2$  à  $G(de, e, 2)$  en posant  $\rho(dx) = \rho(x)$  pour tout  $d \in D(de, e, 2)$  et  $x \in \mathfrak{S}_2$ . On définit alors  $\beta_{k', \rho}(dx) = \rho(dx)\Delta((0, k'))(dx) = \rho(x)\Delta(0, k')(d)$  pour tout  $d \in D(de, e, 2)$  et  $x \in \mathfrak{S}_2$ .

On note  $A$  l'ensemble  $A = \{[\![1, d'e-1]\!] \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\} \cup \{d'e\} \times [\![0, d'-1]\!]$ . Pour  $(k, k') \in A$ , on pose

$$\beta_{k, k'} = \text{Ind}_{D(de, e, 2)}^{G(de, e, 2)} \Delta((k, k')).$$

La famille  $((\beta_{k',1}, \beta_{k',\varepsilon})_{k' \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}, (\beta_{k,k'})_{(k,k') \in \mathbb{A}})$  est une famille de représentants des représentations irréductibles de  $G(de, e, 2)$ .

Soit  $\xi \in \mathbb{U}_d$ . La table des caractères de  $G(de, e, 2)$  est donnée par

	$\xi \text{Id}$	$\text{diag } (\alpha, \beta)$ $\alpha \neq \beta$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \xi \end{bmatrix}$
$\beta_{k',1}$	$\xi^{-2k'}$	$(\alpha\beta)^{-k'}$	$\xi^{-k'}$
$\beta_{k',\varepsilon}$	$\xi^{-2k'}$	$(\alpha\beta)^{-k'}$	$-\xi^{-k'}$
$\beta_{k,k'}$	$2\xi^{-(k+2k')}$	$(\alpha^{-k} + \beta^{-k})(\alpha\beta)^{-k'}$	0

Une version matricielle de  $\beta_{(k,k')}$  est donnée par

$$\begin{cases} G(de, e, 2) & \longrightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C}) \\ \text{diag } (\alpha, \beta) & \longmapsto \text{diag } (\alpha^{-k}(\alpha\beta)^{-k'}, \beta^{-k}(\alpha\beta)^{-k'}) \\ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} & \longmapsto \begin{bmatrix} \alpha^{-k}(\alpha\beta)^{-k'} \\ \beta^{-k}(\alpha\beta)^{-k'} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

**Proposition 2.90 — Le cas  $e$  pair.** Soient  $d, e \in \mathbb{N}^*$  avec  $e = 2e'$  pair. Une famille de représentants des orbites de  $\mathbb{Z}/de\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  sous l'action de  $s$  est donnée par

$$((0, k')_{k' \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}, (de', k')_{k' \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}, (k, k')_{1 \leq k \leq de' - 1, k' \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}).$$

Pour  $k' \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  et  $\delta \in \{0, de'\}$ , on prolonge  $\Delta((\delta, k'))$  à  $G(de, e, 2)$  en posant  $\Delta((\delta, k'))(dx) = \Delta((\delta, k'))(d)$  pour  $d \in D(de, e, 2)$  et  $x \in \mathfrak{S}_2$ . Si  $\rho$  représentation irréductible de  $\mathfrak{S}_2$ , on la prolonge à  $G(de, e, 2)$  en posant  $\rho(dx) = \rho(x)$  pour tout  $d \in D(de, e, 2)$  et  $x \in \mathfrak{S}_2$ . On définit alors, pour  $d \in D(de, e, 2)$  et  $x \in \mathfrak{S}_2$ .

$$\beta_{\delta, k', \rho}(dx) = \rho(dx)\Delta((\delta, k'))(dx) = \rho(x)\Delta((\delta, k'))(d)$$

Pour  $(k, k') \in \llbracket 1, de' - 1 \rrbracket \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ , on pose

$$\beta_{k, k'} = \text{Ind}_{D(de, e, 2)}^{G(de, e, 2)} \Delta((k, k')).$$

La famille  $((\beta_{\delta, k', 1}, \beta_{\delta, k', \varepsilon})_{(\delta, k') \in \{0, de'\} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}, (\beta_{k, k'})_{(k, k') \in \llbracket 1, de' - 1 \rrbracket \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}})$  est une famille de représentants des représentations irréductibles de  $G(de, e, 2)$ .

Soit  $\xi \in \mathbb{U}_d$ ,  $\zeta$  une racine primitive  $de^e$  de l'unité et  $\mu \in \mathbb{U}_{2d}$ . La table des caractères de  $G(de, e, 2)$  est

	$\mu \text{Id}$	$\text{diag } (\alpha, \beta)$ $\alpha \neq \beta$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \xi \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \xi\zeta \\ \zeta^{-1} \end{bmatrix}$
$\beta_{0, k', 1}$	$\mu^{-2k'}$	$(\alpha\beta)^{-k'}$	$\xi^{-k'}$	$\xi^{-k'}$
$\beta_{0, k', \varepsilon}$	$\mu^{-2k'}$	$(\alpha\beta)^{-k'}$	$-\xi^{-k'}$	$-\xi^{-k'}$
$\beta_{de', k', 1}$	$\mu^{-(de' + 2k')}$	$\alpha^{-de'}(\alpha\beta)^{-k'}$	$\xi^{-k'}$	$-\xi^{-k'}$
$\beta_{de', k', \varepsilon}$	$\mu^{-(de' + 2k')}$	$\alpha^{-de'}(\alpha\beta)^{-k'}$	$-\xi^{-k'}$	$\xi^{-k'}$
$\beta_{k, k'}$	$2\mu^{-(k+2k')}$	$(\alpha^{-k} + \beta^{-k})(\alpha\beta)^{-k'}$	0	0

Une version matricielle de  $\beta_{(k,k')}$  est donnée par

$$\begin{cases} G(de, e, 2) & \longrightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C}) \\ \text{diag } (\alpha, \beta) & \longmapsto \text{diag } (\alpha^{-k}(\alpha\beta)^{-k'}, \beta^{-k}(\alpha\beta)^{-k'}) \\ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} & \longmapsto \begin{bmatrix} \alpha^{-k}(\alpha\beta)^{-k'} \\ \beta^{-k}(\alpha\beta)^{-k'} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

**Preuve.** L'action de  $s$  sur  $\mathbb{Z}/de\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  montre qu'il suffit de choisir un représentant de  $\mathbb{Z}/de\mathbb{Z}$  modulo l'action  $x \mapsto -x$  puis de regarder en détail ce qui se passe lorsque  $x = -x [de]$  c'est-à-dire pour  $x = 0$  ou  $x = de/2$  si  $de$  pair.

La méthode des petits groupes de Wigner et Mackey donne le résultat. Le calcul de la version matricielle s'effectue dans la base  $(1 \otimes 1, s \otimes 1)$  de  $\mathbb{C}G(de, e, 2) \otimes_{CD(de, e, 2)} \mathbb{C}_{k,k'}$  où  $\mathbb{C}_{k,k'}$  est l'espace vectoriel  $\mathbb{C}$  muni de la structure de  $D(de, e, 2)$ -module associée à  $\Delta((k, k'))$ . La table des caractères s'en déduit aussitôt. ■

**Corollaire 2.91 — Hyperplans non diagonaux.** Soient  $d, e \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho$  une représentation irréductible de  $G(de, e, 2)$  de dimension 2,  $\chi$  un caractère linéaire de  $G(de, e, r)$  et  $H$  l'hyperplan associé à une réflexion non diagonale.

Alors  $H$  est  $\rho$ -bon,  $\rho$ -excellent et  $(\rho, \chi)$ -acceptable.

Si  $e$  est impair, l'hyperplan  $H$  est  $(\rho, \chi)$ -bon si et seulement si  $\chi = \beta_{k',1}$  avec  $k' \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ .

Si  $e = 2e'$  est pair et  $H$  est un hyperplan associé à la classe de conjugaison de  $s$  alors  $H$  est  $(\rho, \chi)$ -bon si et seulement si  $\chi = \beta_{\delta, k', 1}$  avec  $\delta \in \{0, de'\}$  et  $k' \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ .

Si  $e = 2e'$  est pair et  $H$  est un hyperplan associé à la classe de conjugaison de  $sdiag(\zeta, \zeta^{-1})$  (avec  $\zeta$  racine primitive de l'unité) alors  $H$  est  $(\rho, \chi)$ -bon si et seulement si  $\chi = \beta_{0, k', 1}$  ou  $\chi = \beta_{de', k', \varepsilon}$  avec  $k' \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ .

**Corollaire 2.92 — Hyperplans diagonaux.** Soient  $d, e \in \mathbb{N}^*$ ,  $\beta_{k, k'}$  une représentation irréductible de  $G(de, e, 2)$  de dimension 2,  $\chi$  un caractère linéaire de  $G(de, e, r)$  et  $H$  l'hyperplan associé à une réflexion diagonale.

Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $\bar{n}$  l'unique entier congru à  $n$  modulo  $d$  et vérifiant  $0 \leq \bar{n} \leq d-1$ .

On a  $n_H(\beta_{k, k'}) = \overline{k+k'} + k'$ . Pour  $e$  impair et  $u \in \{1, \varepsilon\}$ , on a  $n_H(\beta_{k', u})$ . Pour  $e = 2e'$  pair,  $\delta \in \{0, de'\}$  et  $u \in \{1, \varepsilon\}$ , on a  $n_H(\beta_{\delta, k', u}) = k'$ .

Si  $k' = 0$  alors  $H$  est  $\beta_{k, k'}$ -excellent et donc  $\beta_{k, k'}$ -bon et  $(\beta_{k, k'}, \chi)$ -acceptable et  $n_H(\beta_{k, k'}) = \bar{k}$ . Pour  $\chi = \beta_{\delta, k'', u}$  ou  $\chi = \beta_{k'', u}$  avec  $\delta \in \{0, de'\}$  et  $u \in \{1, \varepsilon\}$ , l'hyperplan  $H$  est  $(\beta_{k, k'}, \chi)$ -bon si et seulement si est  $k' + k'' < d$ .

On suppose  $k' \neq 0$ . Pour  $\chi = \beta_{\delta, k'', u}$  ou  $\chi = \beta_{k'', u}$  avec  $\delta \in \{0, de'\}$  et  $u \in \{1, \varepsilon\}$ , l'hyperplan  $H$  est

- (i)  $\beta_{k, k'}$ -excellent si et seulement si  $\overline{k+k'} = 0$ ;
- (ii)  $\beta_{k, k'}$ -bon si et seulement si  $\overline{k+k'} + k' < d$ ;
- (iii)  $(\beta_{k, k'}, \chi)$ -bon si et seulement si  $\overline{k+k'} + k' + k'' < d$ ;
- (iv)  $(\beta_{k, k'}, \chi)$ -acceptable si et seulement si  $d - k'' > \overline{k+k'}$  ou  $d - k'' > k'$ .

**Preuve.** La réalisation matricielle donne immédiatement les multiplicités des valeurs propres permettant de calculer  $n_H(\beta_{k, k'})$  et  $n_H(\chi)$ . On en déduit alors le type des hyperplans. ■

## 2.5 EXEMPLE 3 : LE GROUPE DE RÉFLEXIONS $G_{24}$

Le but de cette section est d'étudier le groupe  $G_{24}$  et notamment de déterminer les types d'hyperplans pour les différentes représentations irréductibles. Pour cela, on commence par construire le groupe  $G_{24}$ . On considère donc le groupe  $G_1 = \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_2)$ . C'est un groupe simple à

$$(2^3 - 1)(2^3 - 2)(2^3 - 2^2) = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

éléments. En effet, le cardinal de  $G_1$  est celui de l'ensemble des bases de  $\mathbb{F}_2^3$  : il s'agit donc de choisir un vecteur non nul puis un vecteur qui n'est pas dans la droite engendré par le précédent et enfin un vecteur qui n'est pas dans le plan engendré par les deux premiers.

**Lemme 2.93 — Élément d'ordre 2 dans  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ .** Il y a une seule classe de conjugaison d'éléments d'ordre 2 dans  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ . Elle est constituée de 21 éléments.

**Preuve.** Soient  $u$  un élément d'ordre 2,  $\pi_u$  son polynôme minimal et  $\chi_u$  son polynôme caractéristique. Comme  $u$  est d'ordre 2, on a  $u^2 - \mathrm{id} = 0$  et donc  $\pi_u$  un diviseur de  $X^2 - 1 = (X - 1)^2$ . Si  $\pi_u = X - 1$  alors  $u = \mathrm{id}$  n'est pas d'ordre 2. On en déduit que  $\pi_u = (X - 1)^2$  et donc  $\chi_u = (X - 1)^3$  puisque le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de  $u$  ont les mêmes facteurs irréductibles. En dimension 3, les classes de conjugaison sont caractérisées par le polynôme minimal et le polynôme caractéristique (voir [BPM, application 6.101]). L'ensemble des éléments de  $G$  d'ordre 2 forment donc une classe de conjugaison dont un représentant est

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On cherche à présent les éléments  $v$  de  $G_1$  qui commutent avec  $u$ . Un tel  $v$  laisse fixe  $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) = e_1$  et  $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) = \mathrm{vect}(e_1, e_3)$ . Il est donc de la forme

$$v = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & e & f \end{bmatrix}.$$

Le calcul  $uv = vu$  donne  $a = d$ . Comme  $v$  doit être inversible, on obtient  $a = d = 1$  sinon la première colonne est nulle. De plus, en développant le déterminant de  $v$  par rapport à la première colonne, on obtient  $0 \neq \det v = f$  et donc  $f = 1$ . Finalement,

$$v = \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & e & 1 \end{bmatrix}.$$

Il y a donc 8 éléments dans  $G_1$  qui commutent avec  $u$  et la classe de conjugaison de  $u$  a  $168/8 = 21$  éléments.

**Lemme 2.94 – Représentations irréductibles de  $GL_3(\mathbb{F}_2)$ .** On note  $G_1 = GL_3(\mathbb{F}_2)$ . Soient  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $\rho : G_1 \rightarrow GL(V)$  une représentation irréductible de  $G_1$ . Alors  $\rho(G_1) \subset SL(V)$ .

Les degrés des représentations irréductibles de  $G_1$  sont 1, 3, 3, 6, 7 et 8. La représentation de degré 1 est la représentation triviale.

**Preuve.** Le sous-groupe  $[G_1, G_1]$  de  $G_1$  est un sous-groupe distingué donc  $[G_1, G_1] = G_1$  puisque  $G_1$  est simple non commutatif. On a alors  $\rho(G_1) = [\rho(G_1), \rho(G_1)] \subset [GL(V), GL(V)] \subset SL(V)$ .

Les représentations de dimension 1 de  $G_1$  sont celles de  $G_1^{ab} = G_1/[G_1, G_1] = \{1\}$ . Ainsi,  $G_1$  admet une seule représentation de dimension 1 : la représentation triviale.

Montrons que  $G_1$  n'admet pas de représentation irréductible de dimension 2. Raisonnons par l'absurde et considérons  $\rho : G_1 \rightarrow GL(V)$  une représentation irréductible sur  $\mathbb{C}$  de dimension 2. Le noyau de  $\rho$  est un sous-groupe distingué de  $G_1$ . Comme  $G_1$  est simple, on a  $\text{Ker } \rho = \{1\}$  ou  $\text{Ker } \rho = G_1$ . Dans le deuxième cas,  $G_1$  agit trivialement sur  $V$  et donc la représentation n'est pas irréductible puisque  $\dim V = 2$ . On en déduit que  $\rho$  est injective. En particulier, si  $g$  est d'ordre 2 dans  $G_1$  alors  $\rho(g)$  est d'ordre 2 et donc son polynôme minimal  $\pi_g$  divise  $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ . On a donc les possibilités suivantes.

- (i)  $\pi_g = X - 1$  et donc  $\rho(g) = \text{id}$  ce qui contredit le fait que  $\rho(g)$  est d'ordre 2.
- (ii)  $\pi_g = X + 1$  et donc  $\rho(g) = -\text{id} \in Z\rho(G_1)$ . Comme  $\rho$  est un isomorphisme de  $G_1$  sur  $\rho(G_1)$ , on obtient  $g \in ZG_1$ . Comme  $g \neq 1$ , cela contredit la simplicité de  $G_1$ .
- (iii)  $\pi_g = (X - 1)(X + 1)$ . Comme  $\pi_g$  divise le polynôme caractéristique  $\chi_g$  de  $\rho(g)$  qui est de degré 2, on a  $\chi_g = X^2 - 1$  et donc  $\det \rho(g) = -1$  ce qui contredit le fait que  $\rho(G_1) \subset SL(V)$ .

Les trois cas sont impossibles et on aboutit bien à une contradiction.

Pour déterminer le nombres et les degrés des représentations irréductibles de  $G_1$ , on utilise les résultats suivants ([SER]) :

- (i) les dimensions des représentations irréductibles divisent l'ordre du groupe ;
- (ii) il n'y qu'une représentation irréductible de degré 1 et il n'y en a pas de degré 2 ;
- (iii) le nombre  $\ell$  de représentations irréductibles est égal au nombre de classe de conjugaison de  $G_1$ .
- (iv)  $|G_1| = n_1^2 + \cdots + n_\ell^2$  où les  $n_i$  sont les dimensions des représentations irréductibles de  $G_1$ .

Commençons par déterminer le nombre de classes de conjugaison de  $G_1$ . On est en dimension 3, donc une classe de conjugaison est déterminée par son polynôme minimal et son polynôme caractéristique. Pour  $u \in G_1$ , on note  $\pi_u$  son polynôme minimal et  $\chi_u$  son polynôme caractéristique. Le polynôme  $\chi_u$  est alors unitaire de degré 3 et son terme constant n'est pas nul puisque  $u$  est inversible. On a donc les possibilités suivantes pour  $\chi_u$

- (i)  $\chi_u = X^3 + X^2 + 1$  ;
- (ii)  $\chi_u = X^3 + X + 1$  ;
- (iii)  $\chi_u = X^3 + X^2 + X + 1 = (X - 1)^3$  ;
- (iv)  $\chi_u = X^3 + 1 = X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ .

Dans les cas (i) et (ii),  $\chi_u$  est irréductible sur  $\mathbb{F}_2$  puisqu'il est de degré 3 et n'a pas de racines dans  $\mathbb{F}_2$ . Comme  $\pi_u \mid \chi_u$ , on en déduit que  $\pi_u = \chi_u$  et chacun des deux polynômes  $X^3 + X + 1$  et  $X^3 + X^2 + 1$  détermine une classe de conjugaison.

*Digression sur les éléments d'ordre 7.* Si  $u$  est dans l'une de ces deux classes de conjugaison alors  $u$  est d'ordre 7. En effet, on a

$$(X^3 + X + 1)(X^3 + X^2 + 1)(X - 1) = X^7 - 1. \quad (*)$$

Ainsi  $u^7 = 1$ . Et comme  $\chi_u \in \{X^3 + X + 1, X^3 + X^2 + 1\}$ ,  $u \neq 1$  et donc  $u$  est d'ordre 7.

Par ailleurs, comme  $\chi_u = \pi_u$  pour chacune de ces deux classes de conjugaison, le commutant  $C(u)$  de  $u$  est  $\mathbb{F}_2[u] = \mathbb{F}_2[X]/\langle \pi_u \rangle$ . Comme  $\pi_u$  est irréductible de degré 3, on en déduit que  $\mathbb{F}_2[u] = \mathbb{F}_8$ . Ainsi le centralisateur de  $u$  dans  $G_1$  a 7 éléments : ce sont les éléments inversibles de  $C(u) = \mathbb{F}_2[u] = \mathbb{F}_8$ . Chacune des deux classes de conjugaison a donc  $168/7 = 24$  éléments.

Par ailleurs un élément d'ordre 7 de  $G_1$  vérifie  $u^7 - 1 = 0$ . Son polynôme minimal est donc un diviseur de  $X^7 - 1$  de degré inférieur ou égal à 3 d'après le théorème de Cayley-Hamilton. La factorisation en irréductible de  $X^7 - 1$  donnée par (\*) assure que  $\pi_u = X^3 + X + 1$  ou  $X^3 + X^2 + 1$  ou  $X - 1$ . Le dernier cas est impossible puisqu'alors  $u = \text{id}$  n'est pas d'ordre 7.

Finalement les deux classes de conjugaison donnée par (i) et (ii) sont les classes de conjugaison des éléments d'ordre 7. Il y a donc 48 éléments d'ordre 7 et donc 8 7-Sylow dans  $G_1$ . *Fin.*

Dans le cas (iii), on a  $\pi_u = (X - 1)$  ou  $\pi_u = (X - 1)^2 = X^2 - 1$  ou  $\pi_u = (X - 1)^3$  ce qui donne trois nouvelles classes de conjugaison.

*Digression sur les éléments d'ordre 1, 2 ou 4.* La classe de conjugaison déterminée par  $\pi_u = X - 1$  est celle de l'identité. La classe de conjugaison déterminée par  $\pi_u = X^2 - 1$  est celle des éléments d'ordre 2 (voir le lemme 2.93). Enfin la classe de déterminée par  $\pi_u = (X - 1)^3$  est celle des éléments d'ordre 4. En effet, si  $\pi_u = (X - 1)^3$  alors  $(u - \text{id})^4 = u^4 - \text{id} = 0$  et donc l'ordre de  $u$  est 1, 2 ou 4. Si  $u$  est d'ordre 1 alors  $\pi_u = X - 1 \neq (X - 1)^3$ , si  $u$  est d'ordre 2 alors  $\pi_u = X^2 - 1 \neq (X - 1)^3$ . Ainsi  $u$  est d'ordre 4. Réciproquement si  $u$  est d'ordre 4 alors  $u^4 - \text{id} = 0$ . Le polynôme minimal est donc un diviseur de  $X^4 - 1 = (X - 1)^4$  de degré inférieur ou égal à 3 d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Ainsi  $\pi_u = (X - 1)^i$  avec  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Le cas  $i = 1$  et  $i = 2$  sont à exclure puisqu'ils donnent des éléments d'ordre 1 et 2. Finalement la classe de conjugaison déterminée par  $\pi_u = \chi_u = (X - 1)^3$  est celle des éléments d'ordre 4.

Déterminons le nombre d'éléments d'ordre 4 c'est-à-dire le cardinal de la classe de conjugaison déterminée par  $\pi_u = \chi_u = (X - 1)^3$ . Comme  $\pi_u = \chi_u$ , le commutant  $C(u)$  de  $u$  est  $\mathbb{F}_2[u] = \mathbb{F}_2[X]/\langle (X - 1)^3 \rangle$ . Ainsi le centralisateur de  $u$  dans  $G_1$  est formé des éléments inversibles de  $C(u) = \mathbb{F}_2[u]$ . Or les éléments inversibles de  $\mathbb{F}_2[u] = \mathbb{F}_2[X]/\langle (X - 1)^3 \rangle$  sont en bijection via la surjection canonique avec les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 qui sont premiers avec  $\pi_u = (X - 1)^3$  c'est-à-dire qui ne sont pas divisible par  $X - 1$ . Les éléments non inversibles de  $C(u)$  sont donc les éléments de  $\langle (X - 1) \rangle \mathbb{F}_2[X]/\langle (X - 1)^3 \rangle \simeq \mathbb{F}_2[X]/\langle (X - 1)^2 \rangle$ . Finalement il y a 4 éléments non inversibles dans  $C(u)$  et 4 éléments inversibles. Il y a donc  $168/4 = 42$  éléments d'ordre 4 dans  $G_1$ . *Fin.*

Dans le cas (iv), on a  $\pi_u = \chi_u$ . En effet,  $X^2 + X + 1$  est irréductible sur  $\mathbb{F}_2$  car il est de degré 2 et n'a pas de racines dans  $\mathbb{F}_2$ . Comme le polynôme minimal et le polynôme caractéristique font intervenir les mêmes facteurs irréductibles, on a l'égalité voulue et donc une nouvelle classe de conjugaison.

*Digression sur les éléments d'ordre 3.* Si  $u$  est dans cette classe de conjugaison alors  $u$  est d'ordre 3. En effet, on a  $u^3 = \text{id}$  et  $u \neq \text{id}$  puisque  $\pi_u \neq X - 1$ . Réciproquement, si  $u$  est d'ordre 3 alors  $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$  est un polynôme annulateur de  $u$ . Le polynôme minimal de  $u$  est donc un diviseur de  $(X - 1)(X^2 + X + 1)$ . Ainsi  $\pi_u \in \{X - 1, X^2 + X + 1, X^3 - 1\}$ . Le premier cas est impossible car alors  $u = \text{id}$  n'est pas d'ordre 3. Le deuxième cas est impossible car  $X^2 + X + 1$  est irréductible. En effet, comme le polynôme minimal et le polynôme caractéristique ont les mêmes facteurs irréductibles, on a  $\chi_u = (X^2 + X + 1)^n$  qui est de degré 3 ce qui est absurde. Ainsi  $\pi_u = X^3 - 1$ . Ainsi la classe de conjugaison  $\chi_u = \pi_u = X^3 - 1$  est celle des éléments d'ordre 3.

Déterminons le nombre d'éléments d'ordre 3 dans  $G_1$  c'est-à-dire le nombre d'éléments de la classe de conjugaison déterminée par  $\pi_u = \chi_u = (X - 1)^3$ . Comme  $\chi_u = \pi_u$ , le commutant  $C(u)$  de  $u$  est

$$\mathbb{F}_2[u] = \mathbb{F}_2[X]/\langle \pi_u \rangle = \mathbb{F}_2[X]/\langle X - 1 \times \mathbb{F}_2[X]/\langle X^2 + X + 1 \rangle \rangle.$$

Comme  $X^2 + X + 1$  est irréductible de degré 2, on en déduit que  $\mathbb{F}_2[u] = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_4$ . Ainsi le centralisateur de  $u$  dans  $G_1$  qui est  $C(u)^\times = \mathbb{F}_2[u]^\times$  a 3 éléments. Il y a donc  $168/3 = 56$  éléments d'ordre 3 dans  $G_1$  et donc 28 3-Sylow dans  $G_1$ . *Fin.*

Finalement, on obtient 6 classes de conjugaison et donc 6 représentations irréductibles de  $G_1$ .

On suppose que  $n_1 \leq \dots \leq n_6$ . Comme  $13^2 = 169 > |G_1| = 168$ , on obtient  $n_i < 13$ . De plus,  $n_i$  divise  $|G_1|$  donc  $n_i \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12\}$ . Comme 2 n'est pas le degré d'une représentation irréductible de  $G_1$ , on a  $n_i \in \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 12\}$ . Enfin,  $G_1$  n'a qu'une seule représentation irréductible de dimension 1. On en déduit que  $n_1 = 1$  et  $n_i \in \{3, 4, 6, 7, 8, 12\}$  pour  $i \geq 2$ .

Montrons que  $n_6 = 8$ . Si  $n_6 = 12$  alors  $36 = 4 \cdot 3^2 \leq n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 = 168 - 1 - 144 = 23$ . Si  $n_6 \leq 4$  alors  $n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 + n_6^2 = 167 \leq 5 \cdot 4^2 = 80$ . Si  $n_6 = 6$  alors par raison de parité  $n_2 = 3$  et on a  $n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 = 122 \leq 3 \cdot 6^2 = 108$ . Ces trois inégalités étant absurdes, on en déduit que  $n_6 \in \{7, 8\}$ . Il reste donc à écarter le cas  $n_6 = 7$ . Si  $n_6 = 7$  alors  $n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 = 118$ . On ne peut avoir  $n_4 = 7$ , sinon on aurait  $n_5 = 7$  et  $n_2^2 + n_3^2 = 20$ . Cela imposerait alors  $n_2, n_3 \in \{3, 4\}$  et  $20 = n_2^2 + n_3^2 \in \{18, 25, 32\}$  ce qui est absurde. Ainsi, si  $n_6 = 7$  alors  $n_4 \in \{3, 4, 6\}$ . Si  $n_5 = 7$  alors  $n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = 69$  et  $n_2, n_3, n_4 \in \{3, 4, 6\}$ . Par raison de parité, on a nécessairement  $n_2 = 3$  et donc  $n_3^2 + n_4^2 = 60$ . Mais  $n_3^2 + n_4^2 \in \{18, 25, 32, 45, 52, 72\}$  et donc  $n_5 \in \{3, 4, 6\}$ . Si  $n_2 = 3$  alors par raison de parité, on a aussi  $n_3 = 3$  et donc  $n_4^2 + n_5^2 = 100 \leq 6^2 + 6^2 = 72$ . On en déduit que  $n_2 \in \{4, 6\}$ . On a alors  $n_i \in \{4, 6\}$  pour  $2 \leq i \leq 5$  et donc  $118 = n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 \in \{64, 84, 104, 124, 144\}$ . Finalement  $n_6 \neq 7$  et donc  $n_6 = 8$ .

Montrons à présent que  $n_5 = 7$ . Comme  $n_6 = 8$ , il reste  $n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 = 103$ . Si  $n_5 = 8$  alors  $n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = 39 < 49$  donc  $n_4 \leq 6$ . Par parité, on a alors  $n_2 = 3$  et donc  $n_3^2 + n_4^2 = 30$ . On en déduit que  $n_4 \leq 4$ . Ainsi  $30 = n_3^2 + n_4^2 \in \{18, 25, 32\}$  et donc  $n_5 \neq 8$ . Si  $n_5 = 6$  alors par parité, on a  $n_2 = 3$  et donc  $n_3^2 + n_4^2 = 58 \in \{18, 25, 32, 45, 52, 72\}$  ce qui donne  $n_5 \neq 6$ . Si  $n_5 \leq 4$  alors  $103 = n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 \leq 4 \cdot 4^2 = 64$ . Finalement  $n_5 = 7$  et  $n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = 54$ .

Montrons que  $n_4 = 6$ . Si  $n_4 \leq 4$  alors  $54 = n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 \leq 3 \cdot 4^2 = 48$ . On en déduit que  $n_4 \in \{6, 7\}$ . Si  $n_4 = 7$  alors  $n_2^2 + n_3^2 = 5$  ce qui est absurde puisque  $n_2 \geq 3$ . On obtient bien  $n_4 = 6$ .

On a alors  $n_2^2 + n_3^2 = 18$  et donc  $n_2 = n_3 = 3$ . Finalement, les dimensions des représentations irréductibles de  $G_1$  sont 1, 3, 3, 6, 7 et 8.

**Lemme 2.95 – Valeurs des caractères de  $GL_3(\mathbb{F}_2)$  sur les éléments d'ordre 2.** Soit  $g \in GL_3(\mathbb{F}_2)$  un élément d'ordre 2 et  $\rho : GL_3(\mathbb{F}_2) \rightarrow GL(V)$  une représentation irréductible de  $GL_3(\mathbb{F}_2)$  sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie. On note  $\chi$  le caractère de  $\rho$ . On a le tableau suivant :

dim $V$	1	3	6	7	8
$\chi(g)$	1	-1	2	-1	0

**Preuve.** Si  $\dim V = 1$  alors  $\rho$  est la représentation triviale et  $\chi(g) = 1$ .

Lorsque  $\dim V > 1$ ,  $\rho$  est injectif. En effet,  $\text{Ker } \rho$  est un sous-groupe du groupe simple de  $G_1 = GL_3(\mathbb{F}_2)$ . Ainsi  $\text{Ker } \rho = \{1\}$  ou  $\text{Ker } \rho = G_1$ . Dans le deuxième cas, on en déduit que  $\rho(g) = 1$  pour tout  $g \in G_1$ . Comme  $\dim V > 1$ , la représentation n'est pas irréductible. Ainsi  $\rho$  réalise un isomorphisme entre  $G_1$  et  $\rho(G_1)$ . En particulier, comme  $G_1$  est simple, son centre et donc celui  $\rho(G_1)$  est trivial. Ainsi  $\rho(G_1)$  ne contient pas d'autres homothétie que  $\text{id}_V$  et si  $g' \neq 1$  alors  $\rho(g') \neq \text{id}_V$ . De plus,  $\rho(g)$  est d'ordre 2 c'est-à-dire une symétrie distincte de  $\text{id}_V$ . Il existe donc une base de  $V$  dans laquelle la matrice de  $\rho(g)$  est  $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ . Par ailleurs, le lemme 2.94 assure  $\det \rho(g) = 1$ . Ainsi le nombre de  $-1$  sur la diagonale est pair.

Finalement, on déduit du paragraphe précédent que pour  $\dim V > 1$ , la multiplicité de la valeur propre  $-1$  est paire strictement positive et distincte de  $\dim V$ . Ainsi si  $\dim V = 3$ , la multiplicité de la valeur propre  $-1$  est 2 et  $\chi(g) = -1$ . Si  $\dim V = 6$ , la multiplicité de la valeur propre  $-1$  est 2 ou 4 et  $\chi(g) \in \{2, -2\}$ . Si  $\dim V = 7$ , la multiplicité de la valeur propre  $-1$  est 2, 4 ou 6 et  $\chi(g) \in \{3, -1, -5\}$ . Si  $\dim V = 8$ , la multiplicité de la valeur propre  $-1$  est 2, 4 ou 6 et  $\chi(g) \in \{4, 0, -4\}$ .

Pour déterminer les valeurs précises de  $\chi(g)$  lorsque  $\dim V \in \{6, 7, 8\}$ , on utilise le caractère de la représentation régulière. On note  $\chi_6$  (resp.  $\chi_7, \chi_8$ ) la valeur de  $\chi(g)$  lorsque  $\dim V = 6$  (resp. 7, 8). On a alors

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 6\chi_6 + 7\chi_7 + 8\chi_8 = 0.$$

En réduisant modulo 8, on obtient  $3 - 2\chi_6 - \chi_7 \equiv 0 [8]$ . Si  $\chi_7 = 3$  alors  $2\chi_6 \equiv 0 [8]$  ce qui est absurde. Si  $\chi_7 = -5$  alors  $2\chi_6 \equiv 0 [8]$  ce qui est absurde. Finalement  $\chi_7 = -1$ . En réduisant modulo 3, on obtient  $1 + \chi_7 - \chi_8 \equiv 0 [3]$  qui impose  $\chi_8 \equiv 0 [3]$  et donc  $\chi_8 = 0$ . En réduisant modulo 7, on obtient  $2 - \chi_6 + \chi_8 \equiv 0 [7]$  et donc  $\chi_6 \equiv 2 [7]$  et donc  $\chi_6 = 2$ .

**Proposition 2.96 – Le groupe  $G_{24}$ .** Soient  $\rho : G_1 \rightarrow GL(V)$  une représentation irréductible de  $G_1$  de dimension 3 et  $g \in G_1$  d'ordre 2. Alors  $-\rho(g)$  est une réflexion.

On pose  $G = \langle -\rho(g), \quad g \in G_1 \text{ d'ordre 2} \rangle$ . Le groupe  $G \subset GL(V)$  est un groupe de réflexion complexe irréductible. On a  $G = \rho(G_1) \times \{-1, 1\}$  et les réflexions de  $G$  sont les éléments de la forme  $-\rho(g)$  pour  $g \in G_1$  d'ordre 2. Elles sont d'ordre 2, il y en a 21 et elles sont toutes conjuguées.

Les degrés caractéristiques de  $G$  sont 4, 6 et 14. De plus,  $G$  n'est pas un groupe de Coxeter et est primitif. On a  $G = G_{24}$ .

**Preuve.** Le lemme 2.95 assure qu'il existe une base de  $V$  dans laquelle la matrice de  $\rho(g)$  est  $\text{diag}(-1, -1, 1)$ . Ainsi  $-\rho(g)$  est une réflexion.

Comme  $G \subset \pm \rho(G_1)$ , on en déduit que  $G$  est fini et engendré par des réflexions. Ainsi  $G$  est un groupe de réflexion complexe. De plus, comme  $-\text{id}_V \notin \rho(G_1)$  (puisque  $\rho(G_1) \subset SL(V)$ ), on en déduit que  $\pm \rho(G_1) = G_1 \times \{-1, 1\}$ . Par ailleurs, on considère dans  $G_1$  les éléments d'ordre 2

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ils vérifient  $uvw = \text{Id}_3$ . On obtient ainsi  $(-\rho(u))(-\rho(v))(-\rho(w)) = -\text{id} \in G$ . De plus,  $G_1 = SL_3(\mathbb{F}_2)$  est engendré par les transvections qui sont d'ordre 2 puisqu'on travaille sur  $\mathbb{F}_2$ . On en déduit que  $\rho(G_1)$  est engendré par les  $\rho(g)$  pour  $g$  d'ordre 2. Comme  $\rho(g) = (-\rho(g))(-\text{id}) \in G$  pour  $g$  d'ordre 2, on en déduit que  $\rho(G_1) \subset G$ . Finalement, comme  $-\text{id} \in G$ , on a aussi  $-\rho(G_1) \subset G$  et donc  $G = \pm \rho(G_1) = \rho(G_1) \times \{-1, 1\}$ .

Ainsi  $G$  est un groupe de réflexions complexes d'ordre 336 qui agit de façon irréductible sur  $V$  puisque son sous-groupe  $\rho(G_1)$  agit déjà sur  $V$  de façon irréductible. De plus, comme  $G = \pm \rho(G_1)$ , on a  $\det G \subset \{-1, 1\}$ . Les réflexions de  $G$  sont donc nécessairement d'ordre 2 et contenu dans  $-G_1$ . Il s'agit donc de l'ensemble  $\{-\rho(g), g \text{ d'ordre 2}\}$  qui est de cardinal 21 puisque  $\rho$  est injectif (voir le lemme 2.93). De plus, toujours grâce au lemme 2.93, elles sont toutes conjuguées.

Déterminons à présent les degrés caractéristiques de  $G$ . On les note  $d_1 \leq d_2 \leq d_3$ . On a alors

$$d_1 d_2 d_3 = 2 \cdot 168 = 336 \quad \text{et} \quad d_1 + d_2 + d_3 = 24.$$

De plus,  $G$  agit de façon irréductible sur  $V$  puisque c'est déjà le cas pour  $G_1$ . On en déduit que  $d_i \geq 2$  et donc  $d_i \leq 20$ . On a aussi  $d_3 > 8$  puisque  $24 = d_1 + d_2 + d_3 \leq 3d_3$  et si  $d_3 = 8$  alors  $d_1 = d_2 = d_3 = 8$  et  $336 = 8^3 = 2^9$  ce qui est absurde. Comme  $d_3$  est un diviseur de 336, on a  $d_3 \in \{12, 14, 16\}$ . Si  $d_3 = 12$  alors  $d_1 + d_2 = 12$  et  $d_1 d_2 = 28$  mais le polynôme  $X^2 - 12X + 28$  n'a pas de racines entières. Si  $d_3 = 16$  alors  $d_1 + d_2 = 8$  et  $d_1 d_2 = 21$  mais le polynôme  $X^2 - 8X + 21$  n'a pas de racines entières (on pourrait aussi éliminer ce cas par le fait que  $d_i$  est pair pour tout  $i$  puisqu'un polynôme invariant sous  $G$  n'a que des composantes homogènes paires puisque  $-\text{id} \in G$ ). Donc  $d_3 = 14$  et  $d_1 + d_2 = 10$  et  $d_1 d_2 = 24$ . Ainsi  $d_1$  et  $d_2$  sont racines de  $X^2 - 10X + 24$  ce qui donne  $d_1 = 4$  et  $d_2 = 6$  et  $d_3 = 14$ . Le groupe  $G$  n'est donc pas un groupe de Coxeter puisque  $d_i \neq 2$  pour tout  $i$  (voir la proposition 1.69).

On suppose que  $G$  est imprimitif. Comme  $G$  agit sur un espace de dimension 3, on obtient une décomposition de  $V$  de la forme  $V = V_1 \oplus V_2$  avec  $\dim V_i = i$  ou de la forme  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$  avec  $\dim V_i = 1$ . Dans le premier type de décomposition, les sous-espaces  $V_i$  sont stables par  $G$  par raison de dimension. Comme  $G$  agit de façon irréductible sur  $V$ , la première situation est impossible. On en déduit qu'il existe un morphisme  $\delta : G \rightarrow \mathfrak{S}_3$ . De plus,  $\delta(G)$  est un sous-groupe transitif sur  $\{1, 2, 3\}$  car  $G$  agit de façon irréductible. Ainsi  $\delta(G) = \mathfrak{S}_3$  ou  $\delta(G) = \mathfrak{A}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Par composition avec l'inclusion de  $G_1 \rightarrow G = G_1 \times \{-1, 1\}$ , on obtient une morphisme de  $G_1$  dans  $\mathfrak{S}_3$  ou  $\mathfrak{A}_3$ . La simplicité de  $G_1$  montre alors que ce morphisme est trivial : le noyau du morphisme n'est pas  $\{1\}$  puisque  $3 < 6 < 168$  et donc est  $G_1$ . Ainsi le noyau de  $\delta$  est d'indice 1 ou 2 dans  $G$  et donc l'image est de cardinal 1 ou 2 ce qui contredit le fait que  $\delta(G) = \mathfrak{S}_3$  ou  $\delta_3 = \mathfrak{A}_3$ . Le groupe  $G$  est donc primitif. On regarde alors la classification de Shephard et Todd et grâce aux  $d_i$ , on trouve  $G_{24}$ .

**Corollaire 2.97 — Étude des hyperplans de  $G_{24}$ .** Les caractères linéaires de  $G_{24}$  sont le caractère trivial et le déterminant. Les degrés des représentations irréductibles de  $G_{24}$  sont 1, 1, 3, 3, 3, 6, 6, 7, 7, 8, 8.

Il n'y a qu'une seule classe de conjugaison de réflexions et qu'une seule classe de conjugaison d'hyperplans (qu'on note  $C$ ) dans  $G_{24}$ . On a le tableau suivant

$\rho$	$\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$	$3_1 \otimes \mathbf{1}$	$3_2 \otimes \mathbf{1}$	$6 \otimes \mathbf{1}$	$7 \otimes \mathbf{1}$	$8 \otimes \mathbf{1}$	$\mathbf{1} \otimes \varepsilon$	$3_1 \otimes \varepsilon$	$3_2 \otimes \varepsilon$	$6 \otimes \varepsilon$	$7 \otimes \varepsilon$	$8 \otimes \varepsilon$
$\det(\rho)$	1	1	1	1	1	1	$\det$	$\det$	$\det$	1	$\det$	1
$(n_j, C(\rho))_{0 \leq j \leq 1}$	$(1, 0)$	$(1, 2)$	$(1, 2)$	$(4, 2)$	$(3, 4)$	$(4, 4)$	$(0, 1)$	$(2, 1)$	$(2, 1)$	$(2, 4)$	$(4, 3)$	$(4, 4)$
$n_C(\rho)$	0	2	2	2	4	4	1	1	1	4	3	4
$e_C - n_C(\mathbf{1})$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$e_C - n_C(\det)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\rho - \text{exc.}$	<b>oui</b>	non	non	non	non	non	<b>oui</b>	<b>oui</b>	<b>oui</b>	non	non	non
$\rho - \text{bon}$	<b>oui</b>	non	non	non	non	non	<b>oui</b>	<b>oui</b>	<b>oui</b>	non	non	non
$(\rho, \mathbf{1}) - \text{bon}$	<b>oui</b>	non	non	non	non	non	<b>oui</b>	<b>oui</b>	<b>oui</b>	non	non	non
$(\rho, \det) - \text{bon}$	<b>oui</b>	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
$(\rho, \mathbf{1}) - \text{acc.}$	<b>oui</b>	<b>oui</b>	<b>oui</b>	<b>oui</b>	non	non	<b>oui</b>	<b>oui</b>	<b>oui</b>	non	<b>oui</b>	non
$(\rho, \det) - \text{acc.}$	<b>oui</b>	non	non	non	non	non	<b>oui</b>	<b>oui</b>	<b>oui</b>	non	<b>oui</b>	non

**Preuve.** Les représentations irréductibles de  $\{-1, 1\}$  sont la triviale  $\mathbf{1}$  et l'inclusion  $\varepsilon : \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ . Par ailleurs,  $G = G_1 \times \{-1, 1\}$ . Ainsi les représentations irréductibles de  $G$  sont les  $\rho \otimes \rho'$  où  $\rho$  est une représentation irréductible de  $G_1$  et  $\rho'$  une représentation irréductible de  $\{-1, 1\}$ . On nomme les représentations irréductibles de  $G_1$  suivant leur dimension :  $\mathbf{1}, 3_1, 3_2, 6, 7$  et  $8$ . On trouve ainsi deux représentations irréductibles de degré 1 pour  $G$ . Comme  $\det$  et  $\mathbf{1}$  sont deux caractères linéaires distincts, on a ainsi les deux représentations irréductibles de dimension 1

Comme on l'a vu dans le lemme 2.96, il n'y a qu'une seule classe de conjugaison de réflexions et donc qu'une seule classe de conjugaisons d'hyperplans. On aurait alors utiliser le théorème 1.47 pour calculer les caractères linéaires de  $G$ .

Expliquons à présent le tableau (voir les notations à la définition 2.3, à la notation 1.42 et à la remarque 1.45).

(i) La première ligne donne la représentation irréductible.

(ii) La deuxième ligne donne le déterminant de la représentation en question. Pour calculer ce déterminant, il suffit de vérifier le comportement sur les réflexions et donc de vérifier la parité de la multiplicité de  $-1$

comme valeur des réflexions (ligne 3).

- (iii) La troisième ligne donne les multiplicités des valeurs propres 1 et  $-1$  pour l'action des réflexions.
- (iv) La quatrième ligne calcule  $\sum_{j=0}^1 j n_{j,C}(\rho) = n_{1,C}(\rho)$ .
- (v) Les cinquième et sixième ligne calcule deux quantités indépendantes de  $\rho$  auxquelles il faut comparer  $n_C(\rho)$  pour savoir si  $C$  est ou non  $\rho$ -bon,  $\rho$ -excellent, etc.
- (vi) Les lignes 7 à 12 répondent à la question  $C$  est-elle une classe  $\rho$ -bonne,  $\rho$ -excellente, etc. (voir la définition 2.3 et les remarques 2.4 et 2.5).

*Bilan.* On note  $M$  l'espace vectoriel de la représentation  $\rho$ . L'algèbre  $(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi$  est une  $S(V^*)^G$ -algèbre extérieure si  $\rho \in \{\mathbf{1}, \det, 3_1 \otimes \varepsilon, 3_2 \otimes \varepsilon\}$ . Les représentations  $3_1 \otimes \varepsilon$  et  $3_2 \otimes \varepsilon$  désigne la représentation de réflexions et sa conjuguée. Pour les autres représentations, il est nécessaire d'inverser les formes linéaires correspondant aux hyperplans de  $C$  pour appliquer la proposition 2.20.



## Partie 2

# Catégorie stable



# CHAPITRE 3

## RAPPELS : CATÉGORIES

Ce chapitre propose des rappels en vue du chapitre 4. Il est divisé en quatre sections. Dans la section 3.1, on rappelle juste la définition d'algèbre symétrique. La section 3.2 est, quant à elle, consacrée à des rappels sur l'adjonction. On y définit en particulier les objets qu'on cherche à annuler dans le chapitre 4 : les objets M-split. La section 3.3 regroupe des résultats sur les catégories abéliennes et triangulées qui seront utilisés en permanence dans le chapitre 4. Enfin, on termine ce chapitre de rappel, par une section dédiée aux complexes dans une catégorie additive qui servira dans la section 4.1.

### 3.1 ALGÈBRE SYMÉTRIQUE

Dans cette section, on rappelle la définition des algèbres symétriques qui servira pour les contre-exemples 4.12 et 4.13. Avant d'arriver à la définition d'algèbre symétrique (dans la sous-section 3.1.2), on étudie certaines formes linéaires : les formes centrales et les formes symétrisantes.

Dans cette section,  $R$  désigne un anneau commutatif unitaire et  $A$  une  $R$ -algèbre associative unitaire.

#### 3.1.1 FORME LINÉAIRE

Dans cette sous-section, on définit et étudie brièvement certaines formes linéaires sur  $A$  qui sont à la base de la définition d'algèbre symétrique : les formes centrales (définition 3.1) et les formes symétrisantes (définition 3.3).

##### FORME CENTRALE

Les formes centrales sur  $A$  sont celles qui compensent le défaut de commutativité de  $A$ . Ce lien avec la commutativité leur donne des propriétés importantes vis-à-vis de linéarité (lemme 3.2).

**Définition 3.1 – Forme centrale.** Soit  $t \in A^* = \text{Hom}_R(A, R)$ . On dit que  $t$  est une *forme centrale sur  $A$*  si pour tous  $a, a' \in A$ , on a  $t(aa') = t(a'a)$ . On note  $\text{CF}(A)$  l'ensemble des formes centrales sur  $A$ .

**Lemme 3.2 – Linéarité.** L'application

$$\Delta: \begin{cases} A^* \longrightarrow \text{Hom}_R(A, A^*) \\ t \longmapsto \hat{t}: a \mapsto (b \mapsto t(ab)) \end{cases}$$

est un morphisme de  $A$ -modules- $A$ .

Pour  $t \in \text{CF}(A)$ , l'application

$$\Delta(t) = \hat{t}: \begin{cases} A \longrightarrow A^* \\ a \longmapsto (b \mapsto t(ab)) \end{cases}$$

est un morphisme de  $A$ -modules- $A$ .

**Preuve.** On considère les structures naturelles de  $A$ -module de  $A$  et de  $A^*$  (voir exemple 1.4). En suivant la définition 1.2, on munit alors  $\text{Hom}_R(A, A^*)$  d'une structure de  $A \otimes A^{\text{op}}$ -module c'est-à-dire de  $A$ -module- $A$ . On a ainsi

$$\forall a, b \in A, \quad \forall f \in \text{Hom}_R(A, A^*), \quad \forall m, n \in A, \quad (a \cdot f \cdot b)(m)(n) = f(bm)(na).$$

Pour tout  $t \in A^*$ , l'application  $\hat{t}$  est  $R$ -linéaire. L'application  $\Delta$  est bien sûr  $R$ -linéaire. De plus, pour  $t \in A^*$  et  $a, b, m, n \in A$ , on a

$$\Delta(a \cdot t \cdot b)(m)(n) = (a \cdot t \cdot b)(mn) = t(bmna) \quad \text{et} \quad (a \cdot \Delta(t) \cdot b)(m)(n) = \Delta(t)(bm)(na) = t(bmna).$$

Ainsi  $\Delta$  est bien un morphisme de  $A$ -modules- $A$ .

Supposons à présent que  $t$  soit une forme centrale et calculons  $\widehat{t}((b \otimes c) \cdot a) = \widehat{t}(bac)$ . On a

$$\widehat{t}(bac)(d) = t(bacd) = t(acdb) = \widehat{t}(a)(cdb).$$

Or, d'après l'exemple 1.4, on a  $\widehat{t}(a)(cdb) = ((b \otimes c) \cdot \widehat{t}(a))(d)$  et  $\widehat{t}$  est un morphisme de  $A$ -modules- $A$ . ■

### FORME SYMÉTRISANTE

Aux propriétés de commutativité des formes centrales, on ajoute une propriété de bijectivité pour obtenir les formes symétrisantes. On peut alors décrire toutes les formes centrales et toutes les formes symétrisantes (lemme 3.4).

**Définition 3.3 — Forme symétrisante.** Une forme linéaire  $t \in A^*$  est appelée forme symétrisante sur  $A$  si  $t$  est une forme centrale et si l'application associée  $\widehat{t}$  est bijective. D'après le lemme 3.2, l'application  $\widehat{t}$  est alors un isomorphisme de  $A$ -modules- $A$ .

**Lemme 3.4 — Ensemble des formes centrales et des formes symétrisantes.** Soit  $t$  une forme symétrisante sur  $A$ .

- (i) La restriction de  $\widehat{t}$  à  $ZA$  réalise une bijection entre  $ZA$  et l'ensemble des formes centrales sur  $A$ .
- (ii) La restriction de  $\widehat{t}$  à  $ZA^\times$  réalise une bijection entre  $ZA^\times$  et l'ensemble des formes symétrisantes sur  $A$ .

**Preuve.** Commençons par (i). La forme  $\widehat{t}(a)$  est centrale si et seulement si  $\widehat{t}(a)(bc) = \widehat{t}(a)(cb)$  pour tous  $b, c \in A$ . Or  $\widehat{t}(a)(bc) = t(abc) = t(cab) = \widehat{t}(ca)(b)$  et  $\widehat{t}(a)(cb) = t(acb) = \widehat{t}(ac)(b)$ . Ainsi, la forme  $\widehat{t}(a)$  est centrale si et seulement si  $\widehat{t}(ac) = \widehat{t}(ca)$  pour tout  $c \in A$ . Comme  $\widehat{t}$  est bijective, la forme  $\widehat{t}(a)$  est centrale si et seulement si  $ac = ca$  pour tout  $c \in A$  si et seulement si  $a \in ZA$ .

Passons à (ii). Soient  $a, b, c \in A$ , on a  $\widehat{t}(a)(b)(c) = \widehat{t}(a)(bc) = t(abc) = \widehat{t}(ab)(c)$ . D'où,

$$\forall a, b \in A, \quad \widehat{t}(a)(b) = \widehat{t}(ab).$$

Supposons que  $a \in ZA^\times$ , alors  $\widehat{t}(a)$  est une forme centrale. De plus, comme  $\widehat{t}$  est bijective et  $a$  inversible, on a

$$\widehat{t}(a)(b) = \widehat{t}(a)(b') \iff \widehat{t}(ab) = \widehat{t}(ab') \iff ab = ab' \iff b = b'.$$

Par ailleurs, toute forme linéaire s'écrit  $f = \widehat{t}(b) = \widehat{t}(aa^{-1}b) = \widehat{t}(a)(a^{-1}b)$ . L'application  $\widehat{t}(a)$  est donc bien bijective.

Supposons à présent que  $\widehat{t}(a)$  soit une forme symétrisante. On sait déjà que  $a \in ZA$ . De plus, il existe  $b \in A$  tel que  $\widehat{t}(a)(b) = t$ . Ainsi  $\widehat{t}(ab) = \widehat{t}(1)$ . Comme  $\widehat{t}$  est bijective, on en déduit que  $ab = 1$ . Comme  $a \in ZA$ , on a aussi  $ba = 1$  et donc  $a \in ZA \cap A^\times = ZA^\times$ . ■

### 3.1.2 ALGÈBRE SYMÉTRIQUE

On peut à présent définir les algèbres symétriques et donner l'exemple fondateur des algèbres de groupes.

**Définition 3.5 — Algèbre symétrique.** Soit  $A$  une  $R$ -algèbre associative unitaire. On dit que  $A$  est une  $R$ -algèbre symétrique si  $A$  est un  $R$ -module projectif de type fini et s'il existe une forme symétrisante sur  $A$ .

**Exemple 3.6 — Algèbre de groupe.** Soit  $G$  un groupe fini. L'algèbre  $RG$  du groupe  $G$  sur  $R$  est une  $R$ -algèbre symétrique. En effet,  $RG$  est un  $R$ -module libre de rang  $|G|$  et l'application

$$\begin{cases} RG & \longrightarrow R \\ \sum_{g \in G} \lambda_g g & \longmapsto \lambda_1 \end{cases}$$

est une forme symétrisante. ■

## 3.2 ADJONCTION

Dans cette section, on étudie la notion de paire de foncteurs adjoints. On commence dans la sous-section 3.2.1 par la définition de paire adjointe et la construction de l'unité et de la counité. On montre ensuite comment la bi-

jection naturelle d'adjonction s'exprime en fonction de l'unité et de la counité. Ensuite, dans la sous-section 3.2.2, on étudie les conditions pour que l'unité et la counité soient un monomorphisme ou un épimorphisme en vue de la section 4.2 (voir l'hypothèse 4.14). Enfin, dans la sous-section 3.2.3, on définit les objets qui seront le sujet central du chapitre 4 : les objets M-split.

### 3.2.1 ADJONCTION : DÉFINITION, UNITÉ ET COUNITÉ

Dans cette sous-section, on définit la notion de paire adjointe et les transformations naturelles qui lui sont associées : l'unité et la counité. Dans la remarque 3.10, on montre comment retrouver la bijection naturelle d'adjonction à partir de l'unité et de la counité. Cette remarque et son corollaire 3.11 seront notamment utiles dans la démonstration de la caractérisation des objets M-split (voir la proposition-définition 3.21) mais aussi tout au long du chapitre 4. Enfin, on termine cette sous-section par un exemple de paire biadjointe associée à une algèbre symétrique.

**Définition 3.7 – Foncteurs adjoints, triplet adjoint et paire biadjointe.** Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux catégories,  $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  et  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  deux foncteurs. On dit que  $(F, G)$  est une paire adjointe s'il existe une transformation naturelle  $\varphi = (\varphi_{X,Y})_{X,Y \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'}$  telle que, pour tout couple d'objets  $(X, Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ ,

$$\varphi_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, GX)$$

soit un isomorphisme. Dans ces conditions, on dit que  $F$  est un *adjoint à gauche de  $G$*  et  $G$  un *adjoint à droite de  $F$* .

Si  $(F, G)$  et  $(G, F)$  sont deux paires adjointes, on dit que  $(F, G)$  (ou  $(G, F)$ ) est une paire biadjointe. On notera  $\{F, G\}$  pour une paire biadjointe.

Soient  $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  et  $L, R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  trois foncteurs. On dit que  $(F, L, R)$  est un triplet adjoint si  $(L, F)$  est une paire adjointe et  $(F, R)$  aussi.

**Définition 3.8 – Unité et counité.** Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux catégories,  $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  et  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  deux foncteurs tels que  $(F, G)$  soit une paire adjointe. Pour  $X \in \mathcal{C}$  et  $Y \in \mathcal{C}'$ , on pose

$$\varepsilon_X = \varphi_{X, GX}^{-1}(\text{id}_{GX}) : FGX \longrightarrow X \quad \text{et} \quad \eta_Y = \varphi_{FY, Y}(\text{id}_{FY}) : Y \longrightarrow GFY.$$

On dit que la transformation naturelle  $\varepsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$  est la *counité de la paire*  $(F, G)$  et que la transformation naturelle  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}'} \rightarrow GF$  est l'*unité de la paire*  $(F, G)$ .

**Remarque 3.9 – Naturalité de l'unité et de la counité.** Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux catégories,  $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  et  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  deux foncteurs tels que  $(F, G)$  soit une paire adjointe.

Montrons que l'unité et la counité  $\varepsilon$  et  $\eta$  de la paire  $(F, G)$  sont bien des transformations naturelles. Soient  $X, X'$  deux objets de  $\mathcal{C}$  et  $f : X \rightarrow X'$ . La naturalité de  $\varphi$  assure la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FGX, X) & \xrightarrow{\varphi_{X, GX}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(GX, GX) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FGX, f) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(GX, Gf) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FGX, X') & \xrightarrow{\varphi_{X', GX}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(GX, GX') \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FGX', X') & \xrightarrow{\varphi_{X', GX'}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(GX', GX') \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FGf, X') \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Gf, GX') \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FGX, X') & \xrightarrow{\varphi_{X', GX}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(GX, GX') \end{array}$$

En appliquant le premier diagramme à  $\varepsilon_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FGX, X)$ , on obtient  $Gf = \varphi_{X', GX}(f\varepsilon_X)$ . En appliquant le deuxième diagramme à  $\varepsilon_{X'} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FGX', X')$ , on obtient  $Gf = \varphi_{X', GX}(\varepsilon_{X'} FGf)$ . La bijectivité de  $\varphi_{X', GX}$  donne alors la naturalité de  $\varepsilon$ .

Soient  $Y, Y'$  deux objets de  $\mathcal{C}'$  et  $g : Y' \rightarrow Y$ . La naturalité de  $\varphi$  assure la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, FY) & \xrightarrow{\varphi_{FY, Y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, GFY) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Fg, FY) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(g, GFY) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY', FY) & \xrightarrow{\varphi_{FY', Y'}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y', GFY) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY', FY') & \xrightarrow{\varphi_{FY', Y'}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y', GFY') \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Fg, FY') \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y', GFg) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY', FY) & \xrightarrow{\varphi_{FY', Y'}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y', GFY) \end{array}$$

En appliquant le premier diagramme à  $\text{id}_{FY} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, FY)$ , on obtient  $\eta_Y g = \varphi_{FY, Y'}(Fg)$ . En appliquant le deuxième diagramme à  $\text{id}_{FY'} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY', FY')$ , on obtient  $\varphi_{FY', Y'}(Fg) = GFg \eta_{Y'}$ . On obtient ainsi la naturalité de  $\eta$ . ■

**Remarque 3.10 – Calcul de  $\varphi$  en fonction de l'unité et de la counité.** Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux catégories,  $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  et  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  deux foncteurs tels que  $(F, G)$  soit une paire adjointe. On note  $\varepsilon$  et  $\eta$  l'unité et la

counité de la paire  $(F, G)$ . On peut alors retrouver  $\varphi$  à partir de  $\varepsilon$  et  $\eta$ . De façon précise, pour les objets  $X \in \mathcal{C}$  et  $Y \in \mathcal{C}'$  et les morphismes  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, X)$  et  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, GX)$ , on a

$$\varphi_{X,Y}(f) = Gf \eta_Y \quad \text{et} \quad \varphi_{X,Y}^{-1}(g) = \varepsilon_X Fg.$$

La première égalité résulte de la naturalité de  $\varphi$  qui donne la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, FY) & \xrightarrow{\varphi_{FY,Y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, GFY) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, f) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, Gf) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, X) & \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, GX) \end{array}$$

En choisissant  $\text{id}_{FY} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, FY)$ , on obtient le résultat. La deuxième égalité résulte de la naturalité de  $\varphi$  qui donne la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FGX, X) & \xrightarrow{\varphi_{X,GX}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(GX, GX) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Fg, X) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(g, GX) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, X) & \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, GX) \end{array}$$

En choisissant  $\varepsilon_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FGX, X)$ , on obtient le résultat. ■

**Corollaire 3.11 — Unité, counité, section et rétraction.** Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux catégories,  $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  et  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  deux foncteurs tels que  $(F, G)$  soit une paire adjointe. On note  $\varepsilon$  et  $\eta$  l'unité et la counité de la paire  $(F, G)$ . Pour les objets  $X \in \mathcal{C}$  et  $Y \in \mathcal{C}'$ , on a

$$G(\varepsilon_X)\eta_{GX} = \text{id}_{GX} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{FY}F(\eta_Y) = \text{id}_{FY}.$$

**Preuve.** Il suffit d'appliquer la remarque 3.10 à  $f = \varepsilon_X$  et  $g = \eta_Y$ . ■

**Exemple 3.12 — Le cas d'une algèbre symétrique.** Soient  $k$  un anneau commutatif unitaire et  $A$  une  $k$ -algèbre symétrique (voir la définition 3.5). On considère les foncteurs d'induction de  $k$  à  $A$  et de restriction de  $A$  à  $k$  qui sont donnés respectivement par

$$\text{Ind} = A \otimes_k \bullet \quad \text{et} \quad \text{Res} = A \otimes_A \bullet.$$

Montrons que la paire  $(\text{Ind}, \text{Res})$  est une paire biadjointe.

D'après l'isomorphisme cher à Cartan (voir [BBKA, II.4.1]), la paire  $(\text{Ind}, \text{Res})$  est toujours une paire adjointe. Par ailleurs, toujours grâce à l'isomorphisme cher à Cartan, la paire  $(\text{Res}, \text{Hom}_k(A, \bullet))$  est une paire adjointe. Or par définition,  $A$  est un  $k$ -module projectif, donc le foncteur  $\text{Hom}_k(A, \bullet)$  est isomorphe au foncteur  $A^* \otimes_k \bullet$ . Comme  $A^*$  est isomorphe comme  $A$ -module à gauche à  $A$ , on obtient que le foncteur  $\text{Hom}_k(A, \bullet)$  est isomorphe au foncteur  $A \otimes_k \bullet = \text{Ind}$ . Finalement,  $(\text{Res}, \text{Ind})$  est aussi une paire adjointe. ■

### 3.2.2 UNITÉ, COUNITÉ, MONOMORPHISME ET ÉPIMORPHISME

L'objectif de cette sous-section est de déterminer, en vue du chapitre 4 (voir en particulier l'hypothèse 4.14), quand l'unité (resp. la counité) d'une paire adjointe est un monomorphisme (resp. un épimorphisme). La réponse est donnée dans [MCL, IV.3 Théorème 1] en terme de fidélité des foncteurs de la paire adjointe. On rappelle l'énoncé précis dans la proposition 3.15 dont on tire immédiatement le corollaire 3.16 qui est à la base des hypothèses 4.14. Pour pouvoir énoncer proprement la proposition 3.15, on commence par rappeler quelques définitions et quelques propriétés élémentaires de la théorie des catégories (définition 3.13 et lemme 3.14).

**Définition 3.13 — Section, rétraction.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie,  $X, X'$  deux objets de  $\mathcal{C}$  et  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$ . On dit que  $f$  est une *rétraction de  $X$  sur  $X'$*  si  $f$  a un inverse à gauche c'est-à-dire s'il existe  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X)$  tel que  $fg = \text{id}_{X'}$ . Une rétraction est évidemment un épimorphisme.

On dit que  $f$  est une *section de  $X$  dans  $X'$*  si  $f$  a un inverse à droite c'est-à-dire s'il existe  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X)$  tel que  $gf = \text{id}_X$ . Une section est évidemment un monomorphisme.

On dit que  $f$  *admet une section* si  $f$  est une rétraction et que  $f$  *admet une rétraction* si  $f$  est une section.

**Lemme 3.14 — Composition.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie,  $X, Y$  deux objets de  $\mathcal{C}$  et  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ .

On a les équivalences suivantes

- (i)  $f$  est un monomorphisme (resp. une rétraction, un isomorphisme) ;

(ii) Pour tout objet  $Z$  de  $\mathcal{C}$ , l'application  $f \circ g : g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \rightarrow f \circ g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$  est injective (resp. surjective, bijective).

On a les équivalences suivantes

- (i)  $f$  est un épimorphisme (resp. une section, un isomorphisme) ;
- (ii) Pour tout objet  $Z$  de  $\mathcal{C}$ , l'application  $\circ f : g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow g \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$  est injective (resp. surjective, bijective).

**Preuve.** La définition d'un monomorphisme assure la première équivalence. Si  $f$  admet une section  $g : Y \rightarrow X$  alors  $fg = \text{id}_Y$ . Pour  $g' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$ , on a alors  $fgg' = g'$  avec  $gg' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$ . Réciproquement, en appliquant la surjectivité avec  $Z = Y$  et  $\text{id}_Y \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y)$ , on construit  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  tel que  $fg = \text{id}_Y$ . Si  $f$  est un isomorphisme alors  $f \circ$  aussi. Réciproquement, le cas de la surjectivité assure qu'il existe  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  tel que  $fg = \text{id}_Y$ . Calculons  $gf$ . On a  $fgf = f = f \circ \text{id}_X$ . Or  $f$  est un monomorphisme donc  $gf = \text{id}_X$ . Ainsi  $f$  est un isomorphisme.

La définition d'un épimorphisme assure la première équivalence. Si  $f$  admet une rétraction  $g : Y \rightarrow X$  alors  $gf = \text{id}_X$ . Pour  $g' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ , on a alors  $g'gf = g'$  avec  $g'g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ . Réciproquement, en appliquant la surjectivité avec  $Z = X$  et  $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ , on construit  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  tel que  $gf = \text{id}_X$ . Si  $f$  est un isomorphisme alors  $f \circ$  aussi. Réciproquement, le cas de la surjectivité assure qu'il existe  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  tel que  $gf = \text{id}_X$ . Calculons  $fg$ . On a  $fgf = f = \text{id}_Y \circ f$ . Or  $f$  est un épimorphisme donc  $fg = \text{id}_Y$ . Ainsi  $f$  est un isomorphisme.

Pour démontrer la deuxième équivalence, on aurait pu aussi utiliser le premier résultat dans  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ . ■

**Proposition 3.15 – Adjonction, monomorphisme et épimorphisme.** Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux catégories,  $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  et  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  deux foncteurs. On suppose que  $(F, G)$  est une paire adjointe. On note  $\varepsilon$  et  $\eta$  la counité et l'unité de la paire  $(F, G)$ . On a alors les propositions suivantes :

- (i) le foncteur  $G$  est fidèle si et seulement si  $\varepsilon_X : FGX \rightarrow X$  est un épimorphisme pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  ;
- (ii) le foncteur  $G$  est plein si et seulement si  $\varepsilon_X : FGX \rightarrow X$  admet une rétraction pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  ;
- (iii) le foncteur  $G$  est pleinement fidèle si et seulement si  $\varepsilon_X : FGX \rightarrow X$  est un isomorphisme pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  ;
- (iv) le foncteur  $F$  est fidèle si et seulement si  $\eta_X : X \rightarrow GFX$  est un monomorphisme pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}'$  ;
- (v) le foncteur  $F$  est plein si et seulement si  $\eta_X : X \rightarrow GFX$  admet une section pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}'$  ;
- (vi) le foncteur  $F$  est pleinement fidèle si et seulement si  $\eta_X : X \rightarrow GFX$  est un isomorphisme pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}'$ .

**Preuve.** Pour  $X \in \mathcal{C}$  et  $Y \in \mathcal{C}'$ , on note  $\varphi_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, GX)$  l'isomorphisme définissant l'adjonction. Pour  $X, X' \in \mathcal{C}$ , on considère la composée des applications

$$G : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(GX, GX') \quad \text{et} \quad \varphi_{X',GX}^{-1} : \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(GX, GX') \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FGX, X').$$

La remarque 3.10 assure que, pour  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$ , on a  $\varphi_{X',GX}^{-1}(Gf) = \varepsilon_{X'} \circ FGf$ . Or  $\varepsilon$  est une transformation naturelle entre les foncteurs  $FG$  et  $\text{id}_{\mathcal{C}}$  ; ainsi  $\varphi_{X',GX}^{-1}(Gf) = f \circ \varepsilon_X$ .

Comme  $\varphi_{X',GX}^{-1}$  est un isomorphisme, on en déduit que  $G$  est fidèle (resp. plein, pleinement fidèle) si et seulement si  $\circ \varepsilon_X$  est injective (resp. surjective, resp. isomorphisme) pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}'$ . Le lemme 3.14 donne alors le résultat.

Passons aux propriétés (iv), (v) et (vi). Soient  $Y, Y' \in \mathcal{C}'$ . On considère la composée des applications  $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, Y') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, FY')$  et  $\varphi_{FY',Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, FY') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, GFY')$ . La remarque 3.10 assure que, pour  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, Y')$ , on a  $\varphi_{FY',Y}(Ff) = GFf \circ \eta_Y$ . Or  $\eta$  est une transformation naturelle entre les foncteurs  $\text{id}_{\mathcal{C}'}$  et  $GF$  ; ainsi  $\varphi_{FY',Y}(Ff) = \eta_{Y'} \circ f$ .

Comme  $\varphi_{FY',Y}$  est un isomorphisme, on en déduit que  $F$  est fidèle (resp. plein, pleinement fidèle) si et seulement si  $\eta_{Y'} \circ$  est injective (resp. surjective, resp. isomorphisme) pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{C}'$ . Le lemme 3.14 donne alors le résultat. ■

On en déduit immédiatement le corollaire suivant qui nous servira par la suite (voir l'hypothèse 4.14).

**Corollaire 3.16 – Fidélité et triplet adjoint.** Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux catégories,  $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  et  $L, R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  trois foncteurs tels que  $(F, L, R)$  soit un triplet adjoint. On note  $\varepsilon^R : FR \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$  et  $\eta^R : \text{id}_{\mathcal{C}'} \rightarrow RF$  la counité et l'unité de la paire adjointe  $(F, R)$  et  $\varepsilon^L : LF \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}'}$  et  $\eta^L : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow FL$  la counité de l'unité de la paire adjointe  $(L, F)$ .

On a alors  $\varepsilon_X^R$  est un épimorphisme pour tout  $X$  si et seulement si  $R$  est fidèle et  $\eta_X^L$  est un monomorphisme pour tout  $X$  si et seulement si  $L$  est fidèle.

### 3.2.3 TRIPLET ADJOINT, TRACE ET OBJET M-SPLIT

Dans cette sous-section, on définit et caractérise les objets M-split d'une catégorie (ou M est un foncteur ayant un adjoint à droite et à gauche). Ces objets sont à la base de la problématique du chapitre 4 : que se passe-t-il quand on les annule ? On insiste sur le cas de certaines catégories additives (voir l'hypothèse 3.22) contenant en particulier les catégories abéliennes et triangulées étudiées dans le chapitre 4.

**Notation 3.17** Dans cette sous-section, on fixe  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux catégories et un foncteur  $M : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ . On suppose de plus que M admet un adjoint à droite  $R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  et un adjoint à gauche  $L : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ . On note

$$\varphi_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(MY, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, RX) \quad \text{et} \quad \psi_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(LX, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, MY)$$

les isomorphismes donnant l'adjonction et

$$\varepsilon_X^R : MRX \longrightarrow X, \quad \eta_Y^R : Y \longrightarrow RMY \quad \text{et} \quad \varepsilon_Y^L : LMY \longrightarrow Y, \quad \eta_X^L : X \longrightarrow MLX$$

les unités et counités associées.

**Définition 3.18 — Trace relative.** Dans ce cadre, on peut alors définir une *trace relative* de la façon suivante

$$\text{Tr}^M(X, X') : \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(LX, RX') \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') \\ f \longmapsto \varepsilon_{X'}^R M(f) \eta_X^L. \end{cases}$$

**Exemple 3.19 — Induction d'Harish-Chandra.** Soient  $\mathcal{O}$  un anneau commutatif unitaire,  $G$  un groupe fini,  $U$  un sous-groupe de  $G$  et  $N_G(U)$  le normalisateur de  $U$  dans  $G$ . On pose  $H = N_G(U)/U$ . On considère  $\mathcal{C} = \mathcal{O}G\text{-Mod}$  la catégorie (abélienne) des  $\mathcal{O}G$ -modules et  $\mathcal{C}' = \mathcal{O}H\text{-Mod}$  la catégorie des  $\mathcal{O}H$ -modules. En considérant un  $\mathcal{O}H$ -module comme un  $\mathcal{O}N_G(U)$ -module (sur lequel  $U$  agit trivialement), on peut définir le foncteur

$$M = \mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}N_G(U)} : \mathcal{O}H\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}G\text{-Mod}.$$

Le foncteur  $M$  admet comme adjoint à droite le foncteur « point fixe sous  $U$  » :  $Y \rightarrow Y^U$ . Il admet comme adjoint à gauche le foncteur « point cofixe sous  $U$  » :  $X \rightarrow X_U$ . Les isomorphismes donnant l'adjonction entre  $M$  et les points fixes sous  $U$  sont donnés par

$$\begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}N_G(U)} Y, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}H}(Y, X^U) \\ f \longmapsto (m \mapsto f(1 \otimes m)) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{O}H}(Y, X^U) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}N_G(U)} Y, X) \\ f \longmapsto (\alpha \otimes m \mapsto \alpha f(m)) \end{cases}$$

L'unité et la counité associée sont données par

$$\eta_X^R : \begin{cases} X \longrightarrow (\mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}N_G(U)} X)^U \\ y \longmapsto 1 \otimes y \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon_X^R : \begin{cases} \mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}N_G(U)} X^U \longrightarrow X \\ g \otimes x \longmapsto gx. \end{cases}$$

Pour définir les isomorphismes d'adjonction entre  $M$  et les points cofixes sous  $U$ , on introduit les notations suivantes. On choisit une famille  $(\delta)_{\delta \in G/N_G(U)}$  de représentant des classes à gauche de  $G$  modulo  $N_G(U)$  contenant l'élément 1. Tout élément  $x$  de  $\mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}N_G(U)} Y$  s'écrit alors de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{\delta \in G/N_G(U)} \delta \otimes y_\delta.$$

Enfin, on note  $\pi : X \rightarrow X_U$  la surjection canonique. L'isomorphisme d'adjonction et son inverse sont donnés par

$$\begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{O}H}(X_U, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}G}(X, \mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}N_G(U)} Y) \\ f \longmapsto \left( y \mapsto \sum_{\delta \in G/N_G(U)} \delta \otimes f(\pi(\delta^{-1}y)) \right) \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{O}G}(X, \mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}N_G(U)} Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}H}(X_U, Y) \\ f \longmapsto (\pi(x) \mapsto y_1) \end{cases}$$

où  $y_1$  est la composante suivant 1 de l'écriture de

$$f(x) = \sum_{\delta \in G/N_G(U)} \delta \otimes y_\delta.$$

L'unité et la counité associée sont données par

$$\eta_X^L : \begin{cases} X \longrightarrow \mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}N_G(U)} X_U \\ x \longmapsto \sum_{\delta \in G/N_G(U)} \delta \otimes \pi(\delta^{-1}x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon_X^L : \begin{cases} (\mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}N_G(U)} X)_U \longrightarrow X \\ \pi \left( \sum_{\delta \in G/N_G(U)} \delta \otimes x_\delta \right) \longmapsto x_1. \end{cases}$$

Enfin la trace relative est donnée par

$$\text{Tr}(X, X'): \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{O}_H}(X_U, X'^U) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_G}(X, X') \\ f \longmapsto \left( x \mapsto \sum_{\delta \in G/N_G(U)} \delta f(\pi(\delta^{-1}x)) \right). \end{cases}$$

**Proposition 3.20 – Factorisation par l'image de la trace.** Soient  $X, X', X_1, X'_1$  quatre objets de  $\mathcal{C}$ . On considère  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(LX, RX')$ ,  $\alpha : X_1 \rightarrow X$  et  $\beta : X' \rightarrow X'_1$ . On a alors

$$\beta \circ \text{Tr}^M(X, X')(f) \circ \alpha = \text{Tr}^M(X_1, X'_1)(R(\beta)fL(\alpha)).$$

**Preuve.** Cela résulte simplement du fait que  $\eta^L$  et  $\varepsilon^R$  sont des transformations naturelles : on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\eta_{X_1}^L} & \text{ML}X_1 \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \text{ML}\alpha \\ X & \xrightarrow{\eta_X^L} & \text{ML}X \\ & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{MR}X' & \xrightarrow{\varepsilon_{X'}^R} & X' \\ \text{MR}\beta \downarrow & & \downarrow \beta \\ \text{MR}X'_1 & \xrightarrow{\varepsilon_{X'_1}^R} & X'_1 \end{array}$$

et donc  $\beta \circ \text{Tr}^M(X, X')(f) \circ \alpha = \beta \varepsilon_{X'}^R M f \eta_X^L \alpha = \varepsilon_{X'_1}^R M (R \beta f L \alpha) \eta_{X_1}^L = \text{Tr}^M(X_1, X'_1)(R(\beta)fL(\alpha))$ .

**Proposition-Définition 3.21 – Objet M-split.** Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une rétraction de  $\text{MR}X$  sur  $X$  ;
- (ii) Il existe une section de  $X$  dans  $\text{ML}X$  ;
- (iii) Il existe un objet  $Y$  de  $\mathcal{C}'$  et une rétraction de  $\text{MY}$  sur  $X$  ;
- (iv) Il existe un objet  $Y$  de  $\mathcal{C}'$  et une section de  $X$  dans  $\text{MY}$  ;
- (v)  $\text{Id}_X$  appartient à l'image de  $\text{Tr}^M(X, X)$  ;
- (vi)  $\varepsilon_X^R : \text{MR}X \rightarrow X$  a un inverse à gauche ;
- (vii)  $\eta_X^L : X \rightarrow \text{ML}X$  a un inverse à droite ;
- (viii)  $X$  est relativement projectif : pour tous  $X', X''$ , tout  $\alpha : X \rightarrow X'$  et tout  $\pi : X'' \rightarrow X'$  tel qu'il existe  $\beta : RX' \rightarrow RX''$  vérifiant  $R(\pi)\beta = \text{id}_{RX'}$ , il existe  $\tilde{\alpha} : X \rightarrow X''$  tel que  $\pi \tilde{\alpha} = \alpha$ . En terme de diagramme :

$$\begin{array}{ccc} RX'' & \xrightleftharpoons[\beta]{R\pi} & RX' \\ & & \\ & & X'' \xrightarrow{\pi} X' \\ & & \uparrow \tilde{\alpha} \quad \uparrow \alpha \\ & & X \end{array}$$

- (ix)  $X$  est relativement injectif : pour tous  $X', X''$ , tout  $\alpha : X' \rightarrow X$  et tout  $i : X'' \rightarrow X'$  tel qu'il existe  $\beta : LX'' \rightarrow LX'$  vérifiant  $\beta L(i) = \text{id}_{LX'}$ , il existe  $\tilde{\alpha} : X'' \rightarrow X$  tel que  $\tilde{\alpha} i = \alpha$ . En terme de diagramme :

$$\begin{array}{ccc} LX' & \xrightleftharpoons[\beta]{Li} & LX'' \\ & & \\ & & X' \xrightarrow{i} X'' \\ & & \downarrow \alpha \quad \uparrow \tilde{\alpha} \\ & & X \end{array}$$

Un objet vérifiant ces propriétés est appelé *objet M-split*.

**Preuve.** On a évidemment (i)  $\Rightarrow$  (iii), (ii)  $\Rightarrow$  (iv), (vi)  $\Rightarrow$  (i) et (vii)  $\Rightarrow$  (ii).

(iii)  $\Rightarrow$  (v) et (iv)  $\Rightarrow$  (v). Commençons par le cas où  $X = \text{MY}$ . Le corollaire 3.11 assure que

$$\text{Tr}^M(\text{MY}, \text{MY})(\eta_Y^R \varepsilon_Y^L) = (\varepsilon_{\text{MY}}^R \circ M \eta_Y^R) \circ (M \varepsilon_Y^L \circ \eta_{\text{MY}}^L) = \text{id}_{\text{MY}}.$$

À présent, si  $X$  vérifie (iii) ou (iv), il existe  $i : X \rightarrow \text{MY}$  et  $p : \text{MY} \rightarrow X$  tel que  $\text{id}_X = \text{pid}_{\text{MY}} i$ . On a donc, grâce à la proposition 3.20,  $\text{id}_X$  est dans l'image de  $\text{Tr}^M(X, X)$ .

(v)  $\Rightarrow$  (vi) et (v)  $\Rightarrow$  (vii). Par définition de la trace relative, on a : il existe  $\beta$  tel que

$$\varepsilon_X^R M(\beta) \eta_X^L = \text{id}_X.$$

(iii)  $\Rightarrow$  (viii). Commençons par le cas où  $X = \text{MY}$ . On pose  $\tilde{\alpha} = \varphi_{X'', Y}^{-1}(\beta \circ \varphi_{X', Y}(\alpha))$ . La naturalité de  $\varphi$  donne le diagramme commutatif suivant, qui appliqué à  $\tilde{\alpha}$  montre que  $\pi \tilde{\alpha} = \alpha$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{MY}, \text{X}'') & \xrightarrow{\varphi_{\text{X}'', \text{Y}}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\text{Y}, \text{RX}'') \\
 \pi \circ \downarrow & & \downarrow \text{R}(\pi) \circ \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{MY}, \text{X}') & \xrightarrow{\varphi_{\text{X}', \text{Y}}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\text{Y}, \text{RX}'')
 \end{array}$$

Supposons à présent que  $\text{X}$  vérifie (iii) : il existe  $i : \text{X} \rightarrow \text{MY}$  et  $p : \text{MY} \rightarrow \text{X}$  tel que  $pi = \text{id}_X$ . En appliquant ce qui précède à  $\alpha p : \text{MY} \rightarrow \text{X}'$ , on crée  $\delta : \text{MY} \rightarrow \text{X}''$  tel que  $\pi\delta = \alpha p$ . En posant  $\tilde{\alpha} = \delta i : \text{X} \rightarrow \text{X}''$ , on obtient  $\pi\tilde{\alpha} = \pi\delta i = \alpha pi = \alpha$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (ix). Commençons par le cas où  $\text{X} = \text{MY}$ . On pose  $\tilde{\alpha} = \psi_{\text{Y}, \text{X}''}(\psi_{\text{Y}, \text{X}'}^{-1}(\alpha) \circ \beta)$ . La naturalité de  $\psi$  donne le diagramme commutatif suivant, qui appliqué à  $\psi_{\text{Y}, \text{X}'}^{-1}(\alpha) \circ \beta$  montre que  $\tilde{\alpha}i = \alpha$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\text{LX}'', \text{Y}) & \xrightarrow{\psi_{\text{Y}, \text{X}''}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{X}'', \text{MY}) \\
 \circ L(i) \downarrow & & \downarrow \circ i \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\text{LX}', \text{Y}) & \xrightarrow{\psi_{\text{Y}, \text{X}'}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{X}', \text{MY})
 \end{array}$$

Supposons à présent que  $\text{X}$  vérifie (iv) : il existe  $j : \text{X} \rightarrow \text{MY}$  et  $p : \text{MY} \rightarrow \text{X}$  tel que  $pj = \text{id}_X$ . En appliquant ce qui précède à  $j\alpha : \text{X}' \rightarrow \text{MY}$ , on crée  $\delta : \text{X}'' \rightarrow \text{MY}$  tel que  $\delta i = j\alpha$ . En posant  $\tilde{\alpha} = p\delta : \text{X}'' \rightarrow \text{X}$ , on obtient  $\tilde{\alpha}i = p\delta i = pj\alpha = \alpha$ .

(viii)  $\Rightarrow$  (vi). On considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{X} & \\
 & \downarrow \text{id}_X & \\
 \text{MRX} & \xrightarrow{\varepsilon_X^R} & \text{X}
 \end{array}$$

Le corollaire 3.11 assure que  $\text{R}\varepsilon_X^R : \text{RMRX} \rightarrow \text{RX}$  a un inverse à gauche (par exemple :  $\eta_{\text{RX}}^R$ ). On construit alors grâce à l'hypothèse un inverse à gauche de  $\varepsilon_X^R$ .

(ix)  $\Rightarrow$  (vii). On considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{X} & \\
 & \xrightarrow{\eta_X^L} & \text{MLX} \\
 & \downarrow \text{id}_X & \\
 & \text{X} &
 \end{array}$$

Le corollaire 3.11 assure que  $\text{L}\eta_X^L : \text{LX} \rightarrow \text{LMLX}$  a un inverse à droite (par exemple :  $\varepsilon_{\text{LX}}^L$ ). On construit alors grâce à l'hypothèse un inverse à droite de  $\eta_X^L$ . ■

### LE CAS D'UNE CATÉGORIE R-LINÉAIRE

On fixe, pour le reste de cette sous-section, un anneau commutatif unitaire  $\text{R}$  et on suppose que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont deux catégories  $\text{R}$ -linéaires et que  $\text{M}, \text{L}$  et  $\text{R}$  sont  $\text{R}$ -linéaires (voir la définition 3.25). Pour deux objets  $\text{X}, \text{X}'$  de  $\mathcal{C}$ , la trace relative

$$\text{Tr}^{\text{M}}(\text{X}, \text{X}') : \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\text{LX}, \text{RX}') \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{X}, \text{X}') \\ f \longmapsto \varepsilon_{\text{X}'}^{\text{R}} \text{M}(f) \eta_{\text{X}}^{\text{L}} \end{cases}$$

est alors  $\text{R}$ -linéaire.

**Hypothèse 3.22 — Section, rétraction et somme directe.** On suppose de plus que  $\mathcal{C}$  possède la propriété suivante : pour tous objets  $\text{X}, \text{Y}$  de  $\mathcal{C}$  et tous morphismes  $i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{X}, \text{Y})$  et  $p \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{Y}, \text{X})$  vérifiant  $pi = \text{id}_X$ , il existe  $\text{Z} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  tel que  $\text{Y} = \text{X} \oplus \text{Z}$ ,  $i : \text{X} \rightarrow \text{Y}$  soit l'inclusion canonique et  $p : \text{Y} \rightarrow \text{X}$  la surjection canonique (c'est-à-dire qu'il existe  $j : \text{Z} \rightarrow \text{Y}$  et  $q : \text{Y} \rightarrow \text{Z}$  vérifiant  $qj = \text{id}_Z$ ,  $qi = 0$ ,  $pj = 0$  et  $ip + jq = \text{id}_Y$ ).

**Remarque 3.23 — Catégorie abélienne et triangulée.** La propriété de l'hypothèse 3.22 est automatiquement vérifiée lorsque  $\mathcal{C}$  est abélienne (voir le lemme 3.97) ou prétriangulée et donc aussi si  $\mathcal{C}$  est triangulée (voir le corollaire 3.51).

Lorsque  $\mathcal{C}$  vérifie l'hypothèse 3.22, on peut rajouter quelques propriétés équivalentes dans la proposition-définition 3.21 (voir [BRO, Théorème 6.8]).

**Proposition-Définition 3.24 — Objet M-split.** On suppose que  $\mathcal{C}$  est  $\text{R}$ -linéaire et vérifie l'hypothèse 3.22. Soit  $\text{X}$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $X$  est isomorphe à un facteur direct de  $MRX$ ;
- (ii)  $X$  est isomorphe à un facteur direct de  $MLX$ ;
- (iii)  $X$  est isomorphe à un facteur direct de  $MY$  pour un objet  $Y$  de  $\mathcal{C}'$ ;
- (iv) Il existe une rétraction de  $MRX$  sur  $X$ ;
- (v) Il existe une section de  $X$  dans  $MLX$ ;
- (vi) Il existe un objet  $Y$  de  $\mathcal{C}'$  et une rétraction de  $MY$  sur  $X$ ;
- (vii) Il existe un objet  $Y$  de  $\mathcal{C}'$  et une section de  $X$  dans  $MY$ ;
- (viii)  $Id_X$  appartient à l'image de  $Tr^M(X, X)$ ;
- (ix)  $\varepsilon_X^R : MRX \rightarrow X$  a un inverse à gauche;
- (x)  $\eta_X^L : X \rightarrow MLX$  a un inverse à droite;
- (xi)  $X$  est relativement projectif;
- (xii)  $X$  est relativement injectif.

Un objet vérifiant ces propriétés est appelé *objet M-split*.

**Preuve.** D'après l'hypothèse 3.22, on a (i)  $\Leftrightarrow$  (iv), (ii)  $\Leftrightarrow$  (v), (iii)  $\Leftrightarrow$  (vi) et (viii)  $\Leftrightarrow$  (vii). ■

### 3.3 CATÉGORIE ADDITIVE ET PLUS...

Cette section propose quelques définitions et rappels de résultats classiques de la théorie des catégories. Après avoir rappelé, dans la sous-section 3.3.1, la notion de catégorie  $R$ -linéaire (pour un anneau commutatif  $R$ ) ; on étudie, dans la sous-section 3.3.2, les notions de produits fibrés, sommes amalgamées et foncteurs fidèles dans les catégories abéliennes. Enfin, on termine cette section par la sous-section 3.3.3 consacrée aux propriétés élémentaires des catégories triangulées qui seront utilisées en permanence dans le chapitre 4. On insiste en particulier sur le comportement des monomorphismes, épimorphismes, isomorphismes et sommes directes dans les catégories triangulées (voir les corollaires 3.47 et 3.51). Pour toute cette section, on fixe un anneau commutatif unitaire  $R$ .

#### 3.3.1 CATÉGORIE $R$ -LINÉAIRE

Dans cette sous-section, on se contente de rappeler les définitions de catégories et foncteurs  $R$ -linéaires. En effet, les catégories et les foncteurs étudiés par la suite, notamment au chapitre 4, posséderont cette propriété.

**Définition 3.25 – Catégorie  $R$ -linéaire.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. On dit que  $\mathcal{C}$  est une *catégorie  $R$ -linéaire* si  $\mathcal{C}$  vérifie les axiomes suivants

- (i) pour tous objets  $X, Y$  de  $\mathcal{C}$ , l'ensemble  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  est muni d'une structure de  $R$ -module;
- (ii) pour tous objets  $X, Y, Z$  de  $\mathcal{C}$ , la composition

$$\circ : \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) \longmapsto gf \end{cases}$$

est  $R$ -bilinéaire;

- (iii) il existe, dans  $\mathcal{C}$ , un objet qui est à la fois initial et final;
- (iv) pour tous objets  $X, Y$  de  $\mathcal{C}$ , le produit de  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{C}$  existe.

Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux catégories  $R$ -linéaires et  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur. On dit que  $F$  est  $R$ -linéaire si, pour tous objets  $X, Y$  de  $\mathcal{C}$ , l'application

$$F : \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(FX, FY) \\ f \longmapsto F(f) \end{cases}$$

est  $R$ -linéaire.

Lorsque  $R = \mathbb{Z}$ , on parle de *catégorie additive* et de *foncteur additif* plutôt que de catégorie  $\mathbb{Z}$ -linéaire ou de foncteur  $\mathbb{Z}$ -linéaire.

### 3.3.2 CATÉGORIE ABÉLIENNE

Dans cette sous-section, on étudie quelques aspects des catégories abéliennes. On insiste en particulier sur la notion de somme amalgamée et ses liens avec la notion de produit fibré. En effet, la somme amalgamée sera à la base de la construction des triangles de la catégorie M-stable (voir la définition 4.27). Dans un deuxième temps, on étudie la notion de foncteur fidèle issu d'une catégorie abélienne (proposition 3.36) avec comme arrière pensée les hypothèses 4.14 de travail du chapitre 4.

**Définition 3.26 — Catégorie abélienne.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie R-linéaire. On dit que  $\mathcal{C}$  est R-abélienne si tout morphisme de  $\mathcal{C}$  admet un noyau et un conoyau et si tout monomorphisme est un noyau et tout épimorphisme est un conoyau. Lorsque  $R = \mathbb{Z}$ , on dit simplement *catégorie abélienne* plutôt que catégorie  $\mathbb{Z}$ -abélienne.

#### SOMME AMALGAMÉE ET PRODUIT FIBRÉ

On commence par définir la notion de somme amalgamée dans une catégorie quelconque. On montre ensuite que la somme amalgamée existe toujours dans une catégorie abélienne (exemple 3.29). Enfin, on fait le lien entre produit fibré, somme amalgamée, carré cartésien et carré cocartésien dans une catégorie abélienne (proposition 3.33).

**Définition 3.27 — Somme amalgamée.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie,  $X, X', X''$  trois objets de  $\mathcal{C}$  et  $f : X \rightarrow X'$  et  $g : X \rightarrow X''$  deux morphismes. Une *somme amalgamée de  $X'$  et  $X''$  au-dessus de  $f$  et  $g$*  est un triplet  $(Z, f', g')$  formé d'un objet  $Z$  de  $\mathcal{C}$  et deux morphismes  $f' : X'' \rightarrow Z$  et  $g' : X' \rightarrow Z$  vérifiant

- (i)  $f'g = g'f$ ;
- (ii) pour tout triplet  $(Z', f'', g'')$  formé d'un objet  $Z'$  de  $\mathcal{C}$  et deux morphismes  $f'' : X'' \rightarrow Z'$  et  $g'' : X' \rightarrow Z'$  tel que  $f''g = g''f$ , il existe un unique morphisme  $h : Z \rightarrow Z'$  tel que  $f'' = hf'$  et  $g'' = hg'$  c'est-à-dire qu'on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 & X & \xrightarrow{\quad} & X' & \\
 g \downarrow & & & \downarrow g' & \\
 X'' & \xrightarrow{f'} & Z & \xrightarrow{g''} & Z' \\
 & f'' \swarrow & \text{---} \quad h \quad \text{---} & \searrow g'' & \\
 & & Z & & 
 \end{array}$$

**Exemple 3.28 — Somme amalgamée et isomorphisme.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie,  $X, X', X''$  trois objets de  $\mathcal{C}$  et  $f : X \rightarrow X'$  et  $g : X \rightarrow X''$  deux morphismes. On suppose que  $f$  est un isomorphisme. Montrons que  $(X'', \text{id}_{X''}, gf^{-1})$  est une somme amalgamée de  $X'$  et  $X''$  au-dessus de  $f$  et  $g$ . On a bien sûr  $\text{id}_{X''}g = (gf^{-1})f = g$ . De plus, si  $(Z', f'', g'')$  est un triplet formé d'un objet  $Z'$  de  $\mathcal{C}$  et deux morphismes  $f'' : X'' \rightarrow Z'$  et  $g'' : X' \rightarrow Z'$  vérifiant  $f''g = g''f$  alors en posant  $h = f''$ , on a  $\text{id}_{X''} = h = f''$  et  $hgf^{-1} = f''gf^{-1} = g''$ . Par ailleurs, si  $h$  vérifie  $\text{id}_{X''} = f''$  et  $hgf^{-1} = g''$  alors nécessairement  $h = f''$ . ■

**Exemple 3.29 — Somme amalgamée et catégorie abélienne.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie R-abélienne,  $X, X', X''$  trois objets de  $\mathcal{C}$  et  $f : X \rightarrow X'$  et  $g : X \rightarrow X''$  deux morphismes. Montrons que la somme amalgamée de  $X'$  et  $X''$  au-dessus de  $f$  et  $g$  existe.

On considère  $X' \oplus X''$  la somme directe et  $i_{X'} : X' \rightarrow X' \oplus X''$  et  $i_{X''} : X'' \rightarrow X' \oplus X''$  les morphismes canoniques. On pose alors  $(Z, p) = \text{Coker}(i_{X'}f - i_{X''}g)$ ,  $f' = pi_{X''} : X'' \rightarrow Z$  et  $g' = pi_{X'} : X' \rightarrow Z$ . Comme  $p(i_{X'}f - i_{X''}g) = 0$ , on a  $g'f = f'g$  et donc le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 & X & \xrightarrow{\quad} & X' & \\
 & \downarrow g & & \downarrow g' & \\
 X'' & \xrightarrow{i_{X''}} & X' \oplus X'' & \xrightarrow{p} & Z \\
 & \uparrow i_{X'} & \swarrow f' & \searrow & \\
 & & X' & & 
 \end{array}$$

Considérons à présent un triplet  $(Z', f'', g'')$  formé d'un objet  $Z'$  de  $\mathcal{C}$  et deux morphismes  $f'' : X'' \rightarrow Z'$  et  $g'' : X' \rightarrow Z'$  vérifiant  $f''g = g''f$ . Par définition de la somme directe, il existe un (unique) morphisme  $(g'', f'') : X' \oplus X'' \rightarrow Z'$  tel que  $(g'', f'')i_{X'} = g''$  et  $(g'', f'')i_{X''} = f''$ . On en déduit que

$$(g'', f'')(i_{X'} f - i_{X''} g) = g'' f - g'' g = 0.$$

Ainsi  $(g'', f'')$  se factorise par  $\text{Coker}(i_{X'} f - i_{X''} g)$ . Il existe donc  $h : Z \rightarrow Z'$  tel que  $h p = (g'', f'')$ . On en déduit que  $h g' = g''$  et  $h f' = f''$ . Enfin, si  $h' : Z \rightarrow Z'$  vérifie  $h' g' = g''$  et  $h' f' = f''$  alors  $h' p i_{X'} = g''$  et  $h' p i_{X''} = f''$ . Ainsi, grâce à la propriété universelle de la somme directe, on a  $h' p = (g'', f'') = h p$ . Comme  $p$  est un épimorphisme, on en déduit que  $h = h'$ . Finalement  $(Z, f', g')$  est bien la somme amalgamée de  $X'$  et  $X''$  au-dessus de  $f$  et  $g$ . On la note  $X' \oplus_g X''$ . ■

On passe maintenant au lien entre produit fibré et somme amalgamée. On commence par rappeler la notion de produit fibré : c'est la même que celle de somme amalgamée mais en retournant les flèches.

**Définition 3.30 — Produit fibré.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie,  $X, X', X''$  trois objets de  $\mathcal{C}$  et  $f : X' \rightarrow X$  et  $g : X'' \rightarrow X$  deux morphismes. Un *produit fibré de  $X'$  et  $X''$  au-dessus de  $f$  et  $g$*  est un triplet  $(Z, f', g')$  formé d'un objet  $Z$  de  $\mathcal{C}$  et deux morphismes  $f' : Z \rightarrow X''$  et  $g' : Z \rightarrow X'$  vérifiant

- (i)  $f g' = g f'$ ;
- (ii) pour tout triplet  $(Z', f'', g'')$  formé d'un objet  $Z'$  de  $\mathcal{C}$  et deux morphismes  $f'' : Z' \rightarrow X''$  et  $g'' : Z' \rightarrow X'$  tel que  $f'' g = g'' f$ , il existe un unique morphisme  $h : Z' \rightarrow Z$  tel que  $f'' = f' h$  et  $g'' = g' h$  c'est-à-dire qu'on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} Z' & \xrightarrow{f''} & & & \\ \downarrow h & \nearrow & & & \\ Z & \xrightarrow{f'} & X'' & & \\ \downarrow g' & & \downarrow g & & \\ X' & \xrightarrow{f} & Z & & \end{array}$$

Le lemme élémentaire qui suit est utile pour la démonstration de la proposition 3.33.

**Lemme 3.31 — Somme directe, monomorphisme et épimorphisme.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie R-linéaire,  $X, Y$  et  $Z$  trois objets de  $\mathcal{C}$ .

Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : X \rightarrow Z$  deux morphismes. On note  $h : X \rightarrow Y \oplus Z$  le morphisme donné par  $f$  et  $g$  grâce à la propriété universelle du produit. Si  $f$  ou  $g$  est un monomorphisme alors  $h$  aussi.

Soient  $f : X \rightarrow Z$  et  $g : Y \rightarrow Z$  deux morphismes. On note  $h : X \oplus Y \rightarrow Z$  le morphisme donné par  $f$  et  $g$  grâce à la propriété universelle du coproduit. Si  $f$  ou  $g$  est un épimorphisme alors  $h$  aussi.

**Preuve.** Soit  $\alpha : W \rightarrow X$  tel que  $h \alpha = 0$ . On a donc  $f \alpha = 0$  et  $g \alpha = 0$ . Ainsi  $\alpha = 0$ . Soit  $\alpha : Z \rightarrow W$  tel que  $a h = 0$  alors  $a f = 0$  et  $a g = 0$ . Ainsi  $\alpha = 0$ . ■

**Définition 3.32 — Carré cartésien et cocartésien.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Le carré

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \downarrow g & & \downarrow g' \\ Y & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

est dit

- (i) *cocartésien* si  $Y'$  est la somme amalgamé de  $X'$  et  $Y$  au-dessus de  $f$  et  $g$ .
- (ii) *cartésien* si  $X$  est le produit fibré de  $X'$  et  $Y$  au-dessus de  $f'$  et  $g'$ .

**Proposition 3.33 — Carré cartésien, cocartésien et catégorie abélienne.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie R-abélienne. Le carré suivant est

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \downarrow g & & \downarrow g' \\ Y & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

- (i) *cartésien* si et seulement si la suite  $0 \longrightarrow X \xrightarrow{(f,g)} X' \oplus Y \xrightarrow{(g',-f')} Y' \longrightarrow 0$  est exacte;
- (ii) *cocartésien* si et seulement si la suite  $X \xrightarrow{(f,g)} X' \oplus Y \xrightarrow{(g',-f')} Y' \longrightarrow 0$  est exacte.

Supposons que le carré ci-dessus est cartésien alors  $g\text{Ker } f = \text{Ker } f'$ . De plus, si  $f'$  est un épimorphisme alors le carré est aussi cocartésien et  $f$  est un épimorphisme.

Supposons que le carré ci-dessus est cocartésien alors  $\text{Coker } f = (\text{Coker } f')g'$ . De plus, si  $f$  est un monomorphisme alors le carré est aussi cartésien et  $f$  est un monomorphisme.

**Preuve.** Démontrons (i). La commutativité du carré est équivalente à ce que la composée de deux flèches de la suite soit nulle.

Supposons le carré cartésien. Montrons que  $(f, g)$  est un monomorphisme. Soit  $\alpha : Z \rightarrow X$  tel que  $(f, g)\alpha = 0$ . On a alors  $f\alpha = 0$  et  $g\alpha = 0$ . Or  $0 : Z \rightarrow X$  vérifie aussi  $f0 = 0$  et  $g0 = 0$ . Par unicité (grâce à la structure de produit fibré), on obtient que  $\alpha = 0$ . Ainsi  $(f, g)$  est un monomorphisme. En particulier, on peut choisir  $(f, g)$  comme monomorphisme canonique de  $\text{Im}(f, g)$  dans  $X' \oplus Y$ . Considérons à présent  $\beta : Z \rightarrow X' \oplus Y$  tel que  $(g', -f')\beta = 0$ . On peut écrire  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  avec  $\beta_1 : Z \rightarrow X'$  et  $\beta_2 : Z \rightarrow Y$ . On a alors  $g'\beta_1 = f'\beta_2$ . La propriété universelle du produit fibré assure alors qu'il existe  $\gamma : Z \rightarrow X$  tel que  $\beta_1 = f\gamma$  et  $\beta_2 = g\gamma$ . Autrement dit  $\beta = (f, g)\gamma$ . Ainsi  $\beta$  se factorise par  $(f, g)$  et ceci de façon unique (puisque  $(f, g)$  est un monomorphisme). Finalement  $(X, (f, g))$  est un noyau de  $(g', -f')$  et la suite est exacte.

Réciproquement, on suppose que la suite est exacte. On considère alors  $\beta_1 : Z \rightarrow X'$  et  $\beta_2 : Z \rightarrow Y$  tel que  $f'\beta_2 = g'\beta_1$ . On note alors  $\beta = (\beta_1, \beta_2) : Z \rightarrow X' \oplus Y$ . Dans ce cadre, l'égalité  $f'\beta_2 = g'\beta_1$  se traduit par  $(g', -f')\beta = 0$ . Ainsi  $\beta$  se factorise par  $\text{Ker}(g', -f') = \text{Im}(f, g)$ . Or  $(f, g)$  est un monomorphisme, donc  $(f, g)$  est sa propre image. Ainsi, on peut écrire  $\beta = (f, g)\gamma$  avec  $\gamma : Z \rightarrow X$  c'est-à-dire  $f\gamma = \beta_1$  et  $g\gamma = \beta_2$ . De plus, si  $\gamma'$  vérifie aussi  $f\gamma' = \beta_1$  et  $g\gamma' = \beta_2$ , on en déduit que  $(f, g)\gamma' = \beta$  et  $\gamma = \gamma'$  par la propriété universelle du noyau.

Démontrons (ii). La commutativité du carré est équivalente à ce que la composée de deux flèches de la suite soit nulle.

Supposons le carré cocartésien. Montrons que  $(g', -f')$  est un épimorphisme. Soit  $\alpha : Y' \rightarrow Z$  tel que  $\alpha(g', -f') = 0$ . On a alors  $\alpha g' = 0$  et  $\alpha f' = 0$ . Or  $0 : Y' \rightarrow Z$  vérifie aussi  $0g' = 0$  et  $0f' = 0$ . Par unicité (grâce à la structure de somme amalgamée), on obtient  $\alpha = 0$ . Ainsi  $(g', -f')$  est un épimorphisme. Si on montre que  $(g', -f')$  est un conoyau de  $(f, g)$ , on aura alors  $\text{Im}(f, g) = \text{Ker}(g', -f')$  et la suite sera exacte. Comme  $(g', -f')$  est un épimorphisme, il suffit de montrer que si  $\beta : X' \oplus Y \rightarrow Z$  vérifie  $\beta(f, g) = 0$  alors  $\beta$  se factorise par  $(g', -f')$ . En écrivant  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  avec  $\beta_1 : X' \rightarrow Z$  et  $\beta_2 : Y \rightarrow Z$ , on obtient que  $\beta_1 f = -\beta_2 g$ . La propriété universelle de la somme amalgamée assure alors l'existence de  $\gamma : Y' \rightarrow Z$  tel que  $\gamma g' = \beta_1$  et  $\gamma f' = -\beta_2$  ce qui s'écrit encore  $\gamma(g', -f') = \beta$ .

Réciproquement, on suppose que la suite est exacte. On considère alors  $\beta_1 : X' \rightarrow Z$  et  $\beta_2 : Y \rightarrow Z$  tel que  $\beta_1 f = \beta_2 g$ . En notant  $\beta = (\beta_1, -\beta_2) : X' \oplus Y \rightarrow Z$ , l'égalité  $\beta_1 f = \beta_2 g$  se réécrit  $\beta(f, g) = 0$ . Ainsi  $\beta$  se factorise par le conoyau de  $(f, g)$  qui n'est autre que  $(g', -f')$  par exactitude de la suite. Il existe donc  $\gamma : Y' \rightarrow Z$  tel que  $\gamma(g', -f') = \beta$ . On en déduit que  $\gamma g' = \beta_1$  et  $\gamma f' = \beta_2$ . De plus, si  $\gamma'$  vérifie aussi  $\gamma' g' = \beta_1$  et  $\gamma' f' = \beta_2$ , on en déduit que  $\gamma'(g', -f') = \beta$  et  $\gamma = \gamma'$  par la propriété universelle du conoyau.

Soit  $i$  le noyau de  $f$ . Montrons que  $gi$  est le noyau de  $f'$ . On a  $f'gi = g'fi = 0$ . Soit  $\alpha : Z \rightarrow Y$  tel que  $f'\alpha = 0$ . On considère  $\beta = 0 : Z \rightarrow X'$ . Comme  $g'\beta = 0 = f'\alpha$ , la propriété universelle du produit fibré assure qu'il existe  $\gamma : Z \rightarrow X$  tel que  $g\gamma = \alpha$  et  $f\gamma = \beta = 0$ . Par définition de  $i$ , il existe  $\gamma'$  tel que  $i\gamma' = \gamma$ . Ainsi  $\alpha = gi\gamma'$ . De plus, si  $\beta$  vérifie  $\alpha = gi\beta$  alors, comme  $fi\beta = 0 = fi\gamma'$ , on obtient, par la propriété du produit fibré  $i\beta = i\gamma'$  et donc  $\beta = \gamma'$ .

Soit  $j$  le noyau de  $f'$ . On a  $f'j = 0 = g'0$ . La propriété du produit fibré assure qu'il existe  $i$  tel que  $j = gi$  et  $fi = 0$ . Montrons que  $i$  est le noyau de  $f$ . Comme  $j$  est un monomorphisme,  $i$  en est un. Par ailleurs, supposons que  $f\gamma = 0$ . On a donc  $0 = g'f\gamma = f'g\gamma$ . Ainsi il existe  $\beta$  tel que  $g\gamma = j\beta = gi\beta$ . Comme  $f\gamma = 0 = fi\beta$ , on en déduit que  $\gamma = i\beta$ .

Soit  $q$  le conoyau de  $f'$ . Montrons que  $qg'$  est le conoyau de  $f$ . On a  $qg'f = qf'g = 0$ . Soit  $\alpha : X' \rightarrow Z$  tel que  $\alpha f = 0$ . On considère  $\beta = 0 : Y \rightarrow Z$ . Comme  $\beta g = 0 = \alpha f$ , la propriété universelle de la somme amalgamée assure qu'il existe  $\gamma : Y' \rightarrow Z$  tel que  $\gamma g' = \alpha$  et  $\gamma f' = \beta = 0$ . Par définition de  $q$ , il existe  $\gamma'$  tel que  $\gamma'q = \gamma$ . Ainsi  $\alpha = \gamma'qg'$ . De plus, si  $\beta$  vérifie  $\alpha = \beta qg'$  alors, comme  $\beta qf' = 0 = \gamma'qf'$ , on obtient, par la propriété de la somme amalgamée,  $\beta q = \gamma'q$ . Comme  $q$  est un épimorphisme, on obtient  $\beta = \gamma$ .

Soit  $p$  le conoyau de  $f$ . On a  $pf = 0 = 0g$ . La propriété de la somme amalgamée assure qu'il existe  $q$  tel que  $p = qg'$  et  $qf' = 0$ . Montrons que  $q$  est le conoyau de  $f'$ . Comme  $p$  est un épimorphisme,  $q$  en est un. Par ailleurs, supposons que  $qf' = 0$ . On a donc  $0 = \gamma f'g = \gamma g'f$ . Ainsi, il existe  $\beta$  tel que  $\gamma g' = \beta p = \beta qg'$ . Comme  $\gamma f' = 0 = \beta qf'$ , on en déduit que  $\gamma = \beta q$ .

Supposons le carré cartésien et que  $f'$  est un épimorphisme. D'après (i) et le lemme 3.31, la suite

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{(f,g)} X' \oplus Y \xrightarrow{(g',-f')} Y' \longrightarrow 0$$

est exacte. Le point (ii) assure que le diagramme est cocartésien. De plus, on a  $\text{Coker } f = (\text{Coker } f')g' = 0$  et  $f$  est un épimorphisme.

Supposons le carré cocartésien et que  $f$  est un monomorphisme. D'après (i) et le lemme 3.31, la suite

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{(f,g)} X' \oplus Y \xrightarrow{(g',-f')} Y' \longrightarrow 0$$

est exacte. Le point (ii) assure que le diagramme est cartésien. De plus, on a  $\text{Ker } f' = g \text{Ker } f = 0$  et  $f'$  est un monomorphisme.  $\blacksquare$

### FONCTEUR FIDÈLE ET CATÉGORIE ABÉLIENNE

La structure de catégorie abélienne assure des propriétés aux foncteurs fidèles. Ces propriétés sont présentées dans la proposition 3.36.

**Définition 3.34 – Foncteur conservatif.** Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux catégories et  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur. On dit que  $F$  est *conservatif* si  $F(f)$  est un isomorphisme implique que  $f$  est un isomorphisme.

**Lemme 3.35 – Foncteur fidèle.** Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux catégories et  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur. On suppose que  $F$  est fidèle. Soit  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  tel que  $F(f)$  est un monomorphisme (resp. épimorphisme) alors  $f$  en est aussi un.

**Preuve.** On suppose que  $f \circ g = f \circ h$ . On a  $F(f) \circ F(g) = F(f) \circ F(h)$ . On en déduit que  $F(g) = F(h)$  puisque  $F(f)$  est un monomorphisme. On obtient alors  $g = h$  par la fidélité de  $F$ .

On suppose que  $g \circ f = h \circ f$ . On a  $F(g) \circ F(f) = F(h) \circ F(f)$ . On en déduit que  $F(g) = F(h)$  puisque  $F(f)$  est un épimorphisme. On obtient  $g = h$  par la fidélité de  $F$  (on aurait aussi pu appliquer le raisonnement précédent au foncteur  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}'^{\text{op}}$ ).  $\blacksquare$

**Proposition 3.36 – Foncteur fidèle et catégorie abélienne.** Soient  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne,  $\mathcal{B}$  un catégorie additive et  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur additif. On considère les propriétés suivantes

- (i)  $F$  est fidèle ;
- (ii)  $F$  est conservatif ;
- (iii) Pour un objet  $X \in \mathcal{A}$ , on a  $F(X) = 0 \implies X = 0$ .

On a (i)  $\Rightarrow$  (ii) et (ii)  $\Rightarrow$  (iii). De plus, si  $F$  est exact, on a (iii)  $\Rightarrow$  (i) et les trois propositions sont équivalentes.

**Preuve.** (i)  $\Rightarrow$  (ii). Soit  $f$  tel que  $F(f)$  soit un isomorphisme. Ainsi  $F(f)$  est un monomorphisme et un épimorphisme. Le lemme 3.35 assure que  $f$  est un monomorphisme et un épimorphisme c'est-à-dire un isomorphisme puisque  $\mathcal{A}$  est abélienne.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). On suppose que  $F(X) = 0$  c'est-à-dire  $0_{FX} = \text{id}_{FX}$ . On a donc  $F(0_X) = 0_{FX} = \text{id}_{FX}$  est un isomorphisme. Comme  $F$  est conservatif, on en déduit que  $0_X$  est un isomorphisme. Le noyau de  $0_X$  qui est  $X$  est donc nul. Ainsi  $X = 0$ .

On suppose que  $F$  est exact. Montrons que (iii)  $\Rightarrow$  (i). Soit  $f : X \rightarrow Y$  tel que  $F(f) = 0$ . On note  $\tilde{f} : X \rightarrow \text{Im } f$  l'épimorphisme induit par  $f$  et  $i : \text{Im } f \rightarrow Y$  le monomorphisme canonique tel que  $i\tilde{f} = f$ . On obtient alors  $F(i)F(\tilde{f}) = 0$ . Comme  $F$  est exact,  $F(i)$  est un monomorphisme et  $F(\tilde{f})$  est un épimorphisme. Ainsi  $F(i) = 0$  (et  $F(\tilde{f}) = 0$ ). On en déduit que  $F(i) \circ \text{id}_{\text{Im } f} = 0 = F(i) \circ 0$  puis que  $\text{id}_{F(\text{Im } f)} = 0$  c'est-à-dire  $F(\text{Im } f) = 0$ . L'hypothèse (iii) donne alors  $\text{Im } f = 0$  c'est-à-dire  $f = 0$ .  $\blacksquare$

### 3.3.3 CATÉGORIE TRIANGULÉE

Dans cette sous-section, on étudie les propriétés élémentaires des catégories (pré)triangulées. Ces propriétés seront utilisées en permanence dans le chapitre 4. On étudie en particulier les notions d'isomorphisme et surtout de somme directe dans une catégorie triangulée. Le corollaire 3.51 assure en particulier que les catégories triangulées vérifient l'hypothèse 3.22. Ceci mène à l'étude effectuée dans la section 4.1.

Avant tout, on commence par définir la notion de triangle et d'isomorphisme de triangles dans une catégorie à translation.

**Définition 3.37 – Triangle.** Soient  $(\mathcal{C}, T)$  un couple formé d'une catégorie et d'une auto-équivalence de  $\mathcal{C}$ . On dit que  $(\mathcal{C}, T)$  est une *catégorie à translation*. Un *triangle de*  $(\mathcal{C}, T)$  (généralement on dit simplement un *triangle de*  $\mathcal{C}$ ) est un sextuplet  $(X, Y, Z, f, g, h)$  formé de trois objets  $X, Y, Z$  de  $\mathcal{C}$  et de trois morphismes  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  et  $h : Z \rightarrow TX$ . Le triangle  $(X, Y, Z, f, g, h)$  est souvent noté

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$$

Pour deux triangles  $(X, Y, Z, f, g, h)$  et  $(X', Y', Z', f', g', h')$ , un *isomorphisme de triangles* est un triplet  $(u, v, w)$  d'isomorphismes de  $\mathcal{C}$  avec  $u : X \rightarrow X'$ ,  $v : Y \rightarrow Y'$  et  $w : Z \rightarrow Z'$  et faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow Tu \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX' \end{array}$$

**Remarque 3.38 — Isomorphisme de triangle et signe.** Soient  $(\mathcal{C}, T)$  une catégorie R-linéaire à translation (c'est-à-dire que  $T$  est R-linéaire) et  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  un triangle. Le diagramme suivant est commutatif et donne un isomorphisme de triangle :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow -id_Z & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{-g} & Z & \xrightarrow{-h} & TX \end{array}$$

## DÉFINITIONS

Ici on donne les définitions standards de catégories prétriangulées et triangulées, de sous-catégories prétriangulées et triangulées et de foncteur triangulé.

**Définition 3.39 — Catégorie triangulée.** Une *catégorie R-prétriangulée* est un triplet  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$  formé d'une catégorie R-linéaire  $\mathcal{C}$ , d'une auto-équivalence R-linéaire  $T$  de la catégorie  $\mathcal{C}$  et d'un ensemble  $\mathcal{T}$  de triangles de  $(\mathcal{C}, T)$  (dont les éléments sont appelés *triangles distingués*) vérifiant les axiomes suivants :

T1 tout triangle de  $(\mathcal{C}, T)$  isomorphe à un élément de  $\mathcal{T}$  est dans  $\mathcal{T}$  ;

T2 pour tout  $X$  de  $\mathcal{C}$ , le triangle  $X \xrightarrow{\text{id}_X} X \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} TX$  est dans  $\mathcal{T}$  ;

T3 pour tout  $f : X \rightarrow Y$ , il existe un triangle distingué de la forme  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  ;

T4 si  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  est dans  $\mathcal{T}$  alors  $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX \xrightarrow{-Tf} TY$  l'est aussi ;

T5 pour tout couple de triangles distingués  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  et  $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} TX'$  et tout couple de morphismes  $u : X \rightarrow X'$  et  $v : Y \rightarrow Y'$  vérifiant  $vf = f'u$ , il existe  $w : Z \rightarrow Z'$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow Tu \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX' \end{array}$$

De plus, si  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$  est une catégorie R-prétriangulée vérifiant en plus l'axiome de l'octaèdre :

T6 pour tout triplet de triangles distingués  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} Z' \xrightarrow{i'} TX$ ,  $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{j} X' \xrightarrow{j'} TY$  et  $X \xrightarrow{gf} Z \xrightarrow{k} Y' \xrightarrow{k'} TX$ , il existe un triangle distingué  $Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} TZ'$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i} & Z' & \xrightarrow{i'} & TX \\ \parallel & & \downarrow g & & \downarrow u & & \parallel \\ X & \xrightarrow{gf} & Z & \xrightarrow{k} & Y' & \xrightarrow{k'} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow j & & \downarrow v & & \downarrow Tf \\ Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{j} & X' & \xrightarrow{j'} & TY \\ \downarrow i & & \downarrow k & & \parallel & & \downarrow Ti \\ Z' & \xrightarrow{u} & Y' & \xrightarrow{v} & X' & \xrightarrow{w} & TZ' \end{array}$$

on dit que  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$  est une *catégorie R-triangulée*.

Lorsque  $R = \mathbb{Z}$ , on parle de *catégorie prétriangulée* ou de *catégorie triangulée* plutôt que de catégorie  $\mathbb{Z}$ -prétriangulée ou  $\mathbb{Z}$ -triangulée.

**Remarque 3.40 – Une autre définition des catégories triangulées.** Dans son article [MAY], P. May propose une simplification des axiomes précédents pour les catégories triangulées : on peut supprimer T5.

Soit  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$  un triplet formé d'une catégorie R-linéaire  $\mathcal{C}$ , d'une auto-équivalence R-linéaire  $T$  de la catégorie  $\mathcal{C}$  et d'un ensemble  $\mathcal{T}$  de triangles de  $(\mathcal{C}, T)$  vérifiant les axiomes T1, T2, T3, T4 et T6. Alors  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$  est une catégorie R-triangulée. ■

**Définition 3.41 – Foncteur triangulé et sous-catégorie triangulée.** Soient  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$  et  $(\mathcal{C}', T', \mathcal{T}')$  deux catégories R-prétriangulées. On dit qu'un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  est R-triangulé si

- (i)  $F$  est R-linéaire ;
- (ii) on a un isomorphisme de foncteurs  $\alpha : FT \simeq T'F$  ;
- (iii) le triangle  $FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \xrightarrow{\alpha_X Fh} T'FX$  est un triangle distingué de  $\mathcal{C}'$  pour tout triangle distingué  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  de  $\mathcal{C}$ .

Soient  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$  une catégorie R-prétriangulée et  $\mathcal{C}'$  une sous-catégorie R-linéaire de  $\mathcal{C}$  (c'est-à-dire que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y)$  est un sous-R-module de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  et que la composition de  $\mathcal{C}'$  est la restriction de la composition de  $\mathcal{C}$ ). On considère  $T'$  une équivalence de la catégorie R-linéaire  $\mathcal{C}'$  et  $\mathcal{T}'$  une famille de triangles de  $\mathcal{C}'$  telles que  $(\mathcal{C}', T', \mathcal{T}')$  soit une catégorie R-prétriangulée. On dit que  $(\mathcal{C}', T', \mathcal{T}')$  est une *sous-catégorie R-prétriangulée de  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$*  si le foncteur d'inclusion est un foncteur R-triangulé.

Si  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$  et  $(\mathcal{C}', T', \mathcal{T}')$  sont toutes les deux R-triangulées et que  $(\mathcal{C}', T', \mathcal{T}')$  est une sous-catégorie R-prétriangulée de  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$ , on dit que  $(\mathcal{C}', T', \mathcal{T}')$  est une *sous-catégorie R-triangulée de  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$* .

## FONCTEUR COHOMOLOGIQUE

On définit ici la notion de foncteur cohomologique et on donne l'exemple fondateur des foncteurs  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \bullet)$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, W)$ . C'est cette propriété de foncteur cohomologique des Hom qui est à la base de toutes les propriétés des catégories prétriangulées présentées par la suite.

**Définition 3.42 – Foncteur cohomologique.** Soient  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$  une catégorie R-prétriangulée et  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne. Un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  est dit *cohomologique* si pour tout triangle distingué

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$$

la suite  $FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ$  est exacte.

**Proposition 3.43 – Foncteurs Hom.** Soit  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$  une catégorie R-prétriangulée. Pour tout  $W \in \mathcal{C}$ , les foncteurs  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \bullet)$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, W)$  sont cohomologiques. En particulier, la composée de deux morphismes successifs dans un triangle distinguée est nulle.

**Preuve.** Soit  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  un triangle distingué. Il s'agit de montrer que les suites

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W) \xrightarrow{\circ g} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W) \xrightarrow{\circ f} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W)$$

et  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) \xrightarrow{f \circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) \xrightarrow{g \circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z)$

sont exactes.

D'après les axiomes T2 et T5, on a le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont des triangles distingués

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TX \\ \parallel & & \downarrow f & & \vdots & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \end{array}$$

ce qui assure que  $gf = 0$ . Il reste donc à montrer que  $\text{Ker}(\circ f) \subset \text{Im}(\circ g)$  et  $\text{Ker}(g \circ) \subset \text{Im}(f \circ)$ .

Considérons  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W)$  tel que  $\varphi f = 0$ . En appliquant les axiomes T2, T4 et T5, on obtient le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont des triangles distingués

$$\begin{array}{ccccccc}
 TX & \xrightarrow{-Tf} & TY & \xrightarrow{-Tg} & TZ & \xrightarrow{-Th} & T^2X \\
 \downarrow & & \downarrow T\varphi & & \downarrow \gamma & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & TW & \xrightarrow{-T(\text{id}_X)} & TW & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Comme  $T$  est une équivalence de catégorie, il existe un unique  $\alpha : Z \rightarrow W$  tel que  $T\alpha = \gamma$ . On en déduit que  $T(\alpha g) = T\varphi$  et donc, comme  $T$  est fidèle,  $\alpha g = \varphi$ .

Considérons  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)$  tel que  $g\varphi = 0$ . En appliquant les axiomes T2, T4 et T5, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 W & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TW & \xrightarrow{-T(\text{id}_W)} & TW \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow & & \downarrow \gamma & & \downarrow T\varphi \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX & \xrightarrow{-Tf} & TY
 \end{array}$$

Comme  $T$  est une équivalence de catégorie, il existe un unique  $\alpha : W \rightarrow X$  tel que  $T\alpha = \gamma$ . On en déduit que  $T(f\alpha) = T\varphi$  et donc, comme  $T$  est fidèle,  $f\alpha = \varphi$ .

Pour finir, en appliquant l'axiome T4, on obtient que  $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX \xrightarrow{-Tf} TY$  est un triangle distingué et donc  $hg = 0$ .  $\blacksquare$

### CATÉGORIE PRÉTRIANGULÉE ET ISOMORPHISME

Grâce au fait que les foncteurs  $\text{Hom}$  soient cohomologiques, on peut ramener des propriétés de la catégorie abélienne des  $R$ -modules à une catégorie  $R$ -prétriangulée. C'est le cas, par exemple, du lemme des 5 qui donne le corollaire 3.44 dont découle immédiatement les trois corollaires qui suivent : corollaire 3.45, 3.46 et 3.47. Ce dernier corollaire exprime la notion d'isomorphisme dans une catégorie prétriangulée en terme de triangle distingué.

**Corollaire 3.44 — Isomorphisme de triangles.** Soit  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{J})$  une catégorie  $R$ -prétriangulée. Considérons deux triangles distingués

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX \quad \text{et} \quad X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} TX'$$

et  $\alpha : X \rightarrow X'$ ,  $\beta : Y \rightarrow Y'$  et  $\gamma : Z \rightarrow Z'$  tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow T\alpha \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX'
 \end{array}$$

soit commutatif. Si  $\alpha$  et  $\beta$  (resp.  $\alpha$  et  $\gamma$ ;  $\beta$  et  $\gamma$ ) sont des isomorphismes alors  $\gamma$  (resp.  $\beta$ ;  $\alpha$ ) en est un aussi.

**Preuve.** Par hypothèse, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \xrightarrow{-Tf} TY \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow T\alpha \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX' \xrightarrow{-Tf'} TY'
 \end{array}$$

En appliquant le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \bullet)$ , on en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) & \xrightarrow{f^\circ} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) & \xrightarrow{g^\circ} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) & \xrightarrow{h^\circ} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, TX) \xrightarrow{-Tf^\circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, TY) \\
 \downarrow \alpha^\circ & & \downarrow \beta^\circ & & \downarrow \gamma^\circ & & \downarrow T\alpha^\circ \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X') & \xrightarrow{f'^\circ} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y') & \xrightarrow{g'^\circ} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z') & \xrightarrow{h'^\circ} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, TX') \xrightarrow{-Tf'^\circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, TY')
 \end{array}$$

La proposition 3.43 précédente et l'axiome T4 montre que les lignes sont exactes. Comme  $\alpha, \beta$  sont des isomorphismes, le lemme 3.14 montre que  $\alpha^\circ, \beta^\circ, T\alpha^\circ$  et  $T\beta^\circ$  sont des isomorphismes. Le lemme des 5 dans la catégorie des  $R$ -modules assure alors que  $\gamma^\circ$  est un isomorphisme. On en déduit, encore grâce au lemme 3.14 que  $\gamma$  est un isomorphisme.

Considérons à présent le cas de  $\alpha$  et  $\gamma$ . En appliquant ce qui précède aux triangles distingués

$$Z \xrightarrow{h} TX \xrightarrow{-Tf} TY \xrightarrow{-Tg} TZ \quad \text{et} \quad Z' \xrightarrow{h'} TX' \xrightarrow{-Tf'} TY' \xrightarrow{-Tg'} TZ'$$

On en déduit que  $T\beta$  est un isomorphisme. Comme  $T$  est pleinement fidèle,  $\beta$  est aussi un isomorphisme.

Considérons pour finir le cas de  $\beta$  et  $\gamma$ . En appliquant ce qui précède aux triangles distingués

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX \xrightarrow{-Tf} TY \quad \text{et} \quad Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} TX' \xrightarrow{-Tf'} TY'$$

On en déduit que  $T\alpha$  est un isomorphisme. Comme  $T$  est pleinement fidèle,  $\alpha$  est aussi un isomorphisme.  $\blacksquare$

L'axiome T4 permet de décaler les triangles distingués dans un sens. Le corollaire suivant montre qu'on peut décaler aussi dans l'autre sens.

**Corollaire 3.45 – Décalage.** Soit  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$  une catégorie R-prétriangulée. Considérons un triangle distingué  $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX \xrightarrow{-Tf} TY$  alors  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  est un triangle distingué.

**Preuve.** En appliquant l'axiome T4, on obtient que

$$TX \xrightarrow{-Tf} TY \xrightarrow{-Tg} TZ \xrightarrow{-Th} T^2X$$

est triangle distingué. Par ailleurs, d'après l'axiome T3, il existe un triangle distingué

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} TX$$

Grâce à l'axiome T4, on en déduit le triangle distingué  $TX \xrightarrow{-Tf} TY \xrightarrow{-Tg'} TZ' \xrightarrow{-Th'} T^2X$ . L'axiome T5 donne alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} TX & \xrightarrow{-Tf} & TY & \xrightarrow{-Tg} & TZ & \xrightarrow{-Th} & T^2X \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \gamma & & \parallel \\ TX & \xrightarrow{-Tf} & TY & \xrightarrow{-Tg'} & TZ' & \xrightarrow{-Th'} & T^2X \end{array}$$

On en déduit alors, grâce au corollaire 3.44, que  $\gamma$  est un isomorphisme. Comme  $T$  est pleinement fidèle, il existe un unique  $\alpha : Z \rightarrow Z'$  tel que  $T\alpha = \gamma$ . De plus  $\alpha$  est un isomorphisme. Comme  $T$  est fidèle, on en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \alpha & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont des isomorphismes et la ligne du bas un triangle distingué. On en déduit alors le résultat souhaité grâce à l'axiome T1.  $\blacksquare$

Dans le corollaire qui suit, on étudie quelques propriétés des sous-catégories triangulées qui sont aussi pleines.

**Corollaire 3.46 – Sous-catégorie triangulée.** Soient  $(\mathcal{C}', T', \mathcal{T}')$  une sous-catégorie R-prétriangulée de la catégorie R-prétriangulée  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$ . On suppose que  $\mathcal{C}'$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$ .

- (i) Si  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T'X$  est un triangle dans  $\mathcal{C}'$  qui est distingué dans  $\mathcal{C}$  alors il appartient à  $\mathcal{T}'$ .
- (ii) Soient  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  un triangle distingué de  $\mathcal{C}$  avec  $X, Y \in \mathcal{C}'$ . Alors  $Z$  est isomorphe à un objet de  $\mathcal{C}'$ .

**Preuve.** Démontrons (i). D'après l'axiome T5, on a un triangle distingué de  $\mathcal{C}'$  de la forme

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} T'X.$$

Le triangle  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} TX$  est donc distingué dans  $\mathcal{C}$  et, grâce à l'axiome T5, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \gamma & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX \end{array}$$

avec  $\gamma$  qui est un isomorphisme (corollaire 3.44). Comme  $\mathcal{C}'$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$ ,  $\gamma$  est un isomorphisme dans  $\mathcal{C}'$  et  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T'X$  est distingué dans  $\mathcal{C}'$  grâce à l'axiome T1.

Démontrons (ii). Comme  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y)$ , l'axiome T3 montre qu'il existe un triangle distingué de  $\mathcal{C}'$  de la forme  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} T'X$ . Le triangle  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} TX$  est alors distingué dans  $\mathcal{C}$ . Par l'axiome T5, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow \gamma & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX
 \end{array}$$

avec  $\gamma$  qui est un isomorphisme (corollaire 3.44). Ainsi  $Z \simeq Z'$  avec  $Z' \in \mathcal{C}'$ . ■

Pour finir ce paragraphe, on montre le lien entre isomorphisme et triangle distingué.

**Corollaire 3.47 — Isomorphisme et catégorie triangulée.** Soient  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$  une catégorie R-prétriangulée et  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  un triangle distingué. Alors  $f$  est un isomorphisme si et seulement si  $Z$  est un objet nul.

**Preuve.** Supposons que  $f$  soit un isomorphisme. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\
 \parallel & & \downarrow f^{-1} & & & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TX
 \end{array}$$

où les lignes sont des triangles distingués (axiome T2). D'après l'axiome T5, on peut compléter le diagramme précédent pour obtenir le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\
 \parallel & & \downarrow f^{-1} & & \downarrow \gamma & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TX
 \end{array}$$

Le corollaire 3.44 assure que  $\gamma$  est un isomorphisme.

Réciproquement, on suppose que  $Z$  est un objet nul. On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 Z & \xrightarrow{h} & TX & \xrightarrow{-Tf} & TY & \xrightarrow{-Tg} & TZ \\
 \downarrow & & \parallel & & & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & TX & \xrightarrow{-\text{id}_{TX}} & TX & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où les lignes sont des triangles distingués (axiome T2 et T4). D'après l'axiome T5, on peut compléter le diagramme précédent

$$\begin{array}{ccccccc}
 Z & \xrightarrow{h} & TX & \xrightarrow{-Tf} & TY & \xrightarrow{-Tg} & TZ \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow \gamma & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & TX & \xrightarrow{-\text{id}_{TX}} & TX & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

En particulier, on a  $\gamma T f = \text{id}_{TX}$ . Par ailleurs, le corollaire 3.44 assure que  $\gamma$  est un isomorphisme. On en déduit que  $(T f) \gamma = \text{id}_{TY}$ . Ainsi  $T f$  est un isomorphisme et  $f$  aussi puisque  $T$  est pleinement fidèle. ■

### CATÉGORIE PRÉTRIANGULÉE ET SOMME DIRECTE

La fin de cette sous-section est consacrée aux liens entre triangle distingué et somme directe. On commence par un lemme permettant de montrer qu'un triangle est distingué qui repose une nouvelle fois sur le lemme des 5 dans la catégorie des R-modules. Les résultats qui suivent découlent alors rapidement de ce lemme, en particulier le corollaire 3.51.

**Lemme 3.48 — Construction de triangles distingués.** Soit  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$  une catégorie R-prétriangulée. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow T\alpha \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX'
 \end{array}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des isomorphismes,  $T(f')h' = 0$  et la première ligne est un triangle distingué.

On suppose de plus qu'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée

(i) Pour tout  $W \in \mathcal{C}$ , la suite

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X') \xrightarrow{f' \circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y') \xrightarrow{g' \circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z') \xrightarrow{h' \circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, TX')$$

est exacte.

(ii) Pour tout  $W \in \mathcal{C}$ , la suite

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(TX', W) \xrightarrow{\circ h'} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', W) \xrightarrow{\circ g'} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', W) \xrightarrow{\circ f'} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', W)$$

est exacte.

Alors la deuxième ligne du diagramme est un triangle distingué.

**Preuve.** Supposons (i). En appliquant le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \cdot)$ , on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) & \xrightarrow{f \circ} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) & \xrightarrow{g \circ} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) & \xrightarrow{h \circ} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, TX) & \xrightarrow{-Tf \circ} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, TY) \\ \downarrow \alpha \circ & & \downarrow \beta \circ & & \downarrow \gamma \circ & & \downarrow T\alpha \circ & & \downarrow T\beta \circ \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X') & \xrightarrow{f' \circ} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y') & \xrightarrow{g' \circ} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z') & \xrightarrow{h' \circ} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, TX') & \xrightarrow{-Tf' \circ} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, TY') \end{array}$$

La proposition 3.43 et l'axiome T4 montre que la première ligne est exacte. L'hypothèse (i) montre que la deuxième ligne est exacte sauf en  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, TX')$ . Cependant, par hypothèse, on a  $(-Tf' \circ)(h' \circ) = 0$ . Comme  $\alpha, \beta$  sont des isomorphismes, le lemme 3.14 montre que  $\alpha \circ, \beta \circ, T\alpha \circ$  et  $T\beta \circ$  sont des isomorphismes. Le lemme des 5 (les hypothèses sont suffisantes pour l'appliquer) dans la catégorie des R-modules assure alors que  $\gamma \circ$  est un isomorphisme. On en déduit, encore grâce au lemme 3.14, que  $\gamma$  est un isomorphisme. Finalement, l'axiome T1 assure que la deuxième ligne est un triangle distingué.

Supposons (ii). En appliquant le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, W)$ , on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(TY', W) & \xrightarrow{\circ -Tf'} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(TX', W) & \xrightarrow{\circ h'} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', W) & \xrightarrow{\circ g'} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', W) & \xrightarrow{\circ f'} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', W) \\ \downarrow \circ T\beta & & \downarrow \circ T\alpha & & \downarrow \circ \gamma & & \downarrow \circ \beta & & \downarrow \circ \alpha \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(TY, W) & \xrightarrow{\circ -Tf} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(TX, W) & \xrightarrow{\circ h} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W) & \xrightarrow{\circ g} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W) & \xrightarrow{\circ f} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \end{array}$$

La proposition 3.43 et l'axiome T4 montre que la deuxième ligne est exacte. L'hypothèse (i) montre que la deuxième ligne est exacte sauf en  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(TX', W)$ . Cependant, par hypothèse, on a  $(\circ h')(\circ T'f) = 0$ . Comme  $\alpha, \beta$  sont des isomorphismes, le lemme 3.14 montre que  $\alpha \circ, \beta \circ, T\alpha \circ$  et  $T\beta \circ$  sont des isomorphismes. Le lemme des 5 (les hypothèses sont suffisantes pour l'appliquer) dans la catégorie des R-modules assure alors que  $\gamma \circ$  est un isomorphisme. On en déduit, encore grâce au lemme 3.14, que  $\gamma$  est un isomorphisme. Finalement, l'axiome T1 assure que la deuxième ligne est un triangle distingué. ■

La somme directe de triangles distingués est un triangle distingué. C'est en particulier ce que stipule le corollaire qui suit.

**Corollaire 3.49 – Somme directe de triangles.** Soit  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$  une catégorie R-prétriangulée. On considère deux triangles  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  et  $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} TX'$ . Alors le triangle

$$X \oplus X' \xrightarrow{f \oplus f'} Y \oplus Y' \xrightarrow{g \oplus g'} Z \oplus Z' \xrightarrow{h \oplus h'} T(X \oplus X')$$

est distingué si et seulement si les triangles

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX \quad \text{et} \quad X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} TX'$$

le sont.

**Preuve.** Supposons que  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  et  $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} TX'$  sont distingués.

D'après l'axiome T3, il existe un triangle distingué  $X \oplus X' \xrightarrow{f \oplus f'} Y \oplus Y' \xrightarrow{g \oplus g'} Z \oplus Z' \xrightarrow{h \oplus h'} TX \oplus TX'$ . Par ailleurs, grâce à l'axiome T5, on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{g \oplus g'} & Z \oplus Z' & \xrightarrow{h \oplus h'} & TX \oplus TX' \\ \downarrow p_X & & \downarrow p_{Y'} & & \downarrow p_{Z'} & & \downarrow Tp_X \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{g \oplus g'} & Z \oplus Z' & \xrightarrow{h \oplus h'} & TX \oplus TX' \\ \downarrow p_{X'} & & \downarrow p_{Y'} & & \downarrow p_{Z'} & & \downarrow Tp_{X'} \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX' \end{array}$$

où les lignes sont des triangles distingués et  $p_X, p_{Y'}, p_{Z'}, Tp_X$  désignent les épimorphismes canoniques. La propriété universelle du produit donne alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{u} & U & \xrightarrow{v} & TX \oplus TX' \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow (\alpha, \alpha') & & \parallel \\
 X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{g \oplus g'} & Z \oplus Z' & \xrightarrow{h \oplus h'} & TX \oplus TX'
 \end{array}$$

Vérifions à présent les hypothèses du lemme 3.48. On a  $T(f \oplus f')(h' \oplus h) = (Tf)h \oplus (Tf')h'$ . La proposition 3.43 (et l'axiome T4) montre que  $(Tf)h$  et  $(Tf')h'$  sont nuls. Ainsi  $T(f \oplus f')(h' \oplus h)$  l'est aussi. Soit  $W \in \mathcal{C}$ . Par additivité du foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \bullet)$ , la suite

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X \oplus X') \xrightarrow{(f \oplus f') \circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y \oplus Y') \xrightarrow{(g \oplus g') \circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z \oplus Z') \xrightarrow{(h \oplus h') \circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, TX \oplus TX')$$

n'est autre que la suite somme directe des suites

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) \xrightarrow{f \circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) \xrightarrow{g \circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) \xrightarrow{h \circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, TX)$$

et  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X') \xrightarrow{f' \circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y') \xrightarrow{g' \circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z') \xrightarrow{h' \circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, TX')$

qui sont exactes d'après la proposition 3.43 et l'axiome T4. Ainsi, on peut appliquer le lemme 3.48 et obtenir la première implication.

Montrons la réciproque. D'après l'axiome T3, il existe des triangles distingués

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{u} U \xrightarrow{v} TX \quad \text{et} \quad X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{u'} U' \xrightarrow{v'} TX'$$

D'après ce qui précède, on en déduit le triangle distingué  $X \oplus X' \xrightarrow{f \oplus f'} Y \oplus Y' \xrightarrow{u \oplus u'} U \oplus U' \xrightarrow{v \oplus v'} TX \oplus TX'$ . Par l'axiome T5, on construit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{g \oplus g'} & Z \oplus Z' & \xrightarrow{h \oplus h'} & TX \oplus TX' \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} & & \parallel \\
 X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Z \oplus Z' & \xrightarrow{v \oplus v'} & TX \oplus TX'
 \end{array}$$

On constate alors que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{g \oplus g'} & Z \oplus Z' & \xrightarrow{h \oplus h'} & TX \oplus TX' \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow x \oplus t & & \parallel \\
 X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Z \oplus Z' & \xrightarrow{v \oplus v'} & TX \oplus TX'
 \end{array}$$

De plus, le corollaire 3.44 assure que  $x$  et  $t$  sont des isomorphismes. On a donc les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow x & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{u} & U & \xrightarrow{v} & TX
 \end{array} \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX' \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow t & & \parallel \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{u'} & U' & \xrightarrow{v'} & TX'
 \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont des isomorphismes. On obtient alors le résultat grâce à l'axiome T1. ■

Grâce au corollaire précédent, on peut construire de nouveaux triangles distingués comme par exemple dans le corollaire qui suit.

**Corollaire 3.50 — Triangle et somme directe.** Soient  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$  une catégorie R-prétriangulée et  $X, Y$  deux objets de  $\mathcal{C}$ . On pose alors  $i_Y : Y \rightarrow X \oplus Y$  et  $p_X : X \oplus Y \rightarrow X$  les morphismes canoniques. Le triangle  $Y \xrightarrow{i_Y} X \oplus Y \xrightarrow{p_X} X \xrightarrow{0} TY$  est distingué.

**Preuve.** En appliquant le corollaire 3.49 aux triangles distingués (axiomes T2 et T4)

$$X \xrightarrow{\text{id}_X} X \xrightarrow{0} TX \quad \text{et} \quad Y \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{-\text{id}_{TY}} TY$$

on obtient le triangle distingué  $X \oplus Y \xrightarrow{p_X} X \xrightarrow{0} TY \xrightarrow{-T i_Y} TX \oplus TY$ . La conclusion résulte alors du corollaire 3.45. ■

Le corollaire qui suit détermine les monomorphismes et épimorphismes d'une catégorie prétriangulée. Il assure en particulier qu'une catégorie prétriangulée vérifie l'hypothèse 3.22.

**Corollaire 3.51 – Monomorphisme, épimorphisme et catégorie triangulée.** Soient  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$  une catégorie R-prétriangulée et  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  un triangle distingué. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est une section ;
- (ii)  $f$  est un monomorphisme ;
- (iii)  $g$  est une rétraction ;
- (iv)  $g$  est un épimorphisme ;
- (v)  $h = 0$  ;
- (vi) Il existe  $u : Y \rightarrow X$  et  $v : Z \rightarrow Y$  tel que  $uf = \text{id}_X$ ,  $gv = \text{id}_Z$ ,  $uv = 0$  et  $fu + vg = \text{id}_Y$ .

**Preuve.** On a bien sûr (i)  $\Rightarrow$  (ii), (iii)  $\Rightarrow$  (iv), (vi)  $\Rightarrow$  (i) et (vi)  $\Rightarrow$  (iii).

(ii)  $\Rightarrow$  (v). D'après la proposition 3.43 et l'axiome T4, on a  $T(f)h = 0$ . Comme  $T$  est une équivalence de catégorie,  $T(f)$  est un monomorphisme et donc  $h = 0$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (v). D'après la proposition 3.43,  $hg = 0$ . Comme  $g$  est un épimorphisme, on obtient  $h = 0$ .

(v)  $\Rightarrow$  (vi). On note  $i : X \rightarrow X \oplus Z$  et  $p : X \oplus Z \rightarrow Z$  les morphismes canoniques. L'hypothèse  $h = 0$  assure qu'on ait le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \xrightarrow{0} & TX & \xrightarrow{-Ti} & T(X \oplus Z) & \xrightarrow{-Tp} & TZ \\ \parallel & & \parallel & & & & \\ Z & \xrightarrow{0} & TX & \xrightarrow{-Tf} & TY & \xrightarrow{-Tg} & TZ \end{array}$$

où les lignes sont, d'après l'axiome T4 et le corollaire 3.50, des triangles distingués. Grâce à l'axiome T5, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \xrightarrow{0} & TX & \xrightarrow{-Ti} & T(X \oplus Z) & \xrightarrow{-Tp} & TZ \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow (\alpha, \beta) & & \parallel \\ Z & \xrightarrow{0} & TX & \xrightarrow{-Tf} & TY & \xrightarrow{-Tg} & TZ \end{array}$$

Comme  $T$  est pleinement fidèle, il existe  $x : X \rightarrow Y$  et  $v : Z \rightarrow Y$  tel que  $T(x) = \alpha$  et  $T(v) = \beta$ . Comme  $T$  est fidèle, on en déduit, par commutativité du diagramme, que  $gx = 0$ ,  $gv = \text{id}_Z$  et  $x = f$ . On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & X \oplus Z & \xrightarrow{p} & Z & \xrightarrow{0} & TX \\ \parallel & & \downarrow (f, v) & & \parallel & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{0} & TX \end{array}$$

On déduit des égalités précédentes que  $g(\text{id}_Y - vg) = 0$ . Finalement, grâce à la proposition 3.43, il existe  $u$  tel que  $\text{id}_Y - vg = fu$ . Comme  $gf = 0$ , on obtient alors  $f = fuf$ . Par ailleurs, d'après le corollaire 3.44,  $(\alpha, \beta)$  est un isomorphisme et donc, comme  $T$  est pleinement fidèle,  $(f, v)$  est aussi un isomorphisme. En particulier, en composant avec  $i$ , on obtient que  $f$  est un monomorphisme. L'égalité  $f = fuf$  donne alors  $uf = \text{id}_X$ . Enfin, par définition de  $v$ , on a  $fuv = v - vgv = 0$  et donc, comme  $f$  est un monomorphisme,  $uv = 0$ . ■

## 3.4 COMPLEXE DANS UNE CATÉGORIE ADDITIVE

Dans cette section, on étudie les complexes d'une catégorie R-linéaire. Cette étude est découpée suivant six sous-sections. Dans la première sous-section, on définit la catégorie des complexes d'une catégorie R-linéaire. On définit aussi la notion de décalage et de cône d'un morphisme de complexes qui sont fondamentales dans la structure triangulée de la catégorie homotopique (voir la proposition 3.90). La sous-section 3.4.2 est plus technique. Elle présente la construction et les propriétés du complexe  $\text{Hom}^\bullet(X, Y)$ . La cohomologie en degré 0 de ce complexe permet définir rapidement la catégorie homotopique (voir la définition 3.86) et de faire passer à la catégorie homotopique de nombreuses propriétés de la catégories des complexes (voir la proposition 3.93 et la remarque 3.94). La sous-section 3.4.3 étudie le cas des complexes d'une catégorie abélienne. On définit en particulier la cohomologie d'un complexe et les notions qui s'y rattachent : quasi-isomorphisme et complexe exact (voir les définitions 3.76 et 3.77). On rappelle aussi quelques résultats élémentaires d'algèbre homologique (voir,

par exemple, la proposition 3.78). La sous-section 3.4.4 présente les constructions requises en vue des contre-exemples 4.12 et 4.13 : on prolonge un foncteur entre deux catégories R-linéaires aux catégories de complexes correspondantes. On étudie en particulier le cas des paires adjointes de foncteurs et celui des cônes (voir les remarques 3.84 et 3.85). Dans la sous-section 3.4.5, on étudie la catégorie homotopique. On présente notamment sa structure triangulée. On étudie aussi comment les constructions effectuées dans les catégories de complexes passent aux catégories homotopiques (extension de foncteurs, adjonction...) Enfin, la sous-section 3.4.6 présente une classe de complexes : les complexes scindés qui seront à la base des contre-exemples 4.12 et 4.13.

**Notation 3.52** Dans cette section, on désigne par R un anneau commutatif unitaire et par A, B des R-algèbres associatives unitaires.

### 3.4.1 LES CATÉGORIES DES COMPLEXES

Dans cette sous-section, on définit la catégorie des complexes d'une catégorie R-linéaire. On introduit aussi les notions classiques qui lui sont associées : complexes bornés (à droite, à gauche), décalage et cône d'un morphisme.

**Définition 3.53 – Complexes.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie R-linéaire. On définit la catégorie R-linéaire  $\text{Com}(\mathcal{C})$  des complexes de  $\mathcal{C}$  en posant

$$\text{Ob}(\text{Com}(\mathcal{C})) = \{((X^n)_{n \in \mathbb{Z}}, (d_X^n)_{n \in \mathbb{Z}}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad X^n \in \mathcal{C}, \quad d_X^n \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, X^{n+1}), \quad d_X^{n+1}d_X^n = 0\}.$$

On dit que  $X^n$  est la *composante (homogène) de degré n* de  $((X^n)_{n \in \mathbb{Z}}, (d_X^n)_{n \in \mathbb{Z}})$  et  $d_X = (d_X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est sa *différentielle*. Pour simplifier, on omet souvent la différentielle lorsqu'on note un complexe.

Pour  $(X, d_X) = ((X^n)_{n \in \mathbb{Z}}, (d_X^n)_{n \in \mathbb{Z}})$  et  $(Y, d_Y) = ((Y^n)_{n \in \mathbb{Z}}, (d_Y^n)_{n \in \mathbb{Z}})$ , on pose

$$\text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}((X, d_X), (Y, d_Y)) = \{(f^n)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f^n \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, Y^n), \quad d_Y^n f^n = f^{n+1} d_X^n\}.$$

On dit que  $f^n$  est la *composante (homogène) de degré n de f* =  $(f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

**Preuve.** Soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  et  $(Z, d_Z)$  trois complexes de  $\mathcal{C}$  (on dit aussi  *$\mathcal{C}$ -complexes*). Pour

$$f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}((X, d_X), (Y, d_Y)) \quad \text{et} \quad g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}((Y, d_Y), (Z, d_Z)),$$

on pose

$$g \circ f = (g^n f^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \prod_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, Z^n).$$

De plus, pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $d_Z^n g^n f^n = g^{n+1} d_Y^n f^n = g^{n+1} f^{n+1} d_X^n$ . Ainsi  $g \circ f \in \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}((X, d_X), (Z, d_Z))$ .

On a ainsi défini une application

$$\circ : \begin{cases} \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}((X, d_X), (Y, d_Y)) \times \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}((Y, d_Y), (Z, d_Z)) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}((X, d_X), (Z, d_Z)) \\ (f, g) \qquad \qquad \qquad \qquad \longmapsto g \circ f. \end{cases}$$

De plus, la famille  $(\text{id}_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$  appartient à  $\text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}((X, d_X), (X, d_X))$  (puisque  $d_X^n \text{id}_{X^n} = \text{id}_{X^{n+1}} d_X^n = d_X^n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ) et vérifie  $f \circ (\text{id}_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}} = f$  pour tout  $f \in \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}((X, d_X), (Y, d_Y))$  et  $(\text{id}_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}} \circ f = f$  pour tout  $f \in \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}((Y, d_Y), (X, d_X))$ . Ainsi  $(\text{id}_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}} = \text{id}_{(X, d_X)}$  est bien un élément neutre.

L'associativité de  $\circ$  résulte immédiatement de l'associativité en chacun des degrés.

Par ailleurs, la bilinéarité de la composition dans  $\mathcal{C}$  assure que  $\text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}((X, d_X), (Y, d_Y))$  est un sous-R-module de

$$\prod_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, Y^n)$$

et que la composition dans  $\text{Com}(\mathcal{C})$  est R-bilinéaire.

De plus, on définit le complexe 0 en posant  $0^n = 0$  et  $d_0^n = 0$ . Comme  $d_0^{n+1}d_0^n = 0$ , on a bien un complexe. Si  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : X \rightarrow 0$  est un morphisme de complexes, on a  $f^n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et donc  $f = 0$ . De même, si  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : 0 \rightarrow X$  est un morphisme de complexes, on a  $f^n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et donc  $f = 0$ . Ainsi le complexe 0 est un objet initial et terminal c'est-à-dire un objet nul dans  $\text{Com}(\mathcal{C})$ .

Enfin, si  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  sont deux complexes de  $\mathcal{C}$ , on définit le complexe  $X \oplus Y$  par

$$(X \oplus Y)^n = X^n \oplus Y^n \quad \text{et} \quad d_{X \oplus Y}^n = d_X^n \oplus d_Y^n.$$

Comme  $d_{X \oplus Y}^{n+1}d_{X \oplus Y}^n = d_X^{n+1}d_X^n \oplus d_Y^{n+1}d_Y^n = 0$ , on a bien défini un complexe. Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on note

$$i_X^n : X^n \rightarrow X^n \oplus Y^n, \quad i_Y^n : Y^n \rightarrow X^n \oplus Y^n, \quad p_X^n : X^n \oplus Y^n \rightarrow X^n \quad \text{et} \quad p_Y^n : X^n \oplus Y^n \rightarrow Y^n$$

les morphismes donnant la structure de somme directe sur  $X^n \oplus Y^n$ . Les familles  $i_X = (i_X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $i_Y = (i_Y^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $p_X = (p_X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $p_Y = (p_Y^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sont des morphismes de complexes. En effet, en notant  $d$  la différentielle du complexe  $X \oplus Y$ , on a

$$d^n i_X^n = (d_X^n, 0) = i_X^{n+1} d_X^n, \quad d^n i_Y^n = (0, d_Y^n) = i_Y^{n+1} d_Y^n, \quad d_X^n p_X^n = (d_X^n, 0) = p_X^{n+1} d^n \quad \text{et} \quad d_Y^n p_Y^n = (0, d_Y^n) = p_Y^{n+1} d^n.$$

De plus, on a  $p_X i_X = \text{id}_X$ ,  $p_Y i_Y = \text{id}_Y$ ,  $p_X i_Y = 0$ ,  $p_Y i_X = 0$  et  $i_X p_X + i_Y p_Y = \text{id}_{X \oplus Y}$  puisque les égalités sont vraies pour chacun des degrés. Finalement  $\text{Com}(\mathcal{C})$  est bien une catégorie R-linéaire. ■

**Définition 3.54 – Complexe borné, à gauche, à droite, non borné.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie R-linéaire et  $(X, d_X)$  un complexe de  $\mathcal{C}$ . On dit que  $(X, d_X)$  est *borné à droite* s'il existe  $N \in \mathbb{Z}$  tel que  $X^n = 0$  pour  $n \geq N$ . On dit que  $(X, d_X)$  est *borné à gauche* s'il existe  $N \in \mathbb{Z}$  tel que  $X^n = 0$  pour  $n \leq N$ . On dit que  $(X, d_X)$  est *borné* s'il est borné à droite et à gauche.

On note  $\text{Com}(\mathcal{C})^-$  la sous-catégorie pleine des complexes bornés à droite,  $\text{Com}(\mathcal{C})^+$  la sous-catégorie pleine des complexes bornés à gauche et  $\text{Com}(\mathcal{C})^b$  la sous-catégorie pleine des complexes bornés. Le complexe nul étant borné et la somme directe de deux complexes bornés (resp. à droite, à gauche) l'étant aussi, on obtient ainsi trois catégories R-linéaires. Par ailleurs, la catégorie  $\text{Com}(\mathcal{C})$  est parfois notée  $\text{Com}(\mathcal{C})^{ub}$ .

**Exemple 3.55 – Complexe de modules.** On note  $R\text{Com}$  (resp.  $A\text{Com}$ ,  $\text{Com}A$ ,  $A\text{Com}B$ ) la catégorie des complexes de R-modules (resp. A-modules, modules-A, A-modules-B).

On note aussi  $R\text{Com}^-$  (resp.  $A\text{Com}^-$ ,  $\text{Com}A^-$ ,  $A\text{Com}B^-$ ) la catégorie des complexes de R-modules (resp. A-modules, modules-A, A-modules-B) bornés à droite ;  $R\text{Com}^+$  (resp.  $A\text{Com}^+$ ,  $\text{Com}A^+$ ,  $A\text{Com}B^+$ ) la catégorie des complexes de R-modules (resp. A-modules, modules-A, A-modules-B) bornés à gauche et  $R\text{Com}^b$  (resp.  $A\text{Com}^b$ ,  $\text{Com}A^b$ ,  $A\text{Com}B^b$ ) la catégorie des complexes de R-modules bornés (resp. A-modules, modules-A, A-modules-B). ■

Dans la remarque qui suit, on étudie les isomorphismes d'une catégorie de complexes. Ils sont très simples : ce sont des isomorphismes en chacun des degrés.

**Remarque 3.56 – Isomorphisme de complexes.** Soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$ . On considère un morphisme de complexes  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : X \rightarrow Y$ . Montrons que  $f$  est un isomorphisme si et seulement si  $f^n$  est un isomorphisme pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

On suppose que  $f$  est un isomorphisme. Il existe  $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}(Y, X)$  tel que  $gf = \text{id}_X$  et  $fg = \text{id}_Y$ . Ainsi  $g^n f^n = \text{id}_{X^n}$  et  $f^n g^n = \text{id}_{Y^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

Réciproquement, si pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f^n$  est un isomorphisme. On note  $g^n : Y^n \rightarrow X^n$  l'inverse de  $f^n$ . Montrons que  $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}(Y, X)$  : on a  $d_Y^n f^n = f^{n+1} d_X^n$  et donc  $g^{n+1} d_Y^n = d_X^n g^n$ . Enfin,  $gf = \text{id}_X$  et  $fg = \text{id}_Y$  et  $f$  est un isomorphisme. ■

Dans la définition qui suit, on se propose simplement de transformer une famille d'objets (indexée par  $\mathbb{Z}$ ) en un complexe (à différentielle nulle).

**Définition 3.57 – Foncteur d'inclusion.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie R-linéaire. Pour  $X = (X^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$ , on définit le complexe (c'en est bien un)  $I(X)$  par  $I(X)^n = X^n$  et  $d_{I(X)}^n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . De plus, pour  $Y = (Y^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$  et  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}}(X, Y)$ , on définit le morphisme de complexes (c'en est bien un puisque les différentielles sont nulles) par  $I(f)^n = f^n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

On définit ainsi un foncteur R-linéaire  $I$  pleinement fidèle de  $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$  dans  $\text{Com}(\mathcal{C})$ . En effet, pour  $Z \in \mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$  et  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}}(Y, Z)$ , on a  $I(gf) = I(g)I(f)$  et  $I(\text{id}_X) = \text{id}_X$ . La R-linéarité de  $I$  est évidente. La nullité de la différentielle de  $I(X)$  et de  $I(Y)$  assure que  $I$  est pleinement fidèle. ■

### FONCTEUR DÉCALAGES : CATÉGORIES À TRANSLATION

On définit ici le décalage d'un complexe. On munit ainsi la catégorie des complexes d'une structure de catégorie à translation (voir la définition 10.1.1 de [K-S]).

**Définition 3.58 – Foncteur décalage.** Soient  $(X, d_X)$  un complexe de  $\mathcal{C}$  et  $m \in \mathbb{Z}$ . On définit le complexe  $X[m]$  par

$$X[m]^n = X^{n+m} \quad \text{et} \quad d_{X[m]}^n = (-1)^m d_X^{n+m}.$$

Soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : X \rightarrow Y$  un morphisme de complexes de  $\mathcal{C}$ . On pose alors  $f[m]^n = f^{n+m} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X[m]^n, Y[m]^n)$ . La famille  $f[m] = (f[m]^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes de  $X[m]$  dans  $Y[m]$ .

On définit ainsi un foncteur R-linéaire appelé *foncteur décalage*

$$\bullet[m]: \begin{cases} \text{Com}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Com}(\mathcal{C}) \\ X \quad \longmapsto X[m] \\ f \quad \longmapsto f[m]. \end{cases}$$

**Preuve.** Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $d_{X[m]}^{n+1} d_{X[m]}^n = d_X^{n+m+1} d_X^{n+m} = 0$ . Ainsi  $X[m]$  est bien un complexe de  $\mathcal{C}$ .

Vérifions que  $f[m]$  est un morphisme de complexes de  $\mathcal{C}$ . Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on a

$$d_{Y[m]}^n f[m]^n = (-1)^m d_Y^{n+m} f^{n+m} = (-1)^m f^{n+m+1} d_X^{n+m} = f[m]^{n+1} d_{X[m]}^n.$$

Vérifions à présent que  $\bullet[m]$  est un foncteur. On a  $\text{id}_{X[m]} = (\text{id}_{X^{n+m}})_{n \in \mathbb{Z}} = (\text{id}_{X[m]})_{n \in \mathbb{Z}} = \text{id}_{X[m]}$ . De plus, si  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  sont deux morphismes de complexes de  $\mathcal{C}$ , on a, pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$(gf)[m]^n = (gf)^{n+m} = g^{n+m} f^{n+m} = g[m]^n f[m]^n.$$

c'est-à-dire  $(gf)[m] = g[m]f[m]$ . Pour finir, la R-linéarité de  $\bullet[m]$  est évidente.  $\blacksquare$

**Remarque 3.59 — Composition des décalages.** Soient  $m, m' \in \mathbb{Z}$ , le foncteur composé de  $\bullet[m]$  et  $\bullet[m']$  est  $\bullet[m+m']$ . De plus, on a bien sûr  $\bullet[0] = \text{id}_{\text{Com}(\mathcal{C})}$ . On en déduit que  $\bullet[m]$  est une auto-équivalence de catégorie R-linéaire pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ .

Vérifions que  $X[m][m'] = X[m+m']$  et  $f[m][m'] = f[m+m']$ . Par définition, pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on a

$$f[m][m']^n = f[m]^{n+m'} = f^{n+m'+m} = f[m+m']^n, \quad X[m][m']^n = X[m]^{n+m'} = X^{n+m+m'} = X[m+m']^n$$

et

$$d_{X[m][m']}^n = (-1)^{m'} d_{X[m]}^{n+m'} = (-1)^{m'} (-1)^m d_X^{n+m+m'} = d_{X[m+m']}^n. \quad \blacksquare$$

**Remarque 3.60 — Complexes bornés et décalage.** Soient  $(X, d_X)$  un complexe de  $\mathcal{C}$  et  $m \in \mathbb{Z}$ . On voit immédiatement que si  $X$  est borné (resp. borné à droite, borné à gauche) alors  $X[m]$  l'est aussi.

Ainsi  $\bullet[m]$  induit une auto-équivalence de catégorie R-linéaire de  $\text{Com}(\mathcal{C})^-$  (resp.  $\text{Com}(\mathcal{C})^+, \text{Com}(\mathcal{C})^b$ ) dans elle-même.

Autrement dit, pour  $* \in \{ub, +, -, b\}$ , les catégories  $\text{Com}(\mathcal{C})^*$  sont des catégories R-linéaires à translation au sens de la définition 10.1.1 de [K-S].  $\blacksquare$

### CÔNE D'UN MORPHISME DE COMPLEXES

On définit ici la notion de cône d'un morphisme de complexes qui sera à la base de la structure triangulée de la catégorie homotopique.

**Définition 3.61 — Cône d'un morphisme.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de complexes. On définit le complexe *cône de f* noté  $C(f)$  par

$$C(f)^n = Y^n \oplus X[1]^n = Y^n \oplus X^{n+1} \quad \text{et} \quad d_{C(f)}^n = \begin{bmatrix} d_Y^n & f^{n+1} \\ d_X^n & -d_X^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_Y^n & f^{n+1} \\ d_{X[1]}^n & -d_X^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Soient  $(X', d_{X'})$  et  $(Y', d_{Y'})$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f' : X' \rightarrow Y'$  un morphisme de complexes. Pour les morphismes  $g_X : X \rightarrow X'$  et  $g_Y : Y \rightarrow Y'$  vérifiant  $g_Y f = f' g_X$ , on définit  $C(g_X, g_Y) : C(f) \rightarrow C(f')$  par

$$C(g_X, g_Y)^n = g_Y^n \oplus g_{X[1]}^n = g_{Y'}^n \oplus g_{X[1]}^{n+1}.$$

C'est un morphisme de complexes.

On note  $\text{Fl}(\text{Com}(\mathcal{C}))$  la catégorie des flèches de  $\text{Com}(\mathcal{C})$ . On a défini le foncteur R-linéaire *cône*

$$C : \begin{cases} \text{Fl}(\text{Com}(\mathcal{C})) & \longrightarrow \text{Com}(\mathcal{C}) \\ f & \longmapsto C(f) \\ (g_X, g_Y) & \longmapsto C(g_X, g_Y). \end{cases}$$

Par ailleurs, si on note  $i^n : Y^n \rightarrow Y^n \oplus X^{n+1}$  et  $\pi^{n+1} : Y^n \oplus X^{n+1} \rightarrow X^{n+1}$  les morphismes canoniques alors les familles  $i_f = (i^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $\pi_f = (\pi^{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$  définissent des morphismes de complexes  $i_f : Y \rightarrow C(f)$  et  $\pi_f : C(f) \rightarrow X[1]$ .

Enfin, si on note  $i_{f'} = (i'^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $\pi_{f'} = (\pi'^{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$  les morphismes de complexes  $i_{f'} : Y' \rightarrow C(f')$  et  $\pi_{f'} : C(f') \rightarrow X'[1]$  définit de manière analogue à  $i_f$  et  $\pi_f$ . On a le diagramme commutatif dans  $\text{Com}(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{i_f} & C(f) & \xrightarrow{\pi_f} & X[1] \\ \downarrow g_Y & & \downarrow C(g_X, g_Y) & & \downarrow g_{X[1]} \\ Y' & \xrightarrow{i_{f'}} & C(f') & \xrightarrow{\pi_{f'}} & X'[1] \end{array}$$

**Preuve.** Calculons  $d_{C(f)}^{n+1} d_{C(f)}^n$ . On a

$$d_{C(f)}^{n+1} d_{C(f)}^n = \begin{bmatrix} d_Y^{n+1} & f^{n+2} \\ d_{X[1]}^{n+1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_Y^n & f^{n+1} \\ d_{X[1]}^n & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_Y^{n+1} d_Y^n & d_Y^{n+1} f^{n+1} - f^{n+2} d_X^{n+1} \\ d_{X[1]}^{n+1} d_{X[1]}^n & \end{bmatrix}.$$

Comme  $f$  est un morphisme de complexes, on obtient bien que  $C(f)$  est un complexe de  $\mathcal{C}$ .

Calculons  $\delta = C(g_X, g_Y)^{n+1} d_{C(f)}^n - d_{C(f')}^n C(g_X, g_Y)^n$ . On a

$$\delta = \begin{bmatrix} g_Y^{n+1} & \\ g_X^{n+2} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_Y^n & f^{n+1} \\ d_{X[1]}^n & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{Y'}^n & f'^{n+1} \\ d_{X'[1]}^n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_Y^n & \\ g_X^{n+1} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_Y^{n+1} d_Y^n - d_{Y'}^n g_Y^n & g_Y^{n+1} f^{n+1} - f'^{n+1} g_X^{n+1} \\ d_{X'}^{n+1} g_X^{n+1} - g_X^{n+2} d_X^{n+1} & \end{bmatrix}.$$

Comme  $g_X$  et  $g_Y$  sont des morphismes de complexes et que  $g_Y f = f' g_X$ , on obtient que  $C(g_X, g_Y)$  est bien un morphisme de complexes.

Par construction, on a bien sûr  $C(\text{id}_X, \text{id}_Y) = \text{id}_{C(f)}$ . De plus, si  $(X'', d_{X''})$ ,  $(Y'', d_{Y''})$  sont deux complexes de  $\mathcal{C}$ ,  $f'': X'' \rightarrow Y''$  un morphisme de complexes et  $g'_X : X' \rightarrow X''$  et  $g'_Y : Y' \rightarrow Y''$  deux morphismes de complexes vérifiant  $f'' g'_X = g'_Y f'$  alors, grâce aux propriétés de la somme directe, on a  $C(g'_X, g'_Y) C(g_X, g_Y) = C(g'_X g_X, g'_Y g_Y)$ . Ainsi  $C$  est bien un foncteur dont la R-linéarité provient des propriétés de la somme directe.

Il s'agit de calculer  $i^{n+1} d_Y^n - d_{C(f)}^n i^n$ . On a

$$i^{n+1} d_Y^n - d_{C(f)}^n i^n = \begin{bmatrix} \text{id}_Y^{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} d_Y^n - \begin{bmatrix} d_Y^n & f^{n+1} \\ d_{X[1]}^n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{id}_Y^n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{De même, } \pi^{n+2} d_{C(f)}^n - d_{X[1]}^n \pi^{n+1} = [0 \quad \text{id}_{X^{n+2}}] \begin{bmatrix} d_Y^n & f^{n+1} \\ -d_X^{n+1} & \end{bmatrix} + d_X^{n+1} [0 \quad \text{id}_{X^{n+1}}] = 0$$

Pour finir, il suffit de vérifier que  $i^n g_Y^n - C(g_X, g_Y)^n i^n = 0$  et que  $\pi^{n+1} C(g_X, g_Y)^n - g_{X[1]}^n \pi^{n+1} = 0$ . ■

**Remarque 3.62 – Cône et décalage.** Le foncteur Cône est un foncteur de catégories à translation et les transformations naturelles  $i$  et  $\pi$  sont des morphismes de foncteurs de catégories à translation (voir la définition 10.1.1 de [K-S]). On remarquera cependant que, pour  $\pi$ , la transformation naturelle entre les foncteurs  $[1]([1]\text{Source})$  et  $([1]\text{Source})[1]$  est donné par  $-\text{id}$  (et non  $\text{id}$ ).

On reprend les notations de la définition 3.61. Commençons par le cas du foncteur cône. Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on pose  $\delta^n = \text{id}_{Y^{n+1}} \oplus -\text{id}_{X^{n+2}} : Y^{n+1} \oplus X^{n+2} \rightarrow Y^{n+1} \oplus X^{n+2}$ . Montrons que  $\delta_f = (\delta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un isomorphisme naturel de complexe entre  $C(f[1])$  et  $C(f)[1]$ .

Pour cela, on commence par remarquer que

$$C(f[1])^n = Y[1]^n \oplus X[2]^n = Y^{n+1} \oplus X^{n+2} = C(f)^{n+1} = C(f)[1]^n$$

puis on calcule

$$d_{C(f)[1]}^n \delta^n - \delta^{n+1} d_{C(f[1])}^n = - \begin{bmatrix} d_Y^{n+1} & f^{n+2} \\ -d_X^{n+2} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{id}_{Y^{n+1}} & \\ -\text{id}_{X^{n+2}} & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{id}_{Y^{n+2}} & \\ -\text{id}_{X^{n+3}} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_Y^{n+1} & f^{n+2} \\ d_X^{n+2} & \end{bmatrix} = 0.$$

On obtient ainsi un isomorphisme de complexes entre  $C(f[1])$  et  $C(f)[1]$ .

Enfin, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C(f[1]) & \xrightarrow{\delta_f} & C(f)[1] \\ C(g_X[1], g_Y[1]) \downarrow & & \downarrow C(g_X, g_Y)[1] \\ C(f'[1]) & \xrightarrow{\delta_{f'}} & C(f')[1] \end{array}$$

puisque en degré  $n$ , on trouve  $g_Y^{n+1} \oplus -g_X^{n+2}$  en suivant les deux chemins.

Pour la transformation naturelle  $i$ , il suffit de vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y[1] & \xrightarrow{i_{f[1]}} & C(f[1]) \\ \text{id}_{Y[1]} \downarrow & & \downarrow \delta_f \\ Y[1] & \xrightarrow{i_f[1]} & C(f)[1] \end{array}$$

est commutatif, ce qui résulte immédiatement de l'égalité  $i_{f[1]} = i_f[1]$ .

Pour la transformation naturelle  $\pi$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C(f[1]) & \xrightarrow{\pi_{f[1]}} & X[2] \\ \delta_f \downarrow & & \downarrow -\text{id}_{X[2]} \\ C(f)[1] & \xrightarrow{\pi_f[1]} & X[2] \end{array}$$

est commutatif, ce qui résulte immédiatement de l'égalité  $\pi_{f[1]} = \pi_f[1]$ . ■

### 3.4.2 LE COMPLEXE $\text{Hom}$

Dans cette sous-section, on étudie le complexe  $\text{Hom}$ . Dans un premier temps, on définit ce foncteur et on étudie son comportement vis-à-vis des complexes bornés. Ensuite, on étudie les liens entre le complexe  $\text{Hom}$  et le décalage.

#### LE FONCTEUR

**Définition 3.63 — Complexé  $\text{Hom}$  et complexé dual.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie R-linéaire et  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$ . On définit le complexe  $\text{Hom}^\bullet(X, Y)$  par

$$\text{Hom}^\bullet(X, Y)^n = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^{n+k})$$

et  $d_{\text{Hom}^\bullet(X, Y)}^n : \begin{cases} \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^{n+k}) \longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^{n+k+1}) \\ (f_k)_{k \in \mathbb{Z}} \longmapsto (d_Y^{n+k} f_k + (-1)^{n+1} f_{k+1} d_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}. \end{cases}$

Lorsque  $\mathcal{C} = \text{A-Mod}$ , on pose  $X^\vee = \text{Hom}^\bullet(X, A)$ .

De plus, soient  $(X', d_{X'})$ ,  $(Y', d_{Y'})$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : X' \rightarrow X$ ,  $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} : Y \rightarrow Y'$  deux morphismes de  $\mathcal{C}$ -complexes. On définit alors

$$\text{Hom}^\bullet(f, g) \in \text{Hom}_{\text{RCom}}(\text{Hom}^\bullet(X, Y), \text{Hom}^\bullet(X', Y'))$$

par  $\text{Hom}^\bullet(f, g)^n : \begin{cases} \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^{n+k}) \longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X'^k, Y'^{n+k}) \\ (u^k)_{k \in \mathbb{Z}} \longmapsto (g^{n+k} u^k f^k)_{k \in \mathbb{Z}}. \end{cases}$

On définit ainsi un bifoncteur R-linéaire

$$\text{Hom}^\bullet(\cdot, \cdot) : \begin{cases} \mathcal{C}\text{Com}^{\text{op}} \times \mathcal{C}\text{Com} \longrightarrow \text{RCom} \\ (X, Y) \longmapsto \text{Hom}^\bullet(X, Y) \\ (f, g) \longmapsto \text{Hom}^\bullet(f, g). \end{cases}$$

**Preuve.** Vérifions que  $\text{Hom}^\bullet(X, Y)$  est un complexe. Les axiomes des catégories R-linéaires assurent que la différentielle de  $\text{Hom}^\bullet(X, Y)$  est R-linéaire. Pour simplifier, on note  $d$  plutôt que  $d_{\text{Hom}^\bullet(X, Y)}$ . Pour  $u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ , on a

$$\begin{aligned} d^{n+1} d^n(u) &= d^{n+1}((d_Y^{n+k} u^k + (-1)^{n+1} u^{k+1} d_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}) \\ &= (d_Y^{n+k+1} d_Y^{n+k} u^k + (-1)^{n+1} d_Y^{n+k+1} u^{k+1} d_X^k + (-1)^{n+2} (d_Y^{n+k+1} u^{k+1} d_X^k + (-1)^{n+1} u^{k+2} d_X^{k+1} d_X^k))_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Le premier et le quatrième terme sont nuls car  $X$  et  $Y$  sont des complexes. Le deuxième et le troisième se simplifient. Ainsi  $\text{Hom}^\bullet(X, Y)$  est bien un complexe de R-modules.

Vérifions que  $\text{Hom}^\bullet(f, g)$  est bien un morphisme de complexes. Par construction,  $\text{Hom}^\bullet(f, g)^n$  est bien R-linéaire. De plus, on a

$$\begin{aligned} d_{\text{Hom}^\bullet(X', Y')}^n \text{Hom}^\bullet(f, g)^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) &= d_{\text{Hom}^\bullet(X', Y')}^n((g^{n+k} u^k f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) \\ &= (d_Y^{n+k} g^{n+k} u^k f^k + (-1)^{n+1} g^{n+k+1} u^{k+1} f^{k+1} d_X^k)_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

et  $\text{Hom}^\bullet(f, g)^{n+1} d_{\text{Hom}^\bullet(X, Y)}^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = \text{Hom}^\bullet(f, g)^{n+1}((d_Y^{n+k} u^k + (-1)^{n+1} u^{k+1} d_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (g^{n+k+1} d_Y^{n+k} u^k f^k + (-1)^{n+1} g^{n+k+1} u^{k+1} d_X^k f^k)_{k \in \mathbb{Z}}.$

Comme  $f$  et  $g$  sont des morphismes de complexes, on a  $g^{n+k+1} d_Y^{n+k} = d_Y^{n+k} g^{n+k}$  et  $d_X^k f^k = f^{k+1} d_X^k$ . Ainsi  $\text{Hom}^\bullet(f, g)$  est bien un morphisme de complexes.

Montrons que  $\text{Hom}^\bullet(\cdot, \cdot)$  est bien un foncteur. On a clairement  $\text{Hom}^\bullet(\text{id}_X, \text{id}_Y) = \text{id}_{\text{Hom}^\bullet(X, Y)}$ . De plus, si  $(X'', d_{X''})$  et  $(Y'', d_{Y''})$  sont deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f' : X'' \rightarrow X'$  et  $g' : Y'' \rightarrow Y'$  deux morphismes de  $\mathcal{C}$ -complexes, on a par associativité de la composition,  $\text{Hom}^\bullet(f f', g' g) = \text{Hom}^\bullet(f', g') \text{Hom}^\bullet(f, g)$ .

Enfin, la bilinéarité de la composition dans  $\mathcal{C}$  assure que l'application  $(f, g) \mapsto \text{Hom}^\bullet(f, g)$  est bilinéaire. ■

**Remarque 3.64 – Complexes bornés et foncteur  $\text{Hom}$ .** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$ . On suppose que  $X$  est borné à droite (resp. borné à gauche, borné) et  $Y$  est borné à gauche (resp. borné à droite, borné) alors  $\text{Hom}^*(X, Y)$  est borné à gauche (resp. borné à droite, borné).

Pour cela, considérons  $N, M \in \mathbb{Z}$  tel que  $X^n = 0$  pour  $n \geq N$  et  $Y^n = 0$  pour  $n \leq M$  et montrons qu'alors  $\text{Hom}^*(X, Y)^n = 0$  pour  $n \leq M - N + 1$ . Par définition,  $\text{Hom}^*(X, Y)^n \neq 0$  impose qu'il existe  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $j - i = n$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^i, Y^j) \neq 0$ . On en déduit que  $X^i \neq 0$  et  $Y^j \neq 0$ . Ainsi  $i < N$  et  $j > M$  et donc  $n = j - i \geq M - N + 2$ .

De même, si  $X^n = 0$  pour  $n \leq N$  et  $Y^n = 0$  pour  $n \geq M$  alors  $\text{Hom}^*(X, Y)^n = 0$  pour  $n \geq M - N - 1$ . En effet,  $\text{Hom}^*(X, Y)^n \neq 0$  impose qu'il existe  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $j - i = n$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^i, Y^j) \neq 0$ . On en déduit que  $X^i \neq 0$  et  $Y^j \neq 0$ . Ainsi  $i > N$  et  $j < M$  et donc  $n = j - i \leq M - N - 2$ .

Le foncteur  $\text{Hom}^*$  induit donc des foncteurs de  $\text{Com}(\mathcal{C})^+ \times \text{Com}(\mathcal{C})^-$  dans  $\text{Com}(\mathcal{C})^-$ , mais aussi de  $\text{Com}(\mathcal{C})^- \times \text{Com}(\mathcal{C})^+$  dans  $\text{Com}(\mathcal{C})^+$  et enfin de  $\text{Com}(\mathcal{C})^b \times \text{Com}(\mathcal{C})^b$  dans  $\text{Com}(\mathcal{C})^b$ . ■

## TRANSFORMATIONS NATURELLES

On étudie ici quelques transformations naturelles usuelles faisant intervenir le complexe  $\text{Hom}$ . La transformation naturelle  $\alpha$  (voir la proposition 3.66) permettra par exemple de définir la translation sur la catégorie homotopique.

**Notation 3.65 – Isomorphisme canonique.** Soit  $X$  un  $A$ -module, on note  $\Phi_X$  l'isomorphisme canonique de  $A$ -modules

$$\Phi_X : \begin{cases} \text{Hom}_A(A, X) \longrightarrow X \\ f \longmapsto f(1). \end{cases}$$

**Proposition 3.66 – Transformation naturelle et complexe  $\text{Hom}$ .** Soit  $(X, d_X)$  un complexe de  $A$ -modules. La famille  $\Phi_X = (\Phi_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$  réalise un isomorphisme naturel de complexes entre  $\text{Hom}^*(A, X)$  et  $X$ .

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$ . Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit

$$\delta^n = \text{id}_{\prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^{n+k+1})}.$$

La famille  $\delta_{X,Y} = (\delta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  réalise un isomorphisme naturel de complexes entre  $\text{Hom}^*(X, Y[1])$  et  $\text{Hom}^*(X, Y)[1]$ .

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$ . Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit

$$\gamma^n : \begin{cases} \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{k-1}, Y^{n+k}) \longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^{n+k+1}) \\ (f^k)_{k \in \mathbb{Z}} \longmapsto (-1)^n (f^{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}. \end{cases}$$

La famille  $\gamma_{X,Y} = (\gamma^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  réalise un isomorphisme naturel de complexes entre  $\text{Hom}^*(X[-1], Y)$  et  $\text{Hom}^*(X, Y)[1]$ .

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$ . Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit

$$\alpha^n : \begin{cases} \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^{n+k}) \longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{k+1}, Y^{n+k+1}) \\ (f^k)_{k \in \mathbb{Z}} \longmapsto (-1)^n (f^{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}. \end{cases}$$

La famille  $\alpha_{X,Y} = (\alpha^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  réalise un isomorphisme naturel entre  $\text{Hom}^*(X, Y)$  et  $\text{Hom}^*(X[1], Y[1])$ .

**Preuve.** Comme  $A$  est concentré en degré 0, on a  $\text{Hom}^*(A, X)^n = \text{Hom}_A(A, X^n)$  et la différentielle  $d_{\text{Hom}^*(A, X)}^n$  se résume à

$$d_{\text{Hom}^*(A, X)}^n : \begin{cases} \text{Hom}_A(A, X^n) \longrightarrow \text{Hom}_A(A, X^{n+1}) \\ u \longmapsto d_X^n u. \end{cases}$$

Montrons que  $(\Phi_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes. Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , l'application  $\Phi_{X^n} : \text{Hom}^*(A, X)^n \rightarrow X^n$  est bien  $A$ -linéaire. De plus, pour  $u \in \text{Hom}_A(A, X^n)$ , on a

$$\Phi_{X^{n+1}} d_{\text{Hom}^*(A, X)}^n(u) = \Phi_{X^{n+1}} d_X^n u = d_X^n(u(1)) = d_X^n \Phi_{X^n}(u).$$

Ainsi  $(\Phi_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes. De plus, chacun des  $\Phi_{X^n}$  est un isomorphisme. Ainsi  $(\Phi_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$  est un isomorphisme de complexes.

Montrons la naturalité. Soient  $(X', d_{X'})$  un complexe de  $A$ -modules et  $f : X \rightarrow X'$  un morphisme de complexe de  $A$ -modules. Comme  $\text{Hom}^*(A, X)^n = \text{Hom}_A(A, X^n)$ ,  $\text{Hom}^*(A, X')^n = \text{Hom}_A(A, X'^n)$  et  $\text{Hom}^*(\text{id}_A, f)^n$  est la composition à gauche par  $f$ , on en déduit que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}^\bullet(A, X)^n & \xrightarrow{\Phi_{X^n}} & X^n \\
 \text{Hom}^\bullet(\text{id}_A, f)^n \downarrow & & \downarrow f \\
 \text{Hom}^\bullet(A, X')^n & \xrightarrow{\Phi_{X'^n}} & X'^n
 \end{array}$$

Intéressons-nous à présent au lien entre le décalage et le foncteur  $\text{Hom}$ . Par définition, on a

$$\text{Hom}^\bullet(X, Y[1])^n = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y[1]^{n+k}) = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^{n+k+1}) = \text{Hom}^\bullet(X, Y)^{n+1} = \text{Hom}^\bullet(X, Y)[1]^n.$$

Ainsi  $\delta^n$  définit bien une application R-linéaire de  $\text{Hom}^\bullet(X, Y[1])^n$  dans  $\text{Hom}^\bullet(X, Y)[1]^n$ . Montrons que la famille  $(\delta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est bien un morphisme de complexes. Pour  $(f^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}^\bullet(X, Y[1])^n$ , on a

$$\delta^{n+1} d_{\text{Hom}^\bullet(X, Y[1])}^n((f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = \delta^{n+1}((-d_Y^{n+k+1} f^k + (-1)^{n+1} f^{k+1} d_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (-d_Y^{n+k+1} f^k + (-1)^{n+1} f^{k+1} d_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

et  $d_{\text{Hom}^\bullet(X, Y)[1]}^n \delta^n((f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = -d_{\text{Hom}^\bullet(X, Y)}^{n+1}((f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = -(d_Y^{n+1+k} f^k + (-1)^{n+2} f^{k+1} d_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}.$

Ainsi  $\delta_{X, Y}$  est un morphisme de complexes de  $\mathcal{C}$ . De plus, chacun des  $\delta^n$  est un isomorphisme et  $\delta_{X, Y}$  est un isomorphisme de complexes.

Montrons la naturalité. Considérons deux complexes  $(X', d_{X'})$ ,  $(Y', d_{Y'})$  et deux morphismes de complexes  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : X' \rightarrow X$  et  $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} : Y \rightarrow Y'$ . Pour  $(u^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}^\bullet(X, Y[1])^n$ , on a

$$\text{Hom}^\bullet(f, g)[1]^n \delta^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = \text{Hom}^\bullet(f, g)^{n+1}((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (g^{n+1+k} u^k f^k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

et  $\delta^n \text{Hom}^\bullet(f, g[1])^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = \delta^n(g[1]^{n+k} u^k f^k)_{k \in \mathbb{Z}} = (g^{n+k+1} u^k f^k)_{k \in \mathbb{Z}}.$

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif et on a la naturalité cherchée.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}^\bullet(X, Y[1])^n & \xrightarrow{\delta^n} & \text{Hom}^\bullet(X, Y)[1]^n \\
 \text{Hom}^\bullet(f, g[1])^n \downarrow & & \downarrow \text{Hom}^\bullet(f, g)[1]^n \\
 \text{Hom}^\bullet(X', Y'[1])^n & \xrightarrow{\delta^n} & \text{Hom}^\bullet(X', Y')[1]^n
 \end{array}$$

Étudions à présent le décalage sur le terme de gauche. Par définition, on a

$$\text{Hom}^\bullet(X[-1], Y)^n = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X[-1]^k, Y^{n+k}) = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{k-1}, Y^{n+k})$$

et  $\text{Hom}^\bullet(X, Y)[1]^n = \text{Hom}^\bullet(X, Y)^{n+1} = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^{n+k+1}).$

Ainsi  $\gamma^n$  définit bien une application R-linéaire de  $\text{Hom}^\bullet(X[-1], Y)^n$  dans  $\text{Hom}^\bullet(X, Y)[1]^n$ . Montrons que la famille  $(\gamma^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est bien un morphisme de complexes. Pour  $(f^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}^\bullet(X[-1], Y)^n$ , on a

$$\begin{aligned}
 \gamma^{n+1} d_{\text{Hom}^\bullet(X[-1], Y)}^n((f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) &= \gamma^{n+1}((d_Y^{n+k} f^k + (-1)^{n+1} f^{k+1} d_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}) \\
 &= \gamma^{n+1}((d_Y^{n+k} f^k + (-1)^n f^{k+1} d_X^{k-1})_{k \in \mathbb{Z}}) \\
 &= (-1)^{n+1} (d_Y^{n+k+1} f^{k+1} + (-1)^n f^{k+2} d_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}
 \end{aligned}$$

et  $d_{\text{Hom}^\bullet(X, Y)[1]}^n \gamma^n((f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = -d_{\text{Hom}^\bullet(X, Y)}^{n+1}((-1)^n (f^{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}) = (-1)^{n+1} (d_Y^{n+1+k} f^{k+1} + (-1)^{n+2} f^{k+2} d_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}.$

Ainsi  $\gamma_{X, Y}$  est un morphisme de complexes de  $\mathcal{C}$ . De plus, chacun des  $\gamma^n$  est un isomorphisme et  $\gamma_{X, Y}$  est un isomorphisme de complexes.

Montrons la naturalité. Considérons deux complexes  $(X', d_{X'})$ ,  $(Y', d_{Y'})$  et deux morphismes de complexes  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : X' \rightarrow X$  et  $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} : Y \rightarrow Y'$ . Pour  $(u^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}^\bullet(X[-1], Y)^n$ , on a

$$\text{Hom}^\bullet(f, g)[1]^n \gamma^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = \text{Hom}^\bullet(f, g)^{n+1}((-1)^n (u^{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}) = (-1)^n (g^{n+1+k} u^{k+1} f^k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

et  $\gamma^n \text{Hom}^\bullet(f[-1], g)^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = \gamma^n(g^{n+k} u^k f[-1]^k)_{k \in \mathbb{Z}} = \gamma^n(g^{n+k} u^k f^{k-1})_{k \in \mathbb{Z}} = (-1)^n (g^{n+k+1} u^{k+1} f^k)_{k \in \mathbb{Z}}.$

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif et on a la naturalité cherchée.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}^\bullet(X[-1], Y)^n & \xrightarrow{\gamma^n} & \text{Hom}^\bullet(X, Y)[1]^n \\
 \text{Hom}^\bullet(f[-1], g)^n \downarrow & & \downarrow \text{Hom}^\bullet(f, g)[1]^n \\
 \text{Hom}^\bullet(X'[-1], Y')^n & \xrightarrow{\gamma^n} & \text{Hom}^\bullet(X', Y')[1]^n
 \end{array}$$

Terminons sur le décalage de chacun des deux termes. Par définition, on a

$$\text{Hom}^\bullet(X, Y)^n = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^{n+k}) \quad \text{et} \quad \text{Hom}^\bullet(X[1], Y[1])^n = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{k+1}, Y^{n+k+1}).$$

Ainsi  $\alpha^n$  définit bien une application R-linéaire de  $\text{Hom}^\bullet(X, Y)^n$  dans  $\text{Hom}^\bullet(X[1], Y[1])^n$ . Montrons que la famille  $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est bien un morphisme de complexes. Pour  $(f^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}^\bullet(X, Y)^n$ , on a

$$\begin{aligned} \alpha^{n+1} d_{\text{Hom}^\bullet(X, Y)}^n((f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) &= \alpha^{n+1}((d_Y^{n+k} f^k + (-1)^{n+1} f^{k+1} d_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}) \\ &= (-1)^{n+1}(d_Y^{n+k+1} f^{k+1} + (-1)^{n+1} f^{k+2} d_X^{k+1})_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_{\text{Hom}^\bullet(X[1], Y[1])}^n \alpha^n((f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) &= d_{\text{Hom}^\bullet(X[1], Y[1])}^n((-1)^n (f^{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}) \\ &= (-1)^n (d_{Y[1]}^{n+k} f^{k+1} + (-1)^{n+1} f^{k+2} d_{X[1]}^k)_{k \in \mathbb{Z}} \\ &= (-1)^{n+1}(d_Y^{n+k+1} f^{k+1} + (-1)^{n+1} f^{k+2} d_X^{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Ainsi  $\alpha_{X, Y}$  est un morphisme de complexes de  $\mathcal{C}$ . De plus, chacun des  $\alpha^n$  est un isomorphisme et  $\alpha_{X, Y}$  est un isomorphisme de complexes.

Montrons la naturalité. Considérons deux complexes  $(X', d_{X'})$ ,  $(Y', d_{Y'})$  et deux morphismes de complexes  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : X' \rightarrow X$  et  $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} : Y \rightarrow Y'$ . Pour  $(u^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}^\bullet(X, Y)^n$ , on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}^\bullet(f[1], g[1])^n \alpha^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) &= \text{Hom}^\bullet(f[1], g[1])^n((-1)^n (u^{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}) \\ &= (-1)^n (g[1]^{n+k} u^{k+1} f[1]^k)_{k \in \mathbb{Z}} \\ &= (-1)^n (g^{n+k+1} u^{k+1} f^{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

et

$$\alpha^n \text{Hom}^\bullet(f, g)^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = \alpha^n(g^{n+k} u^k f^k)_{k \in \mathbb{Z}} = (-1)^n (g^{n+k+1} u^{k+1} f^{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif et on a la naturalité cherchée.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}^\bullet(X, Y)^n & \xrightarrow{\alpha^n} & \text{Hom}^\bullet(X[1], Y[1])^n \\ \text{Hom}^\bullet(f, g)^n \downarrow & & \downarrow \text{Hom}^\bullet(f[1], g[1])^n \\ \text{Hom}^\bullet(X', Y')^n & \xrightarrow{\alpha^n} & \text{Hom}^\bullet(X'[1], Y'[1])^n \end{array}$$

On a bien montré les résultats souhaités. ■

Comme les sous-catégories de complexes bornés sont pleines, les transformations naturelles précédentes passent aux catégories des complexes bornés : c'est le sens de la remarque qui suit.

**Remarque 3.67 – Complexes bornés.** Soit  $* \in \{ub, +, -, b\}$ . Comme  $A$  est borné, le foncteur  $\text{Hom}^\bullet(A, \bullet)$  définit un foncteur de  $A\text{Com}^*$  dans  $A\text{Com}^*$ . Le premier isomorphisme de la proposition 3.66 et le fait que  $A\text{Com}^*$  soit une sous-catégorie pleine de  $A\text{Com}$  assurent que les foncteurs  $\text{Hom}^\bullet(A, \bullet)$  et  $\text{id}_{A\text{Com}^*}$  sont isomorphes.

On note  $T$  le foncteur de décalage. La remarque 3.64 montre que  $\text{Hom}^\bullet(\bullet, T(\bullet))$  et  $T\text{Hom}^\bullet(\bullet, \bullet)$  induisent des foncteurs isomorphes de  $(\text{Com}\mathcal{C}^+)^{\text{op}} \times \text{Com}\mathcal{C}^-$  (resp.  $(\text{Com}\mathcal{C}^-)^{\text{op}} \times \text{Com}\mathcal{C}^+$ ,  $(\text{Com}\mathcal{C}^b)^{\text{op}} \times (\text{Com}\mathcal{C}^b)$ ) dans  $\text{Com}\mathcal{C}^-$  (resp.  $\text{Com}\mathcal{C}^+$  et  $\text{Com}\mathcal{C}^b$ ).

La remarque 3.64 montre que les foncteurs  $\text{Hom}^\bullet(T^{-1}(\bullet), \bullet)$  et  $T\text{Hom}^\bullet(\bullet, \bullet)$  induisent des foncteurs isomorphes de  $(\text{Com}\mathcal{C}^+)^{\text{op}} \times \text{Com}\mathcal{C}^-$  (resp.  $(\text{Com}\mathcal{C}^-)^{\text{op}} \times \text{Com}\mathcal{C}^+$ ,  $(\text{Com}\mathcal{C}^b)^{\text{op}} \times (\text{Com}\mathcal{C}^b)$ ) dans  $\text{Com}\mathcal{C}^-$  (resp.  $\text{Com}\mathcal{C}^+$  et  $\text{Com}\mathcal{C}^b$ ).

La remarque 3.64 montre que les foncteurs  $\text{Hom}^\bullet(T(\bullet), T(\bullet))$  et  $\text{Hom}^\bullet(\bullet, \bullet)$  induisent des foncteurs isomorphes de  $(\text{Com}\mathcal{C}^+)^{\text{op}} \times \text{Com}\mathcal{C}^-$  (resp.  $(\text{Com}\mathcal{C}^-)^{\text{op}} \times \text{Com}\mathcal{C}^+$ ,  $(\text{Com}\mathcal{C}^b)^{\text{op}} \times (\text{Com}\mathcal{C}^b)$ ) dans  $\text{Com}\mathcal{C}^-$  (resp.  $\text{Com}\mathcal{C}^+$  et  $\text{Com}\mathcal{C}^b$ ). ■

## FONCTEUR HOM ET TRANSLATION

Dans les trois remarques qui suivent, on vérifie que les foncteurs et transformations naturelles définis grâce au complexe  $\text{Hom}$  se comportent bien vis-à-vis des translations.

**Remarque 3.68 – Foncteurs Hom et translation.** Soit  $(X, d_X)$  un complexe de  $\mathcal{C}$  (resp. borné à gauche, borné à droite, borné). La proposition 3.66 montre que le foncteur  $\text{Hom}^\bullet(X, \bullet)$  est un foncteur de catégories R-linéaires à translation (voir la définition 10.1.1 de [K-S]) de  $\text{Com}(\mathcal{C})$  (resp.  $\text{Com}(\mathcal{C})^-$ ,  $\text{Com}(\mathcal{C})^+$ ,  $\text{Com}(\mathcal{C})^b$ ) dans  $\text{Com}(\mathcal{C})$  (resp  $\text{Com}(\mathcal{C})^-$ ,  $\text{Com}(\mathcal{C})^+$ ,  $\text{Com}(\mathcal{C})^b$ ).

Soit  $(Y, d_Y)$  un complexe de  $\mathcal{C}$  (resp. borné à gauche, borné à droite, borné). La proposition 3.66 montre que le foncteur  $\text{Hom}^\bullet(\bullet, Y)$  est un foncteur de catégories R-linéaires à translation de  $\text{Com}(\mathcal{C})$  (resp.  $\text{Com}(\mathcal{C})^-$ ,  $\text{Com}(\mathcal{C})^+$ ,  $\text{Com}(\mathcal{C})^b$ ) dans  $\text{Com}(\mathcal{C})$  (resp  $\text{Com}(\mathcal{C})^+$ ,  $\text{Com}(\mathcal{C})^-$ ,  $\text{Com}(\mathcal{C})^b$ ). ■

**Remarque 3.69 — Transformation naturelle entre foncteurs de catégories à translation.** On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}^\bullet(A, X[1]) & \xrightarrow{\delta_{A,X}} & \mathrm{Hom}^\bullet(A, X)[1] \\ \Phi_{X[1]} \downarrow & & \downarrow \Phi_{X[1]} \\ X[1] & \xrightarrow{\mathrm{id}_{X[1]}} & X[1] \end{array}$$

En effet, en degré  $n$ , on a pour  $f \in \mathrm{Hom}_A(A, X^{n+1})$ ,

$$\Phi_X[1]^n \delta_{A,X}^n(f) = \Phi_X^{n+1}(f) = f(1) \quad \text{et} \quad \mathrm{id}_{X[1]}^n \Phi_{X[1]}^n(f) = f(1).$$

Autrement dit, la transformation naturelle  $\Phi : \mathrm{Hom}^\bullet(A, \bullet) \rightarrow \mathrm{id}_{A\mathrm{Com}}$  est un morphisme de foncteurs de catégories à translation (voir la définition 10.1.1 de [K-S]). Comme le complexe  $A$  est borné, on obtient bien sûr le même résultat pour les catégories  $A\mathrm{Com}^+$ ,  $A\mathrm{Com}^-$  et  $A\mathrm{Com}^b$ . ■

**Remarque 3.70 — Double décalage.** Soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux complexes  $\mathcal{C}$ . Le diagramme suivant est anti-commutatif : on a  $\gamma_{X,Y}[1] \circ \delta_{X[-1],Y} = -\delta_{X,Y}[1] \circ \gamma_{X,Y[1]}$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}^\bullet(X[-1], Y[1]) & \xrightarrow{\delta_{X[-1],Y}} & \mathrm{Hom}^\bullet(X[-1], Y)[1] \\ \gamma_{X,Y[1]} \downarrow & & \downarrow \gamma_{X,Y[1]} \\ \mathrm{Hom}^\bullet(X, Y[1])[1] & \xrightarrow{\delta_{X,Y[1]}} & \mathrm{Hom}^\bullet(X, Y)[2] \end{array}$$

En effet, pour  $n \in \mathbb{Z}$  et  $(u^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}^\bullet(X[-1], Y[1])^n$ , on a

$$\gamma_{X,Y[1]}^n \circ \delta_{X[-1],Y}^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = \gamma_{X,Y}^{n+1}((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (-1)^{n+1}((u^{k+1})_{k \in \mathbb{Z}})$$

et  $\delta_{X,Y[1]}^n \circ \gamma_{X,Y[1]}^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = \delta_{X,Y}^{n+1}((-1)^n(u^{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}) = (-1)^n((u^{k+1})_{k \in \mathbb{Z}})$ .

Autrement dit, suivant la définition de [K-S, définition 10.1.1(v)], le foncteur  $\mathrm{Hom}^\bullet(\bullet, \bullet)$  est un bifoncteur de catégories  $\mathrm{R}\text{-linéaires à translation}$ . ■

### 3.4.3 LE CAS DES CATÉGORIES ABÉLIENNES

Dans cette sous-section, on étudie le cas où la catégorie  $\mathcal{C}$  est abélienne. La catégorie des complexes hérite alors aussi d'une structure abélienne (proposition 3.71). De plus, on peut définir un nouvel outil : la cohomologie d'un complexe qui mène aux notions de complexes exacts et de quasi-isomorphismes ainsi qu'aux bases de l'algèbre homologique.

**Proposition 3.71 — Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie abélienne.** Lorsque  $\mathcal{C}$  est une catégorie abélienne, les catégories  $\mathrm{Com}(\mathcal{C})$ ,  $\mathrm{Com}(\mathcal{C})^+$ ,  $\mathrm{Com}(\mathcal{C})^-$  et  $\mathrm{Com}(\mathcal{C})^b$  sont abéliennes.

**Preuve.** Commençons par montrer un premier résultat général dans les catégories additives. Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie additive,  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : X \rightarrow Y$  un morphisme de complexes. On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f^n$  est un monomorphisme alors  $f$  en est un. En effet, si  $(Z, d_Z)$  est un complexe de  $\mathcal{C}$  et  $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} : Z \rightarrow X$  un morphisme de complexe vérifiant  $fg = 0$ , on a  $f^n g^n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et donc  $g^n = 0$  pour tout  $n$ . Ainsi  $g = 0$ . De même, si pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f^n$  est un épimorphisme alors  $f$  en est un. En effet, si  $(Z, d_Z)$  est un complexe de  $\mathcal{C}$  et  $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} : Y \rightarrow Z$  un morphisme de complexe vérifiant  $gf = 0$ , on a  $g^n f^n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et donc  $g^n = 0$  pour tout  $n$ . Ainsi  $g = 0$ .

On suppose à présent que  $\mathcal{C}$  est une catégorie abélienne. Soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : X \rightarrow Y$  un morphisme de complexes. Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on pose  $(X'^n, i^n)$  le noyau de  $f^n : X^n \rightarrow Y^n$  et  $(Y'^n, q^n)$  le conoyau de  $f^n : X^n \rightarrow Y^n$ .

L'application  $d_X^n$  induit un unique morphisme  $d_{X'}^n : X'^n \rightarrow X'^{n+1}$  vérifiant  $i^{n+1} d_{X'}^n = d_X^n i^n$ . En effet, on a  $f^{n+1} d_X^n i^n = d_Y^n f^n i^n = 0$  et donc  $d_X^n i^n$  se factorise par le noyau de  $f^{n+1}$ .

Montrons que  $(X', d_{X'})$  est un complexe. Il suffit de montrer que  $d_{X'}^{n+1} d_{X'}^n = 0$ . Or par construction, on a  $i^{n+2} d_{X'}^{n+1} d_{X'}^n = d_X^{n+1} i^{n+1} d_{X'}^n = d_X^{n+1} d_X^n i^n = 0$ . Comme  $i^{n+2}$  est un monomorphisme, on en déduit que  $(X', d_{X'})$  est un complexe. De plus, la construction de  $d_{X'}$  assure que  $i = (i^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexe de  $X'$  dans  $X$ .

Montrons que  $((X', d_{X'}), i)$  est un noyau de  $f$ . Soit  $(Z, d_Z)$  soit un complexe de  $\mathcal{C}$  et  $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} : Z \rightarrow X$  tel que  $fg = 0$ . Montrons que  $g$  se factorise par  $i$ . Par hypothèse, on a  $f^n g^n = 0$ . Par définition de  $i^n$ , on peut écrire  $g^n = i^n h^n$  avec  $h^n : Z^n \rightarrow X'^n$ . Montrons que  $(h^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes. On a  $i^{n+1} h^{n+1} d_Z^n = g^{n+1} d_Z^n = d_X^n g^n = d_X^n i^n h^n = i^{n+1} d_{X'}^n h^n$ . Comme  $i^{n+1}$  est un monomorphisme, on en déduit que

$(h^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes. De plus, on a bien  $g = ih$ . Enfin, d'après le résultat préliminaire,  $i$  est un monomorphisme, ce qui donne l'unicité de la factorisation à travers  $i$ . Ainsi  $((X', d_{X'}), i)$  est un noyau de  $f$ .

L'application  $d_{Y'}^n$  induit un unique morphisme  $d_{Y'}^n : Y'^n \rightarrow Y'^{n+1}$  vérifiant  $q^{n+1}d_Y^n = d_{Y'}^n \circ q^n$ . En effet, on a  $q^{n+1}d_Y^n f^n = q^{n+1}f^{n+1}d_X^n = 0$  et donc  $q^{n+1}d_Y^n$  se factorise par le conoyau de  $f^n$ .

Montrons que  $(Y', d_{Y'})$  est un complexe. Il suffit de montrer que  $d_{Y'}^{n+1}d_{Y'}^n = 0$ . Or par construction, on a  $d_{Y'}^{n+1}d_{Y'}^n q^n = d_{Y'}^{n+1}q^{n+1}d_Y^n = q^{n+2}d_Y^{n+1}d_Y^n = 0$ . Comme  $q^n$  est un épimorphisme, on en déduit que  $(Y', d_{Y'})$  est un complexe. De plus, la construction de  $d_{Y'}$  assure que  $q = (q^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes de  $Y$  dans  $Y'$ .

Montrons que  $((Y', d_{Y'}), q)$  est un conoyau de  $f$ . Soit  $(Z, d_Z)$  un complexe de  $\mathcal{C}$  et  $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} : Y \rightarrow Z$  tel que  $gf = 0$ . Montrons que  $g$  se factorise par  $q$ . Par hypothèse, on a  $g^n f^n = 0$ . Par définition de  $q^n$ , on peut écrire  $g^n = h^n q^n$  avec  $h^n : Y'^n \rightarrow Z$ . Montrons que  $(h^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes. On a  $d_Z^n h^n q^n = d_Z^n g^n = g^{n+1}d_Y^n = h^{n+1}q^{n+1}d_Y^n = h^{n+1}d_{Y'}^n q^n$ . Comme  $q^n$  est un épimorphisme, on en déduit que  $(h^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes. De plus, on a bien  $g = hq$ . Enfin, d'après le résultat préliminaire,  $q$  est un épimorphisme, ce qui donne l'unicité de la factorisation à travers  $q$ . Ainsi  $((Y', d_{Y'}), q)$  est un conoyau de  $f$ .

On en déduit que les morphismes de  $\text{Com}(\mathcal{C})$  ont des noyaux et des conoyaux. On en déduit aussi la réciproque du résultat préliminaire dans une catégorie abélienne : si  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un monomorphisme (resp. épimorphisme) de complexes alors tous les  $f^n$  aussi. En effet, si  $f$  est un monomorphisme (resp. épimorphisme) alors son noyau (resp. conoyau) est nul. La construction du noyau (resp. conoyau) de  $f$  montre alors que le noyau (resp. conoyau) de  $f^n$  est nul pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et donc  $f^n$  est un monomorphisme (resp. épimorphisme).

Soit  $f = (f^n) \in \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}(X, Y)$  un monomorphisme (resp. un épimorphisme) dans  $\text{Com}(\mathcal{C})$ . On considère alors  $((Y', d_{Y'}), q = (q^n)_{n \in \mathbb{Z}})$  (resp.  $((X', d_{X'}), i = (i^n)_{n \in \mathbb{Z}})$ ) le conoyau de  $f$  (resp. le noyau de  $f$ ). Par définition,  $d_{Y'}^n$  (resp.  $d_{X'}^n$ ) est l'unique morphisme vérifiant  $q^{n+1}d_Y^n = d_{Y'}^n \circ q^n$  (resp.  $i^{n+1}d_X^n = d_{X'}^n \circ i^n$ ). Comme  $\mathcal{C}$  est abélienne,  $(X^n, f^n)$  (resp.  $(Y^n, f^n)$ ) est le noyau (resp. conoyau) de  $q^n$  (resp.  $i^n$ ). Et la différentielle (en degré  $n$ ) du noyau de  $q$  est par définition l'unique morphisme (noté  $d^n$ ) vérifiant  $f^{n+1}d^n = d_Y^n f^n$  (resp.  $f^{n+1}d_X^n = d_X^n f^n$ ). Par unicité, on a  $d^n = d_X^n$  (resp.  $d^n = d_Y^n$ ). Ainsi  $((X, d_X), f)$  (resp.  $((Y, d_Y), f)$ ) est le noyau (conoyau) de son conoyau (son noyau). On en déduit que  $\text{Com}(\mathcal{C})$  est une catégorie abélienne.

Soit  $* \in \{+, -, b\}$ . On suppose que  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  sont des objets de  $\text{Com}(\mathcal{C})^*$  et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de complexes. Par construction, le noyau et le conoyau de  $f$  sont dans  $\text{Com}(\mathcal{C})^*$ . Comme  $\text{Com}(\mathcal{C})^*$  est une sous-catégorie de  $\text{Com}(\mathcal{C})$ , le noyau et le conoyau de  $f$  dans  $\text{Com}(\mathcal{C})$  sont aussi le noyau et le conoyau dans  $\text{Com}(\mathcal{C})^*$ . De plus, supposons que  $f$  soit un monomorphisme (resp. un épimorphisme) dans  $\text{Com}(\mathcal{C})^*$ . Le noyau (resp. conoyau) de  $f$  dans  $\text{Com}(\mathcal{C})^*$  est alors le complexe nul. Comme les noyaux (resp. conoyaux) dans  $\text{Com}(\mathcal{C})^*$  et  $\text{Com}(\mathcal{C})$  coïncident, on en déduit que  $f$  est un monomorphisme (resp. épimorphisme) dans  $\text{Com}(\mathcal{C})$  et donc  $f$  est le noyau de son conoyau (resp. le conoyau de son noyau) dans  $\text{Com}(\mathcal{C})$ . Comme le conoyau (resp. noyau) est par construction dans  $\text{Com}(\mathcal{C})^*$ , la coïncidence des noyaux et conoyaux dans  $\text{Com}(\mathcal{C})$  et  $\text{Com}(\mathcal{C})^*$  assure que  $f$  est le noyau de son conoyau (resp. conoyau de son noyau) dans  $\text{Com}(\mathcal{C})^*$ . Autrement dit,  $\text{Com}(\mathcal{C})^*$  est une catégorie abélienne et le foncteur d'inclusion est exact. On en déduit aussi immédiatement que les foncteurs d'inclusion de  $\text{Com}(\mathcal{C})^b$  dans  $\text{Com}(\mathcal{C})^+$  ou  $\text{Com}(\mathcal{C})^-$  sont exacts.

Finalement, soit  $* \in \{ub, +, -, b\}$ . Par construction des noyaux et conoyaux, une suite

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

dans  $\text{Com}(\mathcal{C})^*$  est exacte si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la suite

$$X^n \xrightarrow{f^n} Y^n \xrightarrow{g^n} Z^n$$

est exacte dans  $\mathcal{C}$ . ■

**Remarque 3.72 – Décalage et catégorie abélienne.** Soient  $* \in \{ub, +, -, b\}$  et  $m \in \mathbb{Z}$ . On suppose que  $\mathcal{C}$  est une catégorie abélienne. La construction des noyaux et des conoyaux dans  $\text{Com}(\mathcal{C})^*$  assure que, pour un morphisme de complexe  $f$ , on a  $\text{Ker}(f[m]) = (\text{Ker } f)[m]$  et  $\text{Coker}(f[m]) = (\text{Coker } f)[m]$ . On en déduit que  $\lceil m \rceil$  est un foncteur exact et donc  $\lceil m \rceil$  est une auto-équivalence de la catégorie abélienne de  $\text{Com}(\mathcal{C})^*$ . ■

## COHOMOLOGIE

On définit ici la cohomologie d'un complexe dans une catégorie abélienne puis on donne l'exemple de la cohomologie du complexe Hom.

**Proposition 3.73 – Foncteurs Cohomologie.** On suppose que  $\mathcal{C}$  est une catégorie abélienne. Lorsque  $(X, d_X)$  est un complexe de  $\mathcal{C}$ , on définit les familles d'objets de  $\mathcal{C}$

$$ZX = (Z^n X)_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{où} \quad Z^n X = \text{Ker } d_X^n, \quad BX = (B^n X)_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{où} \quad B^n X = \text{Im } d_X^{n-1},$$

et

$$HX = (H^n X)_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{où} \quad H^n X = Z^n X / B^n X.$$

Soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{N}} : X \rightarrow Y$  un morphisme de complexes de  $\mathcal{C}$ . On peut alors définir les familles de morphismes de  $\mathcal{C}$  :

$$Zf = (Z^n f)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ où } Z^n f : Z^n X \rightarrow Z^n Y \text{ est le morphisme induit par } f^n,$$

$$Bf = (B^n f)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ où } B^n f : B^n X \rightarrow B^n Y \text{ est le morphisme induit par } f^n$$

et

$$Hf = (H^n f)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ où } H^n f : Z^n X \rightarrow B^n Y \text{ est le morphisme induit par } f^n.$$

On définit ainsi trois foncteurs de catégories R-linéaires à translation

$$Z: \begin{cases} \text{Com}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathbb{Z}} \\ X \longmapsto ZX \\ f \longmapsto Zf \end{cases} \quad B: \begin{cases} \text{Com}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathbb{Z}} \\ X \longmapsto BX \\ f \longmapsto Bf \end{cases} \quad \text{et} \quad H: \begin{cases} \text{Com}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathbb{Z}} \\ X \longmapsto HX \\ f \longmapsto Hf. \end{cases}$$

**Preuve.** Comme la catégorie  $\mathcal{C}$  est abélienne,  $Z^n X$  et  $B^n X$  sont bien définis. Montrons que la relation  $d_X^n d_X^{n-1} = 0$  assure que  $B^n X$  est un sous-objet de  $Z^n X$ . On pose  $j_X : B^n X \rightarrow X^n$  le morphisme d'inclusion et  $q_X : X^n \rightarrow \text{Coker } d_X^{n-1}$  le morphisme canonique. Par hypothèse, on a  $q_X d_X^{n-1} = 0$ . Ainsi  $d_X^{n-1}$  se factorise de façon unique par  $\text{Ker } q_X = \text{Im } d_X^{n-1}$  c'est-à-dire qu'il existe un unique morphisme  $\tilde{d} : X^{n-1} \rightarrow B^n X$  tel que  $j_X \tilde{d} = d_X^{n-1}$ . Les axiomes des catégories abéliennes assurent que  $\tilde{d}$  est un épimorphisme (c'est un conoyau de l'inclusion  $\text{Ker } d_X^{n-1}$  dans  $X^{n-1}$ ). Or on a  $d_X^n \circ j_X \circ \tilde{d} = d_X^n d_X^{n-1} = 0$  et donc  $d_X^n j_X = 0$  (puisque  $\tilde{d}$  est un épimorphisme). Ainsi  $j_X$  se factorise par  $\text{Ker } d_X^n = Z^n X$  c'est-à-dire qu'il existe un unique morphisme  $j'_X : B^n X \rightarrow Z^n X$  tel que  $i_X j'_X = j_X$ . De plus,  $j'_X$  est un monomorphisme puisque  $i_X j'_X = j_X$  en est un. Finalement on peut bien définir  $H^n X$  comme le conoyau de l'inclusion de  $j'_X : B^n X \rightarrow Z^n X$ .

Montrons que  $f^n$  induit un morphisme  $Z^n X$  dans  $Z^n Y$ . On note  $i_X : Z^n X \rightarrow X^n$  et  $i_Y : Z^n Y \rightarrow Y^n$  les morphismes d'inclusion. On a  $d_Y^{n+1} f^n i_X = f^{n+1} d_X^n i_X = 0$ . Ainsi  $f^n i_X$  se factorise de façon unique par  $Z^n Y$  c'est-à-dire qu'il existe un unique morphisme  $Z^n f : Z^n X \rightarrow Z^n Y$  tel que  $i_Y Z^n f = f^n i_X$ .

Montrons que  $f^n$  induit un morphisme  $B^n X$  dans  $B^n Y$ . On note  $j_X : B^n X \rightarrow X^n$  et  $j_Y : B^n Y \rightarrow Y^n$  les morphismes d'inclusion et  $q_X : X^n \rightarrow \text{Coker } d_X^{n-1}$  et  $q_Y : Y^n \rightarrow \text{Coker } d_Y^{n-1}$  les morphismes canoniques. On a  $q_Y f^n d_X^{n-1} = q_Y d_Y^{n-1} f^{n-1} = 0$ . On en déduit que  $q_Y f^n$  se factorise de façon unique par  $\text{Coker } d_X^{n-1}$  c'est-à-dire qu'il existe un unique morphisme  $\tilde{f} : \text{Coker } d_X^{n-1} \rightarrow \text{Coker } d_Y^{n-1}$  tel que  $q_Y f^n = \tilde{f} q_X$ . On en déduit que  $q_Y f^n j_X = \tilde{f} q_X j_X = 0$ . Ainsi  $f^n j_X$  se factorise de façon unique par  $\text{Ker } q_Y = \text{Im } d_Y^{n-1}$  c'est-à-dire qu'il existe un unique morphisme  $B^n f : B^n X \rightarrow B^n Y$  tel que  $f^n j_X = j_Y B^n f$ .

Montrons que  $f^n$  induit un morphisme de  $H^n X$  dans  $H^n Y$ . On note  $j'_X : B^n X \rightarrow Z^n X$  et  $j'_Y : B^n Y \rightarrow Z^n Y$  les morphismes d'inclusion et  $q'_X : Z^n X \rightarrow H^n X$  et  $q'_Y : Z^n Y \rightarrow H^n Y$  les morphismes canoniques. Montrons pour commencer que  $j'_Y B^n f = j'_X Z^n f$ . Comme  $i_Y j'_Y = j_Y$  et  $i_X j'_X = j_X$ , on a

$$i_Y j'_Y B^n f = j_Y B^n f = f^n j_X = f^n i_X j'_X = i_Y Z^n f j'_X.$$

On obtient l'égalité souhaitée car  $i_Y$  est un monomorphisme. On en déduit que  $q'_Y Z^n f j'_X = q'_Y j'_Y B^n f = 0$  et donc  $q'_Y Z^n f$  se factorise de façon unique par  $\text{Coker } j'_X = H^n X$  c'est-à-dire il existe un unique morphisme  $H^n f$  tel que  $H^n f q'_X = q'_Y Z^n f$ .

Montrons à présent la fonctorialité. Soit  $(Z, d_Z)$  un complexe de  $\mathcal{C}$  et  $g : Y \rightarrow Z$  un morphisme de complexes de  $\mathcal{C}$ . On note  $i_Z : Z^n Z \rightarrow Z^n$ ,  $j_Z : B^n Z \rightarrow Z^n$  les morphismes d'inclusions et  $q'_Z : Z^n Z \rightarrow H^n Z$  le morphisme canonique. Comme  $Z^n g Z^n f$  vérifie  $i_Z Z^n g Z^n f = g^n i_Y Z^n f = g^n f^n i_X$ , on obtient, par unicité,  $Z^n(gf) = Z^n g Z^n f$ . De même,  $B^n g B^n f$  vérifie  $j_Z B^n g B^n f = g^n j_Y B^n f = g^n f^n j_X$  et donc, par unicité,  $B^n(gf) = B^n g B^n f$ . Enfin  $H^n g H^n f$  vérifie  $H^n g H^n f q'_X = H^n g q'_Y Z^n f = q'_Z Z^n g Z^n f = q'_Z Z^n(gf)$  et donc, par unicité,  $H^n(gf) = H^n g H^n f$ .

De même,  $\text{id}_{Z^n X}$  vérifie  $i_X \text{id}_{Z^n X} = i_X = \text{id}_{X^n} i_X$  et donc, par unicité,  $Z^n(\text{id}_X) = \text{id}_{Z^n X}$ . De façon identique,  $\text{id}_{B^n X}$  vérifie  $j_X \text{id}_{B^n X} = j_X = \text{id}_{X^n} j_X$  et, par unicité, on obtient  $B^n(\text{id}_X) = \text{id}_{B^n X}$ . Enfin, le morphisme  $\text{id}_{H^n X}$  vérifie  $\text{id}_{H^n X} q'_X = q'_X = q'_X \text{id}_{Z^n X} = q'_X Z^n(\text{id}_X)$  et donc  $H^n(\text{id}_X) = \text{id}_{H^n X}$ .

La R-linéarité des foncteurs  $Z$ ,  $B$  et  $H$  s'obtient de la même façon en utilisant l'unicité. Par ailleurs, comme  $\text{Ker } u = \text{Ker } (-u)$  (resp.  $\text{Im } u = \text{Im } (-u)$  et  $\text{Coker } u = \text{Coker } (-u)$ ) pour tout  $u$  morphisme d'une catégorie abélienne, on obtient que  $(ZX)[1] = Z(X[1])$ ,  $(BX)[1] = B(X[1])$  et  $(HX)[1] = H(X[1])$  pour tout complexe  $(X, d_X)$  et  $(Zf)[1] = Z(f[1])$ ,  $(Bf)[1] = B(f[1])$  et  $(Hf)[1] = H(f[1])$  pour tout morphisme de complexes. ■

**Définition 3.74 — Complex de cohomologie.** Soient  $(X, d_X)$  un complexe d'une catégorie abélienne  $\mathcal{C}$ . En suivant les notations de la définition 3.57. On note  $Z(X) = I(ZX)$  (resp.  $B(X) = I(BX)$ ,  $H(X) = I(HX)$ ) le complexe à différentielle nulle de  $\mathcal{C}$  associé à  $ZX$  (resp.  $BX$ ,  $HX$ ).

**Exemple 3.75 — Homologie en degré 0 du complexe Hom.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie additive et  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$ . On a alors

$$Z^0 \text{Hom}^\bullet(X, Y) = \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}(X, Y).$$

En effet, par définition de la différentielle en degré 0 du complexe Hom, on a

$$Z^0 \text{Hom}^{\bullet}(X, Y) = \left\{ (f_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \prod_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, Y^n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad d_Y^n f^n = f^{n+1} d_X^n \right\}.$$

Par ailleurs, on dit que les éléments de  $B^0 \text{Hom}^{\bullet}(X, Y)$  sont les *homotopies de X dans Y* c'est-à-dire les éléments de la forme

$$\left\{ (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \prod_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, Y^n), \quad \exists (s^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \prod_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, Y^{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f^n = d_Y^{n-1} s^n + s^{n+1} d_X^n \right\}.$$

On note souvent  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  l'ensemble des homotopies de X dans Y (plutôt que  $B^0 \text{Hom}^{\bullet}(X, Y)$ ). Comme  $B^0 \text{Hom}^{\bullet}(X, Y) \subset Z^0 \text{Hom}^{\bullet}(X, Y)$ , une homotopie est en particulier un morphisme de complexes. On retrouve ce résultat par le calcul : on a  $d_Y^n f^n = d_Y^n s^{n+1} d_X^n = f^{n+1} d_X^n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

Par ailleurs, si  $f : X' \rightarrow X$  et  $g : Y \rightarrow Y'$  sont deux morphismes de complexes, la définition du foncteur  $Z^0$  donne  $Z^0 \text{Hom}^{\bullet}(f, g) = \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}(f, g)$ .

L'étude du R-module  $H^0 \text{Hom}^{\bullet}(X, Y)$  sera faite à la sous-section 3.4.5.

De façon un peu plus générale, fixons  $m \in \mathbb{Z}$ , on a

$$Z^m \text{Hom}^{\bullet}(X, Y) = \left\{ (f_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \prod_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, Y^{n+m}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (-1)^m d_Y^{n+m} f^n = f^{n+1} d_X^n \right\}.$$

Comme  $(-1)^m d_Y^{n+m} = d_{Y[m]}$ , on obtient que  $Z^m \text{Hom}^{\bullet}(X, Y) = \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}(X, Y[m])$ . Par ailleurs, si  $f : X' \rightarrow X$  et  $g : Y \rightarrow Y'$  sont deux morphismes de complexes alors  $Z^m \text{Hom}^{\bullet}(f, g) = \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}(f, g[m])$ . Enfin, grâce à l'isomorphisme  $\delta_{X, Y}$  de la proposition 3.66,  $B^m \text{Hom}^{\bullet}(X, Y) = B^0 \text{Hom}^{\bullet}(X, Y[m])$  est l'ensemble des homotopies de X dans Y[m]. ■

## ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

Grâce à la notion de cohomologie, on peut définir de nouveaux types de morphismes ou de complexes : les quasi-isomorphismes et les complexes exacts. On présente aussi le résultat fondateur de l'algèbre homologique : la suite exacte longue de cohomologie. Enfin, on finit cette sous-section par le corollaire 3.80 qui relie les différentes notions présentées ici.

**Définition 3.76 – Quasi-isomorphisme.** On suppose que  $\mathcal{C}$  est une catégorie abélienne. Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de complexes. On dit que  $f$  est un *quasi-isomorphisme* si  $H^n(f)$  est un isomorphisme pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  c'est-à-dire si  $H(f)$  est un isomorphisme.

On dit que  $(X, d_X)$  est *quasi-isomorphe* à  $(Y, d_Y)$  s'il existe un quasi-isomorphisme de  $(X, d_X)$  dans  $(Y, d_Y)$ .

**Définition 3.77 – Complexe exact.** On suppose que  $\mathcal{C}$  est une catégorie abélienne. Soit  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  un complexe de  $\mathcal{C}$ . On dit que  $(X, d_X)$  est *exact* si  $HX = 0$  (c'est-à-dire si X est quasi-isomorphe à 0).

**Proposition 3.78 – Un tout petit peu d'algèbre homologique.** Soit  $\mathcal{C}$  est une catégorie abélienne. Il existe un foncteur R-linéaire de la catégorie des suites exactes courtes de  $\text{Com}(\mathcal{C})$  dans la catégorie des flèches de  $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$  donné par :

(i) à la suite exacte courte  $0 \xrightarrow{\quad} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\quad} 0$  de complexes de  $\mathcal{C}$ , on associe un morphisme  $\delta = (\delta^n)_{n \in \mathbb{Z}} : H(Z) \rightarrow H(X[1])$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la suite

$$H^n(X) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(Y) \xrightarrow{H^n(g)} H^n(Z) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(X) \xrightarrow{H^{n+1}(f)} H^{n+1}(Y)$$

soit exacte.

(ii) au morphisme  $(u_X, u_Y, u_Z)$  entre les suites exactes courtes

$$0 \xrightarrow{\quad} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\quad} 0 \quad \text{et} \quad 0 \xrightarrow{\quad} X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{\quad} 0,$$

on associe, le morphisme  $(H(u_Z), H(u_X[1]))$  de la catégorie des flèches de  $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$ .

**Preuve.** Voir les théorèmes 12.2.4 et 12.3.3 de [K-S]. ■

**Proposition 3.79 – Suite exacte d'un cône.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie abélienne,  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de complexes. On note  $i : Y \rightarrow C(f)$  et  $\pi : C(f) \rightarrow X[1]$  les morphismes canoniques (voir la définition 3.61). La suite

$$0 \xrightarrow{\quad} Y \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{\pi} X[1] \xrightarrow{\quad} 0 \tag{*}$$

est exacte. De plus, le morphisme  $\delta$  de la proposition 3.78 associé à la suite exacte  $(*)$  est  $H(f[1])$ .

**Preuve.** D'après ce qu'on a vu dans la démonstration de la proposition 3.71, il suffit de regarder ce qui se passe en degré  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Or en degré  $n$ , la suite

$$0 \longrightarrow Y^n \xrightarrow{i^n} Y^n \oplus X[1]^n \xrightarrow{\pi^{n+1}} X[1]^n \longrightarrow 0$$

est évidemment exacte. La deuxième partie de la proposition résulte des constructions de  $\delta$  et  $H(f[1])$ . ■

**Corollaire 3.80 — Cône et quasi-isomorphisme.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie abélienne,  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de complexes. Alors  $f$  est un quasi-isomorphisme si et seulement si  $C(f)$  est un complexe exact.

**Preuve.** D'après les propositions 3.78 et 3.79, on a la suite exacte

$$H^n(Y) \xrightarrow{H^n(i)} H^n(C(f)) \xrightarrow{H^n(\pi)} H^{n+1}(X) \xrightarrow{H^{n+1}(f)} H^{n+1}(Y) \xrightarrow{H^{n+1}(i)} H^{n+1}(C(f))$$

Si  $C(f)$  est exact alors, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , les objets  $H^n(C(f))$  et  $H^{n+1}(C(f))$  sont nuls. Ainsi  $H^n(\pi)$  et  $H^{n+1}(i)$  sont nuls et donc, par exactitude,  $H^{n+1}(f)$  est un monomorphisme et un épimorphisme c'est-à-dire un isomorphisme.

Si  $f$  est un quasi-isomorphisme alors, par exactitude,  $H^n(\pi)$  et  $H^{n+1}(i)$  sont nuls, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . L'exactitude en  $H^n(C(f))$  assure alors que  $C(f)$  est exact. ■

### 3.4.4 EXTENSION DE FONCTEURS

Dans cette sous-section, on montre comment, à partir d'un foncteur entre deux catégories R-linéaires, on peut construire un foncteur entre les catégories de complexes correspondantes. On étudie ensuite le comportement de cette extension de foncteur vis-à-vis des complexes bornées, des complexes Hom, de l'adjonction et des cônes.

**Proposition 3.81 — Extension de foncteurs.** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux catégories R-linéaires et  $M : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur R-linéaire. Pour  $(X, d_X)$  un complexe de  $\mathcal{C}$ , on définit le complexe  $MX$  par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (MX)^n = M(X^n) \quad \text{et} \quad d_{MX}^n = Md_X^n.$$

Si  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  sont deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : X \rightarrow Y$  un morphisme de complexes, on définit le morphisme de complexes  $Mf : MX \rightarrow MY$  par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (Mf)^n = M(f^n).$$

On définit ainsi un foncteur R-linéaire (qu'on note encore  $M$ ) de catégories à translation

$$M : \begin{cases} \text{Com}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Com}(\mathcal{C}') \\ X \longmapsto MX \\ f \longmapsto Mf. \end{cases}$$

Par ailleurs, si  $N : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  est un foncteur R-linéaire et  $\alpha : M \rightarrow N$  une transformation naturelle. Alors pour  $(X, d_X)$  un complexe de  $\mathcal{C}$ , on définit  $\alpha_X = (\alpha_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$ . C'est un morphisme de complexes de  $MX$  dans  $NX$  et la famille  $(\alpha_X)_{(X, d_X)}$  est une transformation naturelle entre  $M$  et  $N$ .

On note  $\text{Fct}_T(\text{Com}(\mathcal{C}), \text{Com}(\mathcal{C}'))$  l'ensemble des foncteurs R-linéaires de catégories à translation de  $\text{Com}(\mathcal{C})$  dans  $\text{Com}(\mathcal{C}')$  et  $\text{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  l'ensemble des foncteurs R-linéaires de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}'$ . On a ainsi défini un foncteur R-linéaire d'extension

$$\text{Extension} : \begin{cases} \text{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \longrightarrow \text{Fct}_T(\text{Com}(\mathcal{C}), \text{Com}(\mathcal{C}')) \\ M \longmapsto M \\ \alpha \longmapsto (\alpha_X)_{(X, d_X)}. \end{cases}$$

**Preuve.** Montrons que  $MX$  est bien un complexe. Par définition, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $d_{MX}^n : MX^n \rightarrow MX^{n+1}$  et par additivité de  $M$ , on a  $d_{MX}^{n+1}d_{MX}^n = M(d_X^{n+1}d_X^n) = 0$ . Montrons que  $Mf$  est bien un morphisme de complexes. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $d_{MY}^n(Mf)^n = M(d_Y^n f^n) = M(f^{n+1}d_X^n) = (Mf)^{n+1}d_{MX}^n$ . Passons à la fonctorialité. La construction de  $M$  montre clairement que  $\text{Mid}_X = \text{id}_{MX}$  puisqu'en degré  $n$ , on a

$$M(\text{id}_X)^n = M(\text{id}_{X^n}) = M(\text{id}_{X^n}) = \text{id}_{M(X^n)} = \text{id}_{(MX)^n} = (\text{id}_{MX})^n.$$

De même, si  $(Z, d_Z)$  est un complexe de  $\mathcal{C}$  et  $g : Y \rightarrow Z$  un morphisme de complexes alors, pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on a

$$M(gf)^n = M((gf)^n) = M(g^n f^n) = M(g^n)M(f^n) = M(g)^n M(f)^n.$$

La R-linéarité résulte immédiatement de celle au niveau de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .

Enfin, on a évidemment  $M(X[1]) = (MX)[1]$  puisque pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on a

$$(M(X[1]))^n = M(X[1]^n) = MX^{n+1} = (MX)[1]^n \quad \text{et} \quad d_{(MX)[1]}^n = -d_{MX}^{n+1} = -Md_X^{n+1} = Md_{X[1]}^n = d_{M(X[1])}^n.$$

De plus, pour  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : X \rightarrow Y$ , on a  $(M(f[1]))^n = M(f[1]^n) = Mf^{n+1} = (Mf)[1]^n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et  $M$  est bien un foncteur de catégories à translation.

Passons à l'étude des transformations naturelles. Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Par définition, on a  $\alpha_{X^n} : MX^n \rightarrow NX^n$ . Comme  $d_{MX}^n = M(d_X^n)$  et  $d_{NX^n} = N(d_X^n)$ , le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} MX^n & \xrightarrow{\alpha_{X^n}} & NX^n \\ d_{MX}^n \downarrow & & \downarrow d_{NX}^n \\ MX^{n+1} & \xrightarrow{\alpha_{X^{n+1}}} & NX^{n+1} \end{array}$$

et  $\alpha_X$  est bien un morphisme de complexes.

Soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de complexes. Il s'agit de comparer les morphismes de complexes  $\alpha_Y Mf$  et  $Nf \alpha_X$ . Or en degré  $n$ , on a

$$(\alpha_Y Mf)^n = \alpha_{Y^n} M(f^n) = N(f^n) \alpha_{X^n} = (Nf \alpha_X)^n.$$

Ainsi  $\alpha_Y Mf = Nf \alpha_X$  et  $(\alpha_X)_{(X, d_X)}$  est bien une transformation naturelle. De plus, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M(X[1]) & \xrightarrow{\alpha_{X[1]}} & N(X[1]) \\ id \downarrow & & \downarrow id \\ (MX)[1] & \xrightarrow{\alpha_{X[1]}} & (NX)[1] \end{array}$$

puisque, pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $\alpha_{X[1]}^n = \alpha_{X^{n+1}} = (\alpha_X)_{(X, d_X)}^n$ . Ainsi  $(\alpha_X)_{(X, d_X)}$  est bien un morphisme de foncteurs de catégories à translation (voir la définition 10.1.1 de [K-S]).

Il reste à étudier la fonctorialité et la R-linéarité. Soit  $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur R-linéaire et  $\beta : N \rightarrow P$  une transformation naturelle. On a  $(\beta \circ \alpha)_{(X, d_X)} = \beta_{(X, d_X)} \circ \alpha_{(X, d_X)}$  et  $(id_M)_{(X, d_X)} = id_M$  puisqu'en degré  $n$ , on a

$$(\beta \circ \alpha)_{(X, d_X)}^n = (\beta \circ \alpha)_{X^n} = \beta_{X^n} \circ \alpha_{X^n} = \beta_{(X, d_X)}^n \circ \alpha_{(X, d_X)}^n$$

et

$$(id_M)_{(X, d_X)}^n = id_{X^n} = id_{(X, d_X)}^n.$$

Les propriétés de R-linéarité sont évidentes. ■

Lorsque les complexes sont bornées, la construction assure que le nouveau complexe est borné et tout se passe bien comme le montre la remarque qui suit.

**Remarque 3.82 – Complexes bornés et extension de foncteurs.** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux catégories R-linéaires et  $M : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur R-linéaire. Si  $(X, d_X)$  est un complexe de  $\mathcal{C}$  borné (resp. borné à droite, borné à gauche) alors  $MX$  l'est aussi. Ainsi  $M$  induit un foncteur (R-linéaire de catégories à translation) de  $Com(\mathcal{C})^*$  dans  $Com(\mathcal{C}')^*$  pour  $* \in \{+, -, b\}$  et, pour  $* \in \{-, +, b\}$ , on a des foncteurs d'extension

$$\text{Extension: } \begin{cases} Fct(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \longrightarrow Fct_T(Com(\mathcal{C})^*, Com(\mathcal{C}')^*) \\ M \longmapsto M \\ \alpha \longmapsto (\alpha_X)_{(X, d_X)} \end{cases}$$

### EXTENSION DE FONCTEURS ET COMPLEXE HOM

Le foncteur  $M$  permet de définir une transformation naturelle entre complexes Hom. Cette transformation naturelle permettra de transférer l'extension du foncteur  $M$  aux catégories de complexes vers les catégories homotopiques (voir la proposition 3.93).

**Remarque 3.83 – Complex HOM et extension de foncteurs.** Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux catégories R-linéaires et  $M : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur R-linéaire. On considère  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$ . Montrons que le foncteur  $M$  définit un morphisme naturel  $M : \text{Hom}^\bullet(X, Y) \rightarrow \text{Hom}^\bullet(MX, MY)$ .

Pour  $U, V \in \mathcal{C}$ , on note  $M_{U,V} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(MU, MV)$  l'application donnée par le foncteur  $M$ . On définit alors le morphisme  $M$  en degré  $n$  comme

$$M^n = \prod_{k \in \mathbb{Z}} M_{X^k, Y^{n+k}} : \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^{n+k}) \longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(MX^k, MY^{n+k})$$

Il s'agit à présent de vérifier que  $M$  est bien un morphisme de complexes. L'application  $M^n$  est bien R-linéaire. De plus, pour  $(f^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}^\bullet(X, Y)^n$ , on a

$$d_{\text{Hom}^{\bullet}(\text{MX}, \text{MY})}^n M^n((f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = d_{\text{Hom}^{\bullet}(\text{MX}, \text{MY})}^n ((\text{M}f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (d_{\text{MY}}^{n+k} \text{M}f^k + (-1)^{n+1} \text{M}f^{k+1} d_{\text{MX}}^k)_{k \in \mathbb{Z}}.$$

La définition des différentielles de MX et MY donne alors

$$d_{\text{Hom}^{\bullet}(\text{MX}, \text{MY})}^n M^n((f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (\text{M}(d_Y^{n+k} f^k + (-1)^{n+1} f^{k+1} d_X^k))_{k \in \mathbb{Z}} = M^{n+1} d_{\text{Hom}^{\bullet}(\text{X}, \text{Y})}^n ((f^k)_{k \in \mathbb{Z}}).$$

Montrons la naturalité de M. Soient  $(\text{X}', d_{\text{X}'})$ ,  $(\text{Y}', d_{\text{Y}'})$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : \text{X}' \rightarrow \text{X}$  et  $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} : \text{Y}' \rightarrow \text{Y}'$  deux morphismes de complexes. Montrons que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}^{\bullet}(\text{X}, \text{Y}) & \xrightarrow{M} & \text{Hom}^{\bullet}(\text{MX}, \text{MY}) \\ \text{Hom}^{\bullet}(f, g) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}^{\bullet}(\text{M}f, \text{M}g) \\ \text{Hom}^{\bullet}(\text{X}', \text{Y}') & \xrightarrow{M} & \text{Hom}^{\bullet}(\text{MX}', \text{MY}') \end{array}$$

Pour  $(u^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}^{\bullet}(\text{X}, \text{Y})^n$ , on a

$$M^n \text{Hom}^{\bullet}(f, g)^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (\text{M}(g^{n+k} u^k f^k))_{k \in \mathbb{Z}} = (\text{M}g^{n+k} \text{M}u^k \text{M}f^k)_{k \in \mathbb{Z}} = \text{Hom}^{\bullet}(\text{M}f, \text{M}g)^n M^n(u^k)_{k \in \mathbb{Z}}.$$

En considérant  $Z^0 M$ , l'exemple 3.75 montre qu'on retrouve le fait que M transforme un morphisme de complexes en morphisme de complexes (c'est-à-dire qu'on a bien pu définir l'extension du foncteur M). ■

### EXTENSION DE FONCTEURS ET ADJONCTION

Lorsqu'on dispose d'une paire adjointe entre deux catégories R-linéaires, on peut la prolonger entre les catégories de complexes correspondantes. On a même, grâce aux complexes Hom, un petit peu mieux. Ce petit plus permettra transférer l'adjonction jusqu'aux catégories homotopiques (voir la remarque 3.94).

**Remarque 3.84 — Adjonction et extension de foncteurs.** Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux catégories R-linéaires et  $M : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ,  $N : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  deux foncteurs R-linéaires. On suppose que  $(M, N)$  est une paire adjointe. Pour  $U \in \mathcal{C}$  et  $V \in \mathcal{C}'$ , on note  $\varphi_{U,V} : \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(MV, U) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, NU)$  l'isomorphisme donnant l'adjonction. On considère  $(X, d_X)$  un complexe de  $\mathcal{C}$  et  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}'$ . Montrons que la transformation naturelle  $\varphi$  induit un isomorphisme naturel  $\varphi_{X,Y} : \text{Hom}^{\bullet}(\text{MX}, Y) \rightarrow \text{Hom}^{\bullet}(X, NY)$ .

On définit alors le morphisme  $\varphi_{X,Y}$  en degré  $n$  comme

$$\varphi_{X,Y}^n = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_{X^k, Y^{n+k}} : \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{MX}^k, Y^{n+k}) \longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, NY^{n+k}).$$

Montrons à présent que  $\varphi_{X,Y}$  est bien un morphisme de complexes. Pour simplifier les notations, on pose  $d = d_{\text{Hom}^{\bullet}(X, NY)}$ . L'application  $\varphi_{X,Y}^n$  est bien R-linéaire. De plus, pour  $(f^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}^{\bullet}(\text{MX}, Y)^n$ , on a

$$d^n \varphi_{X,Y}^n((f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = d^n((\varphi_{X^k, Y^{n+k}}(f^k))_{k \in \mathbb{Z}}) = (d_{NY}^{n+k} \varphi_{X^k, Y^{n+k}}(f^k) + (-1)^{n+1} \varphi_{X^{k+1}, Y^{n+k+1}}(f^{k+1}) d_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}.$$

$$\text{et } \varphi_{X,Y}^{n+1} d_{\text{Hom}^{\bullet}(\text{MX}, Y)}^n((f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (\varphi_{X^k, Y^{n+k+1}}(d_Y^{n+k} f^k) + (-1)^{n+1} \varphi_{X^{k+1}, Y^{n+k+1}}(f^{k+1} d_X^k))_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Or l'adjonction entre M et N dans  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  donne les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\text{MX}^k, Y^{n+k}) & \xrightarrow{\varphi_{X^k, Y^{n+k}}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, NY^{n+k}) \\ d_Y^{n+k} \circ \downarrow & & \downarrow N d_Y^{n+k} \circ \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\text{MX}^k, Y^{n+k+1}) & \xrightarrow{\varphi_{X^k, Y^{n+k+1}}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, NY^{n+k+1}) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\text{MX}^{k+1}, Y^{n+k+1}) & \xrightarrow{\varphi_{X^{k+1}, Y^{n+k+1}}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{k+1}, NY^{n+k+1}) \\ \circ M d_X^k \downarrow & & \downarrow \circ d_X^k \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\text{MX}^k, Y^{n+k+1}) & \xrightarrow{\varphi_{X^k, Y^{n+k+1}}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, NY^{n+k+1}) \end{array}$$

En appliquant le premier diagramme à  $f^k$  et le deuxième à  $f^{k+1}$ , on obtient que  $\varphi_{X,Y}$  est un morphisme de complexes de R-modules. De plus  $\varphi_{X,Y}$  est évidemment un isomorphisme puisque chacun des  $\varphi_{X,Y}^n$  en est un.

Vérifions à présent la naturalité de la transformation. Soient  $(\text{X}', d_{\text{X}'})$  un complexe de  $\mathcal{C}$ ,  $(\text{Y}', d_{\text{Y}'})$  un complexe de  $\mathcal{C}'$  et  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : \text{X}' \rightarrow \text{X}$  et  $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} : \text{Y}' \rightarrow \text{Y}'$  deux morphismes de complexes. Montrons que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}^\bullet(MX, Y) & \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} & \text{Hom}^\bullet(X, NY) \\
 \text{Hom}^\bullet(Mf, g) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}^\bullet(f, Ng) \\
 \text{Hom}^\bullet(MX', Y') & \xrightarrow{\varphi_{X',Y'}} & \text{Hom}^\bullet(X', NY')
 \end{array} \tag{*}$$

Pour  $(u^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}^\bullet(MX, Y)^n$ , on a

$$\varphi_{X',Y'}^n \text{Hom}^\bullet(Mf, g)^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (\varphi_{X',Y',n+k}(g^{n+k}u^k Mf^k))_{k \in \mathbb{Z}}$$

et

$$\text{Hom}^\bullet(f, Ng)^n \varphi_{X,Y}^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (Ng^{n+k} \varphi_{X^k, Y^{n+k}}(u^k) f^k)_{k \in \mathbb{Z}}.$$

L'égalité entre les deux termes résulte alors de la commutativité du diagramme suivant de R-modules appliquée à  $u^k$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(MX^k, Y^{n+k}) & \xrightarrow{\varphi_{X^k, Y^{n+k}}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X^k, NY^{n+k}) \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Mf^k, g^{n+k}) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(f^k, Ng^{n+k}) \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(MX'^k, Y'^{n+k}) & \xrightarrow{\varphi_{X^k, Y^{n+k+1}}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X'^k, NY'^{n+k})
 \end{array}$$

En appliquant le foncteur  $Z^0$  au diagramme commutatif (\*), on obtient, grâce à l'exemple 3.75, que les foncteurs  $M : \text{Com}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Com}(\mathcal{C}')$  et  $N : \text{Com}(\mathcal{C}') \rightarrow \text{Com}(\mathcal{C})$  sont adjoints ; l'isomorphisme donnant l'adjonction est  $Z^0 \varphi_{X,Y}$ . On note  $\varepsilon$  et  $\eta$  la counité et l'unité de la paire adjointe  $(M, N)$  (au niveau de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  comme au niveau de  $\text{Com}(\mathcal{C})$  et  $\text{Com}(\mathcal{C}')$ ). Les relations précédentes donnent alors immédiatement la counité et l'unité de la paire adjointe  $(M, N) : \varepsilon_Y = (\varepsilon_{Y^n})_{n \in \mathbb{Z}} : MNY \rightarrow Y$  et  $\eta_X = (\eta_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}} : X \rightarrow NMX$ . ■

### EXTENSION DE FONCTEURS ET CÔNE

L'extension d'un foncteur depuis une catégorie R-linéaire vers sa catégorie de complexes se comporte bien vis-à-vis des cônes de morphismes de complexes. Cette propriété assure que l'extension de foncteur jusqu'à la catégorie homotopique donne un foncteur triangulé (voir la proposition 3.93).

**Remarque 3.85 – Cône et extension de foncteurs.** Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux catégories R-linéaires et  $M : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur R-linéaire. On considère  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de complexes.

Montrons que le morphisme  $\text{id} : C(Mf) \rightarrow MC(f)$  induit un isomorphisme de foncteurs de catégories à translation entre  $MC$  et  $CM$ . On commence par remarquer que

$$C(Mf)^n = (MY)^n \oplus (MX[1])^{n+1} = M(Y^n) \oplus M(X^{n+1}) = M(Y^n \oplus X^{n+1}) = (M(C(f)))^n$$

et

$$d_{C(Mf)}^n = \begin{bmatrix} d_{MY}^n & (Mf)^{n+1} \\ d_{MX[1]}^n & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M d_Y^n & M(f^{n+1}) \\ M d_{X[1]}^n & \end{bmatrix} = d_{M(C(f))}^n.$$

Par ailleurs, si  $(X', d_{X'})$  et  $(Y', d_{Y'})$  sont deux complexes et  $f' : X' \rightarrow Y'$ ,  $g_X : X \rightarrow X'$ ,  $g_Y : Y \rightarrow Y'$  trois morphismes de complexes de  $\mathcal{C}$  tel que  $g_Y f = f' g_X$ , on a  $C(Mg_X, Mg_Y) = M(C(g_X, g_Y))$  puisqu'en degré  $n$ , on a

$$C(Mg_X, Mg_Y)^n = Mg_Y^n \oplus Mg_X^{n+1} = M(g_Y^n \oplus g_X^{n+1}) = M(C(g_X, g_Y))^n.$$

Ainsi, on obtient bien une transformation naturelle. Il reste à montrer la propriété relative à la translation. Elle résulte du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 CM(f[1]) & \xrightarrow{\text{id}} & MC(f[1]) \\
 \delta_{Mf} \downarrow & & \downarrow M\delta_f \\
 (CMf)[1] & \xrightarrow{\text{id}} & (MCf)[1]
 \end{array}$$

où  $\delta$  est défini dans la remarque 3.62. Ce diagramme est commutatif puisque, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\delta_{Mf}^n = \text{id}_{MY^{n+1}} \oplus -\text{id}_{MX^{n+2}} = M(\text{id}_{Y^{n+1}} \oplus -\text{id}_{X^{n+2}}) = (M\delta_f)^n.$$

On obtient ainsi le résultat souhaité.

Par ailleurs, on note  $i_f : Y \rightarrow C(f)$ ,  $i_{Mf} : MY \rightarrow C(Mf)$ ,  $\pi_f : C(f) \rightarrow X[1]$  et  $\pi_{Mf} : C(Mf) \rightarrow MX[1]$  les morphismes canoniques (voir la définition 3.61). Les définitions de  $i_{Mf}$  et  $\pi_{Mf}$  donnent alors  $i_{Mf} = Mi_f$  et  $\pi_{Mf} = M\pi_f$ . ■

### 3.4.5 LA CATÉGORIE HOMOTOPIQUE

Dans cette section, on définit la catégorie homotopique à partir de la cohomologie (en degré 0) des complexes Hom. Cette définition permet, grâce aux propriétés de la cohomologie, de faire descendre rapidement (on applique juste le foncteur  $H^0$ ) au niveau de la catégorie homotopique les constructions effectuées au niveau de la catégorie des complexes (voir la proposition 3.93 et la remarque 3.94).

#### LA CATÉGORIE HOMOTOPIQUE : UNE CATÉGORIE TRIANGULÉE

On commence par définir la catégorie homotopique. Un nouveau type de complexes et un nouveau type de morphismes de complexes apparaissent alors : les complexes contractiles et les équivalences d'homotopie. On définit ensuite, grâce à la notion de cône, les triangles standards puis la structure triangulée sur la catégorie homotopique. On finit par le corollaire 3.91 et la proposition 3.92 qui serviront dans la chapitre 4.

**Définition 3.86 — Catégorie homotopique.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie R-linéaire. On définit la catégorie  $\text{Com}(\mathcal{C})^{\text{ht}}$  de la façon suivante. Les objets de  $\text{Com}(\mathcal{C})^{\text{ht}}$  sont les complexes de  $\mathcal{C}$  ; pour  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$ , on pose

$$\text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})^{\text{ht}}}(X, Y) = H^0(\text{Hom}^{\bullet}(X, Y)).$$

La catégorie  $\text{Com}(\mathcal{C})^{\text{ht}}$  (notée  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$  pour simplifier) est une catégorie R-linéaire à translation. Le foncteur de passage au quotient de  $\text{Com}(\mathcal{C})$  dans  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$  est un foncteur R-linéaire de catégories à translation.

**Preuve.** Soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$ ,  $(X', d_{X'})$  et  $(Y', d_{Y'})$  quatre complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f : X' \rightarrow X$ ,  $g : Y \rightarrow Y'$  deux morphismes de complexes. On considère le morphisme de complexes  $\text{Hom}^{\bullet}(f, g) : \text{Hom}^{\bullet}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}^{\bullet}(X', Y')$  (voir la définition 3.63). D'après l'exemple 3.75 et les définitions de Z et B, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} B^0 \text{Hom}^{\bullet}(X, Y) & \xhookrightarrow{\quad} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}(f, g) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}(f, g) \\ B^0 \text{Hom}^{\bullet}(X', Y') & \xhookrightarrow{\quad} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y') \end{array}$$

ce qui montre que si  $u$  est une homotopie de  $X$  dans  $Y$  alors  $guf$  est une homotopie de  $X'$  dans  $Y'$ . Ainsi, on peut bien définir, par passage au quotient, une loi de composition R-bilinéaire

$$\circ : \begin{cases} \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})^{\text{ht}}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})^{\text{ht}}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})^{\text{ht}}}(X, Z) \\ (g, f) \mapsto gf. \end{cases}$$

On obtient ainsi sur  $\text{Com}(\mathcal{C})^{\text{ht}}$  une structure de catégorie et un foncteur R-linéaire de passage au quotient de  $\text{Com}(\mathcal{C})$  dans  $\text{Com}(\mathcal{C})^{\text{ht}}$  donné par

$$\begin{cases} X \longrightarrow X \\ f \longrightarrow \pi(f) \end{cases}$$

où  $\pi : \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{C})^{\text{ht}}}(X, Y)$  désigne la surjection canonique. On en déduit ainsi que l'image d'un objet nul de  $\text{Com}(\mathcal{C})$  est un objet nul de  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$ . De même, la somme directe de deux objets de  $\text{Com}(\mathcal{C})$  est aussi la somme directe de ces deux objets dans  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$ . Ainsi  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$  est une catégorie R-linéaire.

Il s'agit à présent de définir le foncteur de translation T sur  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$ . Pour un objet X, on pose  $\text{TX} = X[1]$  et pour un morphisme de complexes  $f : X \rightarrow Y$ , on pose  $\text{T}(\pi(f)) = H^0(\alpha)(\pi(f)) = \pi(f[1])$  (voir la proposition 3.66 pour la définition de  $\alpha$ ). Comme  $\alpha^0(gf) = \alpha^0(g)\alpha^0(f)$  et  $\alpha^0(\text{id}_X) = \text{id}_{X[1]}$ , on en déduit que T est bien un foncteur (qui est, de plus, R-linéaire). On définit aussi le foncteur de translation inverse  $\text{T}^{-1}$  sur  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$ . On note pour cela  $\beta$  l'inverse de la transformation naturelle  $\alpha$  de la proposition 3.66. Pour un objet X, on pose  $\text{T}^{-1}X = X[-1]$  et pour un morphisme de complexes  $f : X \rightarrow Y$ , on pose  $\text{T}^{-1}(\pi(f)) = H^0(\beta)(\pi(f)) = \pi(f[-1])$  (puisque  $X = X[-1][1]$  et  $Y = Y[-1][1]$ ). Comme  $\beta^0(gf) = \beta^0(g)\beta^0(f)$  et  $\beta^0(\text{id}_X) = \text{id}_{X[-1]}$ , on en déduit que  $\text{T}^{-1}$  est bien un foncteur (qui est bien sûr R-linéaire). Enfin, on a évidemment  $\text{TT}^{-1} = \text{id}_{\mathcal{C}^{\text{ht}}}$  et  $\text{T}^{-1}\text{T} = \text{id}_{\mathcal{C}^{\text{ht}}}$ . Ainsi T et  $\text{T}^{-1}$  sont bien des équivalences de catégories R-linéaires. De plus, la définition de T (c'est-à-dire la relation  $\text{T}\pi(f) = \pi(f[1])$ ) montre que le foncteur de passage au quotient est bien un foncteur de catégories à translation. ■

**Définition 3.87 — Équivalence d'homotopie.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie R-linéaire et  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$ . On dit qu'un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  est une *équivalence d'homotopie* si  $f$  est un isomorphisme dans  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$ .

**Définition 3.88 — Complexe contractile.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie R-linéaire et  $(X, d_X)$  un complexe de  $\mathcal{C}$ . On dit que X est un *complexe contractile* si X est un objet nul de  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$ .

**Définition 3.89 – Triangle standard.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie R-linéaire. On considère  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de complexes. On appelle *triangle standard de base f* le triangle de  $\text{Com}(\mathcal{C})$  donné par

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{\pi} X[1]$$

où  $i$  et  $\pi$  sont donnés dans la définition 3.61.

On appelle *triangle standard de base f dans  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$*  l'image dans  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$  du triangle précédent.

**Proposition 3.90 – Catégorie triangulée.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie R-linéaire. On note  $\mathcal{T}$  l'ensemble des triangles de  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$  isomorphe à un des triangles standards. Le triplet  $(\mathcal{C}^{\text{ht}}, T, \mathcal{T})$  est une catégorie R-triangulée.

**Preuve.** Voir [K-S, Théorème 11.2.6]. ■

**Corollaire 3.91 – Équivalence d'homotopie et complexe contractile.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie R-linéaire et  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f : X \rightarrow Y$ . Alors  $f$  est une équivalence d'homotopie si et seulement si  $C(f)$  le cône de  $f$  est contractile.

**Preuve.** Il s'agit du corollaire 3.47 appliqué au triangle  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{\pi} X[1]$ . ■

**Proposition 3.92 – Homotopie et complexe contractile.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de complexes. Alors  $f$  est une homotopie si et seulement si  $f$  se factorise par un complexe contractile.

**Preuve.** On suppose que  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une homotopie. Par hypothèse, il existe  $s^k : X^{k+1} \rightarrow Y^k$  tels que  $f^k = s^k d_X^k + d_Y^{k-1} s^{k-1}$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . On considère alors le complexe  $X'$  défini par  $X'^n = X^n$  et  $d_{X'}^n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  puis le complexe  $C(\text{id}_{X'})$ . Comme  $\text{id}_{X'}$  est un isomorphisme, le corollaire 3.91 assure que  $C(\text{id}_{X'})$  est contractile. Montrons que  $f$  se factorise par  $C(\text{id}_{X'})$ . On définit pour cela  $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} : X \rightarrow C(\text{id}_{X'})$  et  $h = (h^n)_{n \in \mathbb{Z}} : C(\text{id}_{X'}) \rightarrow Y$  en posant

$$g^n = \begin{bmatrix} \text{id}_{X^n} \\ d_X^n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad h^n = \begin{bmatrix} d_Y^{n-1} s^{n-1} & s^n \end{bmatrix}$$

Vérifions que  $g$  et  $h$  sont bien des morphismes de complexes. On calcule pour cela

$$d_{C(\text{id}_{X'})}^n g^n - g^{n+1} d_X^n = \begin{bmatrix} 0 & \text{id}_{X^{n+1}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{id}_{X^n} \\ d_X^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{id}_{X^{n+1}} \\ d_X^{n+1} \end{bmatrix} d_X^n = 0$$

$$\text{et} \quad h^{n+1} d_{C(\text{id}_{X'})}^n - d_Y^n h^n = \begin{bmatrix} d_Y^n s^n & s^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \text{id}_{X^{n+1}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - d_Y^n \begin{bmatrix} d_Y^{n-1} s^{n-1} & s^n \end{bmatrix} = 0.$$

On calcule ensuite  $hg$ . En degré  $n$ , on obtient  $(hg)^n = s^n d_X^n + d_Y^{n-1} s^{n-1} = f^n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

Réciproquement, si  $f$  se factorise par un complexe contractile alors  $f = gh$  où la source de  $g$  est contractile. Comme les complexes contractile sont les objets nuls de la catégorie homotopique, on en déduit que  $f = 0$  dans la catégorie homotopique. Ainsi  $f \in B^0 \text{Hom}(X, Y)$  c'est-à-dire que  $f$  est une homotopie. ■

## PROLONGEMENT DE FONCTEURS ET CATÉGORIE HOMOTOPIQUE

Ici, on prolonge l'extension aux catégories de complexes d'un foncteur entre deux catégories R-linéaires jusqu'aux catégories homotopiques. Il ne reste plus qu'à assembler les ingrédients qui ont été présentés dans cette section (notamment la proposition 3.81 et la remarque 3.85). Dans la remarque 3.94, on montre que cette extension de foncteurs aux catégories homotopiques conserve l'adjonction ce qui servira pour les contre-exemples de la section 4.1.

**Proposition 3.93 – Extension de foncteurs.** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux catégories R-linéaires et  $M : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur R-linéaire. Le foncteur  $M : \text{Com}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Com}(\mathcal{C}')$  qui prolonge  $M$  (voir la proposition 3.81) passe au quotient et définit un foncteur R-triangulé (qu'on note encore  $M$ )

$$M : \begin{cases} \mathcal{C}^{\text{ht}} \longrightarrow \mathcal{C}'^{\text{ht}} \\ X \longmapsto MX \\ \pi(f) \longmapsto \pi(Mf). \end{cases}$$

où  $\pi$  désigne la surjection canonique de la catégorie des complexes dans la catégorie homotopique.

Par ailleurs, si  $N : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  est un foncteur R-linéaire et  $\alpha : M \rightarrow N$  une transformation naturelle. On note encore  $\alpha$  la transformation naturelle prolongeant  $\alpha$  au niveau des complexes. En considérant l'image de  $\alpha$  dans la catégorie homotopique, on obtient une transformation naturelle entre  $M$  et  $N$ .

On note  $\text{Fct}^T(\mathcal{C}^{\text{ht}}, \mathcal{C}'^{\text{ht}})$  l'ensemble des foncteurs R-triangulés de  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$  dans  $\mathcal{C}'^{\text{ht}}$  et  $\text{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  l'ensemble des foncteurs R-linéaires de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}'$ . On a ainsi défini un foncteur R-linéaire d'extension

$$\text{Extension: } \begin{cases} \text{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \longrightarrow \text{Fct}^T(\mathcal{C}^{\text{ht}}, \mathcal{C}'^{\text{ht}}) \\ M \longmapsto M \\ \alpha \longmapsto \alpha. \end{cases}$$

**Preuve.** En appliquant le foncteur  $B^0$  au morphisme de complexes  $M : \text{Hom}^*(X, Y) \rightarrow \text{Hom}^*(MX, MY)$  de la remarque 3.83, on obtient, grâce à l'exemple 3.75, que  $M$  passe bien au quotient et définit un foncteur R-linéaire de  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$  dans  $\mathcal{C}'^{\text{ht}}$ .

Montrons que  $M$  est bien un foncteur triangulé. On note  $T$  (resp.  $T'$ ) le foncteur de translation de  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$  (resp.  $\mathcal{C}'^{\text{ht}}$ ). On a  $MTX = M(X[1]) = (MX)[1] = T'MX$  (voir la proposition 3.81). De plus, pour  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : X \rightarrow Y$ , on a, par définition du foncteur de translation sur  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$  et  $\mathcal{C}'^{\text{ht}}$ ,

$$M(T(\pi(f))) = M(\pi(f[1])) = \pi(M(f[1])) = \pi((Mf)[1]) = T'\pi(Mf).$$

Ainsi  $M$  est bien un foncteur de catégories à translation.

Si  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{\pi} TX$  est un triangle standard de base  $f$  dans  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$  alors, d'après la remarque 3.85,  $MX \xrightarrow{Mf} MY \xrightarrow{Mi} MC(f) \xrightarrow{M\pi} T'MX$  est un triangle standard de base  $Mf$  dans  $\mathcal{C}'^{\text{ht}}$ .

Par ailleurs, si  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  est un triangle distingué dans  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$  alors il existe un triangle standard  $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{i'} C(f') \xrightarrow{\pi'} TX'$  et un isomorphisme de triangles donnant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow Tu \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{i'} & C(f') & \xrightarrow{\pi'} & TX' \end{array}$$

En appliquant le foncteur  $M$ , on obtient que  $MX \xrightarrow{Mf} MY \xrightarrow{Mg} MZ \xrightarrow{Mh} T'MX$  est isomorphe au triangle  $MX' \xrightarrow{Mf'} MY' \xrightarrow{Mi'} MC(f') \xrightarrow{M\pi'} T'MX'$  qui est distingué d'après ce qui précède. On en déduit que  $M$  est bien un foncteur R-triangulé.

Passons à l'étude des transformations naturelles. Soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de complexes. Comme  $\alpha_Y Mf = Nf \alpha_X$  (voir la proposition 3.81), en passant au quotient, on obtient

$$\pi(\alpha_Y)M(\pi(f)) = \pi(\alpha_Y)\pi(Mf) = \pi(\alpha_Y Mf) = \pi(Nf \alpha_X) = \pi(Nf)\pi(\alpha_X) = N(\pi(f))\pi(\alpha_X).$$

Ainsi  $\alpha$  est bien une transformation naturelle. De plus, comme  $\alpha_{TX} = \pi(\alpha_{X[1]}) = T'\alpha_X$ , on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M(TX) & \xrightarrow{\alpha_{TX}} & N(TX) \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ T'(MX) & \xrightarrow{T'\alpha_X} & T'(NX) \end{array}$$

puisque, c'est l'image d'un diagramme commutatif dans  $\text{Com}(\mathcal{C}')$ .

Il reste les propriétés de fonctorialité et la R-linéarité. Soit  $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur R-linéaire et  $\beta : N \rightarrow P$  une transformation naturelle. Comme les relations  $(\beta)_{(X, d_X)} \circ (\alpha)_{(X, d_X)} = (\beta \circ \alpha)_{(X, d_X)}$  et  $(\text{id}_M)_{(X, d_X)} = \text{id}_M$  sont vraies dans la catégorie des complexes, elles donnent le résultat souhaité en prenant leur image par  $\pi$ . Les propriétés de R-linéarité sont évidentes. ■

**Remarque 3.94 — Adjonction et extension de foncteurs.** Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux catégories R-linéaires et  $M : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ,  $N : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  deux foncteurs R-linéaires. On suppose que  $(M, N)$  est une paire adjointe.

L'adjonction entre les foncteurs  $M : \text{Com}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Com}(\mathcal{C}')$  et  $N : \text{Com}(\mathcal{C}') \rightarrow \text{Com}(\mathcal{C})$  passe au quotient et définit une adjonction entre les foncteurs  $M : \mathcal{C}^{\text{ht}} \rightarrow \mathcal{C}'^{\text{ht}}$  et  $N : \mathcal{C}'^{\text{ht}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{ht}}$ .

En appliquant le foncteur  $B^0$  au morphisme de complexes  $\varphi_{X, Y} : \text{Hom}^*(MX, Y) \rightarrow \text{Hom}^*(X, NY)$  de la remarque 3.84, on obtient, grâce à l'exemple 3.75, que l'adjonction  $Z^0 \varphi_{X, Y}$  passe bien au quotient et définit un isomorphisme entre  $\text{Hom}_{\mathcal{C}'^{\text{ht}}}(MX, Y)$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{ht}}}(X, NY)$ .

Vérifions à présent la naturalité de la transformation. Soient  $(X', d_{X'})$  un complexe de  $\mathcal{C}$ ,  $(Y', d_{Y'})$  un complexes de  $\mathcal{C}'$  et  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : X' \rightarrow X$  et  $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} : Y \rightarrow Y'$  deux morphismes de complexes. En appliquant le foncteur  $H^0$  au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}^{\square}(MX, Y) & \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} & \text{Hom}^{\square}(X, NY) \\ \text{Hom}^{\square}(Mf, g) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}^{\square}(f, Ng) \\ \text{Hom}^{\square}(MX', Y') & \xrightarrow{\varphi_{X',Y'}} & \text{Hom}^{\square}(X', NY') \end{array}$$

qui provient la remarque 3.84, on obtient la naturalité souhaitée (car  $H^0 \text{Hom}^{\square}(Mf, g) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{ht}}}(M\pi(f), \pi(g))$  et  $H^0 \text{Hom}^{\square}(f, Ng) = \text{Hom}_{\mathcal{C}'^{\text{ht}}}(N\pi(f), \pi(g))$ ).

L'isomorphisme donnant l'adjonction étant  $H^0 \varphi_{X,Y}$ , la counité et l'unité de la paire adjointe  $(M, N)$  (au niveau des catégories homotopiques) sont respectivement l'image par  $\pi$  de la counité et de l'unité de la paire adjointe  $(M, N)$  (au niveau des complexes). ■

### 3.4.6 COMPLEXES SCINDÉS

L'objectif de cette sous-section est de présenter un nouveau type de complexes : les complexes scindés. Pour cela, on commence par quelques rappels sur les facteurs directs dans les catégories abéliennes. On montre en particulier que les catégories abéliennes vérifie l'hypothèse 3.22.

#### FACTEUR DIRECT ET CATÉGORIE ABÉLIENNE

**Définition 3.95 – Facteur direct.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie R-linéaire et  $X, Y$  deux objets de  $\mathcal{C}$ . On dit que  $Y$  est *facteur direct de  $X$*  s'il existe un objet  $Z$  de  $\mathcal{C}$  et quatre morphismes  $i : Y \rightarrow X$ ,  $p : X \rightarrow Y$ ,  $j : Z \rightarrow X$  et  $q : X \rightarrow Z$  tel que  $(i, p, j, q)$  fasse de  $X$  la somme directe de  $Y$  et  $Z$  c'est-à-dire

$$ip + jq = \text{id}_X, \quad pi = \text{id}_Y, \quad qj = \text{id}_Z, \quad qi = 0 \quad \text{et} \quad pj = 0.$$

Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie R-linéaire et  $X, Y$  deux objets de  $\mathcal{C}$  et  $i : Y \rightarrow X$  un morphisme. On dit que  $(Y, i)$  est *facteur direct de  $X$*  s'il existe un objet  $Z$  de  $\mathcal{C}$  et trois morphismes  $p : X \rightarrow Y$ ,  $j : Z \rightarrow X$  et  $q : X \rightarrow Z$  tel que  $(i, p, j, q)$  fasse de  $X$  la somme directe de  $Y$  et  $Z$  c'est-à-dire

$$ip + jq = \text{id}_X, \quad pi = \text{id}_Y, \quad qj = \text{id}_Z, \quad qi = 0 \quad \text{et} \quad pj = 0.$$

**Lemme 3.96 – Projecteur dans une catégorie abélienne.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie R-abélienne,  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $p \in \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$  un projecteur. On a alors  $X = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ .

**Preuve.** On note  $i : \text{Ker } p \rightarrow X$  et  $j : \text{Im } p \rightarrow X$  les monomorphismes canoniques et  $p' : X \rightarrow \text{Im } p$  le morphisme vérifiant  $jp' = p$ . Par ailleurs, on a  $p(\text{id}_X - p) = 0$  donc il existe  $q : X \rightarrow \text{Ker } p$  tel que  $\text{id}_X - p = iq$ . Montrons que la famille  $(i, q, j, p')$  fait de  $X$  la somme directe de  $\text{Ker } p$  et  $\text{Im } p$ . Par construction, on a  $jp' + iq = \text{id}_X$ . On a aussi  $jp'i = pi = 0$  et donc  $p'i = 0$  puisque  $j$  est un monomorphisme. De même,  $iqjp' = (\text{id}_X - p)p = 0$  donc  $qj = 0$  puisque  $p'$  est un épimorphisme et  $i$  un monomorphisme. De plus, on a  $jp'jp' = p^2 = p = jp' = j\text{id}_{\text{Im } p}p'$  dont on déduit que  $\text{id}_{\text{Im } p} = p'j$  car  $j$  est un monomorphisme et  $p'$  un épimorphisme. Enfin, on a

$$iqiq = (\text{id}_X - p)^2 = \text{id}_X - p = iq = i\text{id}_{\text{Ker } p}q$$

dont on déduit que  $\text{id}_{\text{Ker } p} = qj$  puisque  $i$  est un monomorphisme et  $q$  un épimorphisme. ■

**Lemme 3.97 – Section et rétraction dans une catégorie abélienne.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie R-abélienne,  $X, Y$  deux objets de  $\mathcal{C}$  et  $p : X \rightarrow Y$  et  $i : Y \rightarrow X$  tels que  $pi = \text{id}_Y$ . Alors, il existe un objet  $Z$  de  $\mathcal{C}$ ,  $j : Z \rightarrow X$  et  $q : X \rightarrow Z$  tel que  $(i, p, j, q)$  fasse de  $X$  la somme directe de  $Y$  et  $Z$ .

**Preuve.** On pose  $(Z, j) = \text{Ker } p$ . Par ailleurs, on a  $p(\text{id}_X - ip) = p - pip = 0$ . Donc  $\text{id}_X - ip$  se factorise par  $\text{Ker } p$  c'est-à-dire qu'il existe  $q : X \rightarrow Z$  tel que  $\text{id}_X - ip = jq$ . Montrons que  $(i, p, j, q)$  fait de  $X$  la somme directe de  $Y$  et  $Z$ . Il reste à montrer que  $pj = 0$ ,  $qi = 0$  et  $qj = \text{id}_Z$ . La première égalité résulte de la définition  $j$ . Par construction, on a  $jqi = (\text{id}_X - ip)i = i - ipi = 0$ . Comme  $j$  est un monomorphisme (c'est un noyau), on en déduit que  $qi = 0$ . Enfin,  $jqj = (\text{id}_X - ip)j = j - ipj = j = j\text{id}_Z$ . Comme  $j$  est un monomorphisme, on obtient que  $qj = \text{id}_Z$ . ■

**Lemme 3.98 – Facteurs directs.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie R-abélienne et  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ . On suppose que  $(Y, i)$  et  $(Z, j)$  sont des facteurs directs de  $X$  et qu'il existe  $\alpha : Z \rightarrow Y$  tel que  $i\alpha = j$ . Alors  $(Z, \alpha)$  est facteur direct de  $Y$ .

**Preuve.** On considère  $Y'$  un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $p_Y : X \rightarrow Y$ ,  $j_Y : Y' \rightarrow X$  et  $q_Y : X \rightarrow Y'$  qui fassent de  $X$  la somme directe de  $Y$  et  $Y'$ . De même, on considère  $Z'$  un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $p_Z : X \rightarrow Z$ ,  $j_Z : Z' \rightarrow X$  et  $q_Z : X \rightarrow Z'$  qui fassent de  $X$  la somme directe de  $Z$  et  $Z'$ . On pose alors  $p = p_Z j : Y \rightarrow Z$ . On a  $p\alpha = p_Z i\alpha = p_Z j = \text{id}_Z$ . Le lemme 3.97 donne alors le résultat.  $\blacksquare$

### COMPLEXE SCINDÉ

Dans la proposition-définition qui suit, on définit la notion de complexe scindé. Cette notion qui à un sens au niveau de la catégorie homotopique servira pour les contre-exemples de la section 4.1. On termine la section en montrant qu'un quasi-isomorphisme entre complexes scindés est une équivalence d'homotopie.

**Proposition-Définition 3.99 — Complexes scindés.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie R-abélienne et  $(X, d_X)$  un complexe de  $\mathcal{C}$ . Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $i^n : B^n(X) \rightarrow X^n$  et  $j^n : Z^n(X) \rightarrow X^n$  les monomorphismes canoniques. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i)  $X$  est isomorphe dans  $\text{Com}(\mathcal{C})^{\text{ht}}$  à un complexe à différentielle nulle ;
- (ii)  $X$  est isomorphe dans  $\text{Com}(\mathcal{C})^{\text{ht}}$  au complexe  $H(X)$  (voir la définition 3.74) ;
- (iii) Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , il existe  $s^n : X^{n+1} \rightarrow X^n$  tel que  $d_X^n = d_X^n s^n d_X^n$  ;
- (iv) Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $(B^n(X), i^n)$  et  $(Z^n(X), j^n)$  sont facteurs directs de  $X^n$  ;
- (v) Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , il existe des objets  $U^n$ ,  $V^n$  et  $W^n$  de  $\mathcal{C}$  et  $f^n : W^n \rightarrow U^{n+1}$  un isomorphisme tels que  $X^n = U^n \oplus V^n \oplus W^n$  et

$$d_X^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

- (vi) Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , il existe des objets  $U^n$ ,  $V^n$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $X^n = U^n \oplus V^n \oplus U^{n+1}$  tels que

$$d_X^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{id}_{U^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Si  $(X, d_X)$  vérifie ces propriétés, on dit que  $(X, d_X)$  est un *complexe scindé*.

**Preuve.** L'implication  $(i) \Rightarrow (ii)$  est triviale.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ . Il existe des morphismes de complexes  $\alpha = (\alpha^n)_{n \in \mathbb{Z}} : X \rightarrow H(X)$  et  $\beta = (\beta^n)_{n \in \mathbb{Z}} : H(X) \rightarrow X$  tel que  $\text{id}_X - \beta\alpha$  soit une homotopie de  $X$  dans  $X$ . Il existe donc une famille  $(s^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  avec  $s^n : X^{n+1} \rightarrow X^n$  vérifiant

$$\text{id}_X^n - \beta^n \alpha^n = s^n d_X^n + d_X^{n-1} s^{n-1} .$$

En composant à gauche par  $d_X^n$ , on obtient

$$d_X^n - d_X^n \beta^n \alpha^n = d_X^n s^n d_X^n + d_X^n d_X^{n-1} s^{n-1} = d_X^n s^n d_X^n .$$

Or  $\beta$  est un morphisme de complexes donc  $d_X^n \beta^n = \beta^{n+1} d_{H(X)}^n = 0$ . On a donc bien  $d_X^n = d_X^n s^n d_X^n$ .

$(iii) \Rightarrow (iv)$ . Montrons que  $p = s^n d_X^n$  est un projecteur de noyau  $Z^n(X)$ . On a

$$(s^n d_X^n)^2 = s^n d_X^n s^n d_X^n = s^n d_X^n .$$

Ainsi  $s^n d_X^n$  est un projecteur. De plus, on a  $p j^n = 0$ . Réciproquement, si  $s^n d_X^n f = 0$  alors, en composant à gauche par  $d_X^n$ , on obtient que  $d_X^n f$  et donc  $f$  se factorise de façon unique (car  $j^n$  est un monomorphisme) par  $j^n$ . Ainsi  $(Z^n(X), j^n)$  est le noyau de  $p$ . Comme  $p$  est un projecteur, le lemme 3.96 assure que  $(Z^n(X), j^n)$  est facteur direct de  $X^n$ .

Montrons que  $p' = d_X^n s^n$  est un projecteur d'image  $B^{n+1}(X)$ . On a

$$(d_X^n s^n)^2 = d_X^n s^n d_X^n s^n = d_X^n s^n .$$

Ainsi  $d_X^n s^n$  est un projecteur. De plus, si  $q : X^{n+1} \rightarrow \text{Coker } d_X^n$  désigne le morphisme canonique, on a  $q \circ p' = 0$ . Réciproquement, si  $f d_X^n s^n = 0$  alors, en composant à droite par  $d_X^n$ , on obtient que  $f d_X^n = 0$  et donc  $f$  se factorise de façon unique (car  $q$  est un épimorphisme) par  $q$ . Ainsi  $(\text{Coker } d_X^n, q)$  est le conoyau de  $p'$ . Et donc l'image de  $p'$  qui est le noyau de son conoyau est le noyau de  $q$  c'est-à-dire  $B^{n+1}(X)$ . Comme  $p'$  est un projecteur, le lemme 3.96 montre que  $(B^{n+1}(X), i^{n+1})$  est facteur direct de  $X^{n+1}$ .

$(iv) \Rightarrow (v)$ . On note  $W^n$  un supplémentaire et  $Z^n(X)$  dans  $X^n$  et  $(j^n, p^n, j'^n, p'^n)$  les morphismes associés à cette décomposition en somme directe. On note  $T^n$  un supplémentaire et  $B^n(X)$  dans  $X^n$  et  $(i^n, q^n, i'^n, q'^n)$  les morphismes associés à cette décomposition en somme directe. Comme  $i^n$  se factorise par  $j^n$ , le lemme 3.98 assure qu'il existe un objet  $V^n$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $B^n(X) \oplus V^n = Z^n(X)$ . On note alors  $(\alpha^n, r = q^n j^n, \alpha'^n, r'^n)$  les morphismes associés à cette décomposition en somme directe. On obtient alors la décomposition souhaitée en posant  $B^n(X) = U^n$ . Finalement, on a  $X^n = U^n \oplus V^n \oplus W^n$ . Les morphismes associés à cette décomposition en

somme directe sont alors  $(i^n, r^n p^n, j^n \alpha'^n, r'^n p^n, j'^n, p'^n) = (i_1^n, p_1^n, i_2^n, p_2^n, i_3^n, p_3^n)$ . Dans cette décomposition en somme directe, la différentielle est alors donnée par

$$d_X^n = \begin{bmatrix} p_1^{n+1} d_X^n i_1^n & p_1^{n+1} d_X^n i_2^n & p_1^{n+1} d_X^n i_3^n \\ p_2^{n+1} d_X^n i_1^n & p_2^{n+1} d_X^n i_2^n & p_2^{n+1} d_X^n i_3^n \\ p_3^{n+1} d_X^n i_1^n & p_3^{n+1} d_X^n i_2^n & p_3^{n+1} d_X^n i_3^n \end{bmatrix}$$

L'expression de  $i_1^n$  et  $i_2^n$  en fonction de  $j^n = \text{Ker } d_X^n$  assure que les deux premières colonnes de  $d_X^n$  sont nulles. Par ailleurs, le choix de  $U^{n+1} = B^{n+1}(X)$  assure que  $d_X^n$  se factorise par  $U^{n+1}$  et donc  $p_3^{n+1} d_X^n = 0$  et  $p_2^{n+1} d_X^n = 0$ . Il reste à montrer que  $f = p_1^{n+1} d_X^n i_3^n$  est un automorphisme.

Pour cela, on va montrer que  $f$  est un monomorphisme et un épimorphisme. Par construction, on peut écrire  $d_X^n = i_1^{n+1} \tilde{d}$  avec  $\tilde{d}$  qui est un épimorphisme. Considérons  $h$  tel que  $f \circ h = 0$ . On a donc  $\tilde{d} i_3^n h = 0$ . Ainsi  $i_3^n h$  se factorise par  $Z^n(X)$  c'est-à-dire qu'il existe  $h'$  tel que  $i_3^n h = j^n h'$ . On obtient alors  $h = p_3^n i_3^n h = p'^n j^n h' = 0$  ce qui assure que  $f$  est un monomorphisme. Considérons à présent  $h$  tel que  $h \circ f = 0$ . On a donc  $h \tilde{d} i_3^n = 0$ . On en déduit que  $h \tilde{d} i_3^n p_3^n = 0$  c'est-à-dire  $h \tilde{d} = h \tilde{d} i_1^n p_1^n + h \tilde{d} i_2^n p_2^n$ . Or  $\tilde{d} i_1^n = 0$  et  $\tilde{d} i_2^n$  puisque  $d_X^n i_1^n = 0 = i_1^{n+1} \tilde{d} i_1^n$  et  $d_X^n i_2^n = 0 = i_1^{n+1} \tilde{d} i_2^n$  et que  $i_1^{n+1}$  est un monomorphisme. Ainsi  $h \tilde{d} = 0$  et  $h = 0$ . Finalement  $f$  est un épimorphisme.

(v)  $\Rightarrow$  (vi). Cela repose simplement sur le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U^n \oplus V^n \oplus W^n & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & f^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} & U^{n+1} \oplus V^{n+1} \oplus W^{n+1} \\ \downarrow \begin{bmatrix} \text{id}_{U^n} & \text{id}_{V^n} & f^n \end{bmatrix} & & \downarrow \begin{bmatrix} \text{id}_{U^{n+1}} & \text{id}_{V^{n+1}} & f^{n+1} \end{bmatrix} \\ U^n \oplus V^n \oplus U^{n+1} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{id}_{U^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} & U^{n+1} \oplus V^{n+1} \oplus U^{n+2} \end{array}$$

puisque pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , le morphisme  $\text{id}_{U^n} \oplus \text{id}_{V^n} \oplus f^n$  est un isomorphisme.

(vi)  $\Rightarrow$  (i). On pose  $(V, d_V)$  le complexe à différentielle nulle dont la composante de degré  $n$  est  $V^n$ . On note

$$i^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{id}_{V^n} \\ 0 \end{bmatrix} : V^n \rightarrow X^n \text{ et } p^n = [0 \quad \text{id}_{V^n} \quad 0] : X^n \rightarrow V^n$$

les morphismes associés à la décomposition en somme directe. Comme

$$p^{n+1} d_X^n = 0 = d_V^n p^n \quad \text{et} \quad d_X^n i^n = 0 = i^{n+1} d_V^n,$$

les familles  $i = (i^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $p = (p^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  définissent des morphismes de complexes. De plus, on a  $pi = \text{id}_V$ . Pour conclure, il reste à montrer que  $\text{id}_X - ip$  est une homotopie. Pour cela, on définit  $s^n : X^{n+1} \rightarrow X^n$  par

$$s^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{id}_{U^{n+1}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et on calcule

$$s^n d_X^n + d_X^{n-1} s^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{id}_{U^{n+1}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{id}_{U^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{id}_{U^n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{id}_{U^n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{id}_{U^{n+1}} \end{bmatrix}.$$

On obtient bien  $s^n d_X^n + d_X^{n-1} s^{n-1} = \text{id}_X - i^n p^n$ . ■

**Remarque 3.100 – Image et noyau de la différentielle.** Soit  $(X, d_X)$  un complexe scindé. On considère une décomposition de  $X^n = U^n \oplus V^n \oplus W^n$  comme dans le point (v) de la proposition-définition 3.99. On note  $(i_1^n, p_1^n, i_2^n, p_2^n, i_3^n, p_3^n)$  les morphismes associés à cette décomposition en somme directe.

On définit  $j^n : U^n \oplus V^n \rightarrow U^n \oplus V^n \oplus W^n$  par

$$j^n = \begin{bmatrix} \text{id}_{U^n} & & \\ & \text{id}_{V^n} & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrons que  $(U^n, i_1^n) = \text{Im } d_X^{n-1}$  et  $(U^n \oplus V^n, j^n) = \text{Ker } d_X^n$ .

Commençons par le noyau. Le calcul matriciel montre que  $d_X^n j^n = 0$ . De plus,  $j^n$  est un monomorphisme. En effet, si  $h$  vérifie  $j^n h = 0$ , on peut écrire

$$h = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

et alors

$$j^n h = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi  $h = 0$ . Enfin, soit  $h$  vérifiant  $d_X^n h = 0$ . En écrivant

$$h = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

on obtient  $ff_3 = 0$  et donc  $f_3 = 0$  puisque  $f$  est un isomorphisme. Ainsi

$$h = j^n \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

ce qui donne le résultat souhaité.

Passons à l'image. Commençons par montrer que le morphisme  $q^n : X^n \rightarrow V^n \oplus W^n$

$$q^n = \begin{bmatrix} 0 & \text{id}_{V^n} \\ 0 & \text{id}_{W^n} \end{bmatrix}$$

est le conoyau de  $\text{Coker } d_X^{n-1}$ . Le calcul matriciel assure que  $q^n d_X^{n-1} = 0$ . De plus  $q^n$  est un épimorphisme puisque si  $h$  vérifie  $hq^n = 0$ , on peut écrire  $h = [g_1 \ g_2]$  et alors  $hq^n = [0 \ g_1 \ g_2]$ . Ainsi  $h = 0$ . Enfin soit  $h$  vérifiant  $hd_X^{n-1} = 0$ . En écrivant  $h = [g_1 \ g_2 \ g_3]$ , on obtient  $g_1 f = 0$  et donc  $g_1 = 0$  puisque  $f$  est un isomorphisme. Ainsi  $h = [g_2 \ g_3] q^n$  et  $q^n$  est le conoyau de  $d_X^{n-1}$ . Montrons à présent que  $(U^n, i_1^n)$  est le noyau de  $q^n$ . Par définition, on a

$$i_1^n = \begin{bmatrix} \text{id}_{U^n} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

et donc, par le calcul matriciel  $q^n i_1^n = 0$ . De plus,  $i_1^n$  est un monomorphisme. Enfin, soit  $h$  tel que  $q^n h = 0$ . En écrivant

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix},$$

on obtient  $h_2 = 0$  et  $h_3 = 0$  et donc  $h = i_1^n h_1$ . Ainsi  $(U^n, i_1)$  est bien l'image de  $d_X^{n-1}$ . ■

**Proposition 3.101 — Cône, quasi-isomorphisme, complexes scindés.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie R-abélienne,  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux complexes scindés et  $f : X \rightarrow Y$  un quasi-isomorphisme. Le complexe  $C(f)$  (le cône de  $f$ ) est un complexe scindé et même contractile. De plus,  $f$  est une équivalence d'homotopie.

**Preuve.** On applique le point (vi) de la proposition-définition 3.99 à  $X$  et  $Y$  : on obtient une décomposition de  $X^n$  et de  $Y^n$  sous la forme  $X^n = U^n \oplus V^n \oplus U'^{n+1}$  et  $U'^n \oplus V'^n \oplus U'^{n+1}$ . Finalement, on obtient une décomposition de  $C(f)^n$  sous la forme  $C(f)^n = U'^n \oplus V'^n \oplus U'^{n+1} \oplus U^{n+1} \oplus V^{n+1} \oplus U^{n+2}$ .

Par ailleurs,  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes, donc  $f^n$  envoie  $B^n(X) = U^n$  dans  $B^n(Y) = U'^n$  et  $Z^n(X) = U^n \oplus V^n$  dans  $Z^n(Y) = U'^n \oplus V'^n$ . Ainsi  $f^n$  s'écrit

$$f^n = \begin{bmatrix} b_1^n & b_2^n & b_3^n \\ & b_4^n & b_5^n \\ & & b_6^n \end{bmatrix}.$$

De plus,  $b_4^n$  n'est autre que  $H^n(f)$  qui est un isomorphisme par hypothèse. La différentielle de  $C(f)$  s'écrit alors

$$d_{C(f)^n} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \text{id}_{U'^{n+1}} & b_1^{n+1} & b_2^{n+1} & b_3^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & & b_4^{n+1} & b_5^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & & & b_6^{n+1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{id}_{U^{n+2}} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit alors  $s^n : C(f)^{n+1} \rightarrow C(f)^n$  par

$$s^{n-1} = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{id}_{U'^n} & -b_2^n(b_4^n)^{-1}0 & b_3 - b_2^n(b_4^n)^{-1}b_5^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_4^n)^{-1} & 0 & (b_4^n)^{-1}b_5^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{id}_{U^{n+1}} & 0 \end{array} \right].$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que  $d_{C(f)}^n s^n d_{C(f)}^n = d_{C(f)}^n$ . Finalement, le complexe  $C(f)$  est scindé.

On en déduit, grâce à la proposition-définition 3.99, que  $C(f)$  est isomorphe dans  $\mathcal{C}^{\text{ht}}$  à  $H(C(f))$ . Or  $f$  est un quasi-isomorphisme, donc, d'après le corollaire 3.80,  $H^n(C(f)) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Finalement le complexe  $C(f)$  est contractile. Le corollaire 3.91 permet alors de conclure. ■



# CHAPITRE 4

## CATÉGORIE STABLE

L'objet de ce chapitre est l'étude de la situation suivante. On se donne un triplet adjoint  $(M, L, R)$  entre deux catégories  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  (avec  $M : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ) où  $\mathcal{A}$  vérifie l'hypothèse 3.22 ( $\mathcal{A}$  est triangulée dans la section 4.1 et abélienne dans les sections 4.2 et 4.3). Que se passe-t-il lorsqu'on annule les objets M-split de  $\mathcal{A}$  (voir la proposition-définition 3.24 pour la définition d'objet M-split) ?

Dans la section 4.1, on présente une suggestion de construction d'une catégorie M-stable pour une catégorie triangulée. Considérons le cas où  $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$  est la catégorie des A-modules où A est une algèbre symétrique de dimension finie sur un corps  $k$  et  $\mathcal{B} = k\text{-Ev}$ . Si  $M = A \otimes_k \bullet$  est le foncteur d'extension des scalaires alors  $L = R$  est la restriction des scalaires et on a un triplet adjoint  $(M, L, R)$  au niveau des catégories dérivées. La catégorie M-stable triangulée définie dans la section 4.1 est alors la catégorie stable usuelle (voir l'exemple 4.6). On montre enfin que la catégorie des objets M-split n'est pas nécessairement triangulée (voir les contre-exemples 4.12 et 4.13).

La section 4.2 présente un travail qui se place dans le prolongement de celui de Happel [HAP, Chapitre 2] et Linckelmann [LIN] qui définissent la catégorie stable d'une algèbre auto-injective A comme quotient de la catégorie des A-modules par les modules projectifs et montrent que cette catégorie stable est triangulée. Happel utilise l'hypothèse d'auto-injectivité pour identifier modules projectifs et modules injectifs et pouvoir ainsi se « déplacer dans les deux sens ». Dans notre travail, cette « identification » est contenue dans la définition des objets M-split : ce sont les notions de relative injectivité et relative projectivité qui coïncident. De façon un peu plus précise, lorsque  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont abéliennes et vérifient les hypothèses 4.14, alors le quotient de  $\mathcal{A}$  par les morphismes se factorisant par les objets M-split de  $\mathcal{A}$  est triangulé.

L'exemple fondamental qui a guidé notre travail est le suivant : on considère une algèbre symétrique A de dimension finie sur un corps  $k$ . Comme A est auto-injective, la construction de Happel s'applique. De plus, les projectifs ne sont rien d'autre que les facteurs directs des modules induits (qui sont les modules libres). Dans ce cadre, la construction de Happel s'interprète comme le quotient de la catégorie de A-modules par les objets M-split où  $M = A \otimes_k \bullet$  (avec M qui fait partie du triplet adjoint  $(M, \text{Res}, \text{Res})$  puisque A est symétrique).

La section 4.3 présente un travail qui se place dans le prolongement de celui de Rickard [RIC, Théorème 2.1]. En effet, Rickard montre que la catégorie stable s'obtient comme quotient de la catégorie dérivée bornée par les complexes parfaits. Toujours en s'inspirant de notre exemple fondamental, on montre que la catégorie M-stable de la catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  s'obtient comme quotient d'une catégorie M-dérivée bornée par les complexes bornés d'objets M-split (voir la proposition 4.49). Ce quotient de la catégorie M-dérivée s'interprète également comme la catégorie M-stable au sens triangulé de la catégorie M-dérivée pour une extension naturelle des foncteurs  $(M, L, R)$  (voir les exemples 4.6 et 4.7).

Dans l'exemple 4.16, on donne quelques situations concrètes dans lesquelles les hypothèses de travail des sections 4.2 et 4.3 sont vérifiées. Les exemples que nous donnons vérifient tous  $L = R$  même si le cadre abstrait présenté ne l'impose pas. Les hypothèses permettent tout de même de regrouper dans le même cadre la construction de la catégorie stable et de la catégorie relativement stable.

Le travail des sections 4.2 et 4.3 est en un certain sens le dual de celui de [GRI] qui étudie le quotient de la catégorie  $\mathcal{B}$  par les facteurs directs des objets de la forme  $LX$  ou  $RX$  lorsque ces deux classes d'objets coïncident (et que M est fidèle mais que L et R ne sont plus nécessairement ni fidèles ni exacts).

### 4.1 CATÉGORIE M-STABLE D'UNE CATÉGORIE TRIANGULÉE

Dans cette section, l'objectif est de définir la catégorie M-stable d'une catégorie triangulée. La construction proposée dans la section 4.2 (on garde les mêmes objets et on quotientie par les morphismes qui se factorisent par les objets M-split) ne peut aboutir à une catégorie triangulée telle que le foncteur de passage au quotient

soit triangulé puisque les objets M-split ne forment pas une sous-catégorie triangulée (voir la sous-section 4.1.2 et les contre-exemples 4.12 et 4.13). Pour obtenir une catégorie triangulée, on utilise le quotient des catégories triangulées au sens de Verdier (voir [VER] ou [NEE, Théorème 2.1.8]).

### 4.1.1 CATÉGORIE M-STABLE D'UNE CATÉGORIE TRIANGULÉE

Dans cette sous-section, on construit la catégorie M-stable d'une catégorie triangulée par une localisation à la Verdier. Le résultat principal est une version triangulée du lemme de Schanuel (voir la proposition 4.4) qui permet de calculer le décalage de la catégorie stable dans la catégorie initiale (corollaire 4.5).

**Notation 4.1** Dans cette sous-section, on fixe un anneau commutatif unitaire  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  deux catégories  $\mathcal{O}$ -triangulées et  $M : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $L, R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  trois foncteurs  $\mathcal{O}$ -triangulés. On suppose que  $(M, L, R)$  est un triplet adjoint. On note

$$\varepsilon_X^R : MRX \rightarrow X, \quad \eta_Y^R : Y \rightarrow RMY \quad \text{et} \quad \varepsilon_Y^L : LMY \rightarrow Y, \quad \eta_X^L : X \rightarrow MLX$$

les unités et counités associées aux paires adjointes  $(M, R)$  et  $(L, M)$ .

**Définition 4.2 — Catégorie M-stable.** Dans ce cadre, on définit la catégorie M-stable de  $\mathcal{A}$  en posant

$$M\text{-Stab}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\langle M\text{-split} \rangle$$

où  $M\text{-split}$  désigne la sous-catégorie pleine des objets M-split de  $\mathcal{A}$ ,  $\langle M\text{-split} \rangle$  la sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$  engendrée par les objets M-split et  $\mathcal{A}/\langle M\text{-split} \rangle$  le quotient au sens de Verdier.

Par construction, le foncteur de localisation  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\langle M\text{-split} \rangle$  est un foncteur triangulé. On note  $T$  le foncteur de translation de  $\mathcal{A}$  et de  $M\text{-Stab}_{\mathcal{A}}$ .

**Lemme 4.3 — Noyau du foncteur de localisation.** Soient  $X, X'$  deux objets de  $\mathcal{A}$ , le noyau de l'application

$$\pi : \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X') \rightarrow \text{Hom}_{M\text{-Stab}_{\mathcal{A}}}(X, X') \\ f \mapsto \pi(f) \end{cases}$$

est  $\text{Ker } \pi = \{f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X'), \quad f \text{ se factorise par un objet de } \langle M\text{-split} \rangle\}$ .

En particulier  $M(X, X') = \{f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X'), \quad f \text{ se factorise par un objet M-split de } \mathcal{A}\}$  est contenu dans  $\text{Ker } \pi$ .

**Preuve.** Par définition,  $\mathcal{A}/\langle M\text{-split} \rangle$  est la catégorie obtenu en localisant relativement à la partie multiplicative

$$\mathcal{S} = \left\{ f : X \rightarrow X', \quad \text{il existe un triangle distingué } X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{u} X'' \xrightarrow{v} TX \quad \text{avec } X'' \in \langle M\text{-split} \rangle \right\}.$$

Par construction du foncteur de localisation, on a  $f \in \text{Ker } \pi$  si et seulement s'il existe un objet  $X''$  de  $\mathcal{A}$  et quatre morphismes  $g : X \rightarrow X''$ ,  $u : X' \rightarrow X''$ ,  $v : X'' \rightarrow X'$  et  $t : X' \rightarrow X''$  avec  $t \in \mathcal{S}$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & X' & & \\ & f \swarrow & \downarrow u & \searrow id_{X'} & \\ X & \xrightarrow{g} & X'' & \xleftarrow{t} & X' \\ & 0 \searrow & \uparrow v & \swarrow id_{X'} & \\ & & X' & & \end{array}$$

La commutativité du diagramme impose  $g = 0$  et  $u = v = t$  et  $tf = 0$ .

Finalement  $f \in \text{Ker } \pi$  si et seulement s'il existe un objet  $X''$  de  $\mathcal{A}$  et  $t : X' \rightarrow X''$  dans  $\mathcal{S}$  tel que  $tf = 0$ .

Si  $f \in \text{Ker } \pi$ , la définition de  $\mathcal{S}$  assure alors l'existence d'un triangle distingué de  $\mathcal{A}$  de la forme

$$X' \xrightarrow{t} X'' \xrightarrow{u} Z \xrightarrow{v} TX' \quad \text{avec} \quad Z \in \langle M\text{-split} \rangle.$$

Comme  $tf = 0$ , la proposition 3.43 assure que  $f$  se factorise par  $T^{-1}Z \in \langle M\text{-split} \rangle$ .

Réciiproquement, supposons que  $f$  se factorise par  $Z \in \langle M\text{-split} \rangle$  en  $f = vg$ . Par l'axiome (T3), on construit alors le triangle distingué

$$Z \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{t} X'' \xrightarrow{u} TZ$$

Par l'axiome (T4), on en déduit le triangle distingué  $X' \xrightarrow{t} X'' \xrightarrow{u} TZ \xrightarrow{-Tv} TX'$ . La définition de  $\mathcal{S}$  assure alors que  $t$  est dans  $\mathcal{S}$  et on a  $tf = tvg = 0$  (grâce à la proposition 3.43). ■

**Proposition 4.4 – Lemme de Schanuel triangulé.** Soient  $X, X'$  deux objets de  $\mathcal{A}$ ,  $P, P'$  deux objets M-splits de  $\mathcal{A}$  et  $i : X \rightarrow P$ ,  $i' : X' \rightarrow P'$  tels qu'il existe  $\beta, \beta'$  vérifiant  $\beta L(i) = \text{id}_{LX}$  et  $\beta' L(i') = \text{id}_{LX'}$ . On note  $\Omega X$  et  $\Omega X'$  deux objets de  $\mathcal{A}$  et  $u : P \rightarrow \Omega X$ ,  $u' : P' \rightarrow \Omega X'$ ,  $v : \Omega X \rightarrow TX$  et  $v' : \Omega X' \rightarrow TX'$  tels que

$$X \xrightarrow{i} P \xrightarrow{u} \Omega X \xrightarrow{v} TX \quad \text{et} \quad X' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{u'} \Omega X' \xrightarrow{v'} TX'$$

soient des triangles distingués.

Pour  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')$ , il existe  $g : P \rightarrow P'$  et  $\Omega f : \Omega X \rightarrow \Omega X'$  tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{u} & \Omega X & \xrightarrow{v} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow \Omega f & & \downarrow T f \\ X' & \xrightarrow{i'} & P' & \xrightarrow{u'} & \Omega X' & \xrightarrow{v'} & TX' \end{array}$$

De plus, l'image de  $\Omega(f)$  dans  $\text{Hom}_{\text{M-Stab}_{\mathcal{A}}}(X, X')$  ne dépend pas du choix de  $g$  : si  $g'$  et  $h$  font commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{u} & \Omega X & \xrightarrow{v} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow g' & & \downarrow h & & \downarrow T f \\ X' & \xrightarrow{i'} & P' & \xrightarrow{u'} & \Omega X' & \xrightarrow{v'} & TX' \end{array}$$

alors  $h$  et  $\Omega f$  ont la même image dans  $\text{Hom}_{\text{M-Stab}_{\mathcal{A}}}(X, X')$ .

Ainsi en fixant pour tout  $X \in \mathcal{A}$ , un objet M-split  $P_X$  et  $i : X \rightarrow P_X$  tel qu'il existe  $\beta$  vérifiant  $\beta L(i) = \text{id}_{LX}$  et un objet  $\Omega X$  dans  $\mathcal{A}$  tel que le triangle  $X \xrightarrow{i} P_X \xrightarrow{u} \Omega X \xrightarrow{v} TX$  soit distingué, on construit un foncteur  $\mathcal{O}$ -linéaire  $\Omega$

$$\Omega : \begin{cases} \mathcal{A} \longrightarrow \text{M-Stab}_{\mathcal{A}} \\ X \longmapsto \Omega X \\ f \longmapsto \Omega f. \end{cases}$$

**Preuve.** La relative injectivité de  $P'$  et l'existence de  $\beta$  donne l'existence de  $g$ . L'axiome T5 permet alors de définir  $\Omega f$ . Par commutativité, on a  $v'(\Omega f - h) = (Tf - Tf)v = 0$ . La proposition 3.43 assure alors qu'il existe  $\delta : \Omega X \rightarrow P'$  tel que  $(\Omega f - h) = u'\delta$ . Autrement dit  $\Omega f - h$  se factorise par l'objet M-split  $P'$ . Le lemme 4.3 assure alors l'égalité  $\Omega f = h$  dans  $\text{Hom}_{\text{M-Stab}_{\mathcal{A}}}(X, X')$ .

Montrons l'existence d'un couple  $(P_X, i)$  vérifiant les hypothèses de l'énoncé. D'après le corollaire 3.11, on peut prendre  $P_X = \text{MLX}$  et  $i = \eta_X^L$ . On peut donc bien définir  $\Omega X$ .

Véfions la fonctorialité. Elle résulte des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & P_X & \xrightarrow{u} & \Omega X & \xrightarrow{v} & TX \\ \downarrow \text{id}_X & & \downarrow \text{id}_{P_X} & & \downarrow \text{id}_{\Omega X} & & \downarrow \text{id}_{TX} \\ X & \xrightarrow{i} & P_X & \xrightarrow{u} & \Omega X & \xrightarrow{v} & TX \end{array} & \text{et} & \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & P_X & \xrightarrow{u} & \Omega X & \xrightarrow{v} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow \Omega f & & \downarrow T f \\ X' & \xrightarrow{i'} & P_{X'} & \xrightarrow{u'} & \Omega X' & \xrightarrow{v'} & TX' \\ \downarrow f' & & \downarrow g' & & \downarrow \Omega f' & & \downarrow T f' \\ X'' & \xrightarrow{i''} & P_{X''} & \xrightarrow{u''} & \Omega X'' & \xrightarrow{v''} & TX'' \end{array} \end{array}$$

La  $\mathcal{O}$ -linéarité résulte du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{u} & \Omega X & \xrightarrow{v} & TX \\ \downarrow \lambda f + \mu f' & & \downarrow \lambda g + \mu g' & & \downarrow \lambda \Omega f + \mu \Omega f' & & \downarrow \lambda T f + \mu T f' \\ X' & \xrightarrow{i'} & P' & \xrightarrow{u'} & \Omega X' & \xrightarrow{v'} & TX' \end{array}$$

où  $f' : X \rightarrow X'$  et  $\lambda, \mu \in \mathcal{O}$ . ■

**Corollaire 4.5 – Une autre façon de calculer le décalage.** Le foncteur  $\Omega : \mathcal{A} \rightarrow \text{M-Stab}_{\mathcal{A}}$  définit un foncteur R-linéaire (encore noté  $\Omega$ )  $\Omega : \text{M-Stab}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{M-Stab}_{\mathcal{A}}$  isomorphe au foncteur de translation T.

**Preuve.** Pour montrer qu'on peut localiser  $\Omega$ , il suffit de vérifier que  $\Omega : \mathcal{A} \rightarrow \text{M-Stab}_{\mathcal{A}}$  envoie un élément de  $\mathcal{S}$  sur un élément inversible de  $\text{M-Stab}_{\mathcal{A}}$ . Pour cela, on considère  $f \in \mathcal{S}$  et on applique le lemme  $3 \times 3$  (voir [MAY, lemme 2.6]) pour obtenir le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{i} & P_X & \xrightarrow{u} & \Omega X & \xrightarrow{v} & TX \\
\downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow \alpha & & \downarrow Tf \\
X' & \xrightarrow{i'} & P_{X'} & \xrightarrow{u'} & \Omega X' & \xrightarrow{v'} & TX' \\
\downarrow f' & & \downarrow g' & & \downarrow \beta & & \downarrow Tf' \\
X'' & \xrightarrow{i''} & Y & \xrightarrow{u''} & Z & \xrightarrow{v''} & TX'' \\
\downarrow f'' & & \downarrow g'' & & \downarrow \gamma & & \downarrow -Tf'' \\
TX & \xrightarrow{Ti} & TP_X & \xrightarrow{Tu} & T\Omega X & \xrightarrow{-Tv} & T^2 X
\end{array}$$

où les lignes et les colonnes du diagramme sont des triangles distingués. Comme  $f \in \mathcal{S}$ , on a  $X'' \in \langle M\text{-split} \rangle$ . Le corollaire 3.46 appliqué à la deuxième colonne montre que  $Y \in \langle M\text{-split} \rangle$ . En l'appliquant alors à la troisième ligne, on obtient que  $Z \in \langle M\text{-split} \rangle$ . Comme la troisième colonne est un triangle distingué, on a  $\alpha \in \mathcal{S}$ . Par construction de  $\Omega$ , on en déduit que  $\Omega f = \alpha$  est donc inversible dans  $M\text{-Stab}_{\mathcal{A}}$ . Ainsi, on peut bien localiser  $\Omega$ .

La naturalité découle du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
\Omega X & \xrightarrow{v} & TX \\
\Omega f \downarrow & & \downarrow Tf \\
\Omega X' & \xrightarrow{v'} & TX'
\end{array}$$

Par ailleurs, le foncteur de localisation est  $\mathcal{O}$ -triangulé donc le triangle  $X \xrightarrow{i} P_X \xrightarrow{u} \Omega X \xrightarrow{v} TX$  est distingué dans  $M\text{-Stab}_{\mathcal{A}}$ . Or  $P_X$  est nul dans  $M\text{-Stab}_{\mathcal{A}}$ , le corollaire 3.47 assure que  $v$  est un isomorphisme dans  $M\text{-Stab}_{\mathcal{A}}$ . ■

Finissons cette sous-section par deux exemples d'illustration de la construction précédente.

**Exemple 4.6 — Catégorie dérivée.** Considérons la situation suivante : on fixe  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  deux catégories abéliennes et  $M : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $L, R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  trois foncteurs additifs. On suppose que  $(M, L, R)$  est un triplet adjoint et que  $L$  et  $R$  sont exacts. L'exactitude de  $L$  et  $R$  assure qu'ils définissent des foncteurs triangulés  $L, R : \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ . Par ailleurs, comme  $M$  admet un adjoint à droite et à gauche,  $M$  est exact. Ainsi  $M$  induit un foncteur triangulé  $M : \mathcal{D}^b(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ . De plus, le triplet induit  $(M, L, R)$  est encore un triplet adjoint.

On se pose alors la question suivante : dans ce cadre, quelle est la sous-catégorie  $\langle M\text{-split} \rangle$  de  $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$  ? Ici, on va montrer que  $\langle M\text{-split} \rangle$  contient nécessairement les complexes bornés d'objets  $M\text{-split}$ . On en déduit que si les complexes isomorphes dans  $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$  à un complexe borné d'objets  $M\text{-split}$  forment une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$  alors  $\langle M\text{-split} \rangle$  est formé des complexes isomorphes dans  $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$  à un complexe borné d'objets  $M\text{-split}$ .

Montrons donc que  $\langle M\text{-split} \rangle$  contient les complexes bornés d'objets  $M\text{-split}$ . Commençons par le cas des complexes ayant un seul objet non nul. Soit  $P$  un objet  $M\text{-split}$  de  $\mathcal{A}$ . Il existe un objet  $Q$  de  $\mathcal{A}$  et  $Y$  un objet de  $\mathcal{B}$  tel que  $P \oplus Q = MY$ . Ainsi le complexe concentré en degré 0 dont la composante non nulle est  $P$  est facteur direct de l'image par  $M$  du complexe concentré en degré 0 dont la composante non nulle  $Y$ . Finalement le complexe  $P$  concentré en degré 0 est dans  $\langle M\text{-split} \rangle$ .

Raisonnons par récurrence sur  $n$  pour montrer qu'un complexe de longueur  $n$  formé d'objets  $M\text{-split}$  est dans  $\langle M\text{-split} \rangle$ . On a traité le cas  $n = 1$ . Supposons le résultat vrai pour les complexes de longueur  $n - 1$ . On considère alors un complexe  $Q$  :

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_P^1} P_2 \xrightarrow{d_P^2} \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow 0 \longrightarrow$$

de longueur  $n$  formé d'objets  $M\text{-split}$ . Comme  $d_P^{n-1}(-d_P^{n-2}) = 0$ , on a alors le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow 0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{-d_P^1} & P_2 & \xrightarrow{-d_P^2} & \cdots \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow 0 \longrightarrow \\
& & & & & & \downarrow d_P^{n-1} \\
& & & & & & P_n
\end{array}$$

dont le cône est  $Q$ . Ainsi comme, par hypothèse de récurrence,

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{-d_P^1} P_2 \xrightarrow{-d_P^2} \cdots \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow 0 \longrightarrow$$

et  $0 \longrightarrow P_n \longrightarrow 0$  sont dans  $\langle M\text{-split} \rangle$ , on en déduit que  $Q$  est dans  $\langle M\text{-split} \rangle$ .

L'exemple suivant donne version concrète de la situation décrite ci-dessus : on prend  $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$  la catégorie des  $A$ -modules où  $A$  est une algèbre symétrique de dimension finie sur un corps  $k$ ,  $\mathcal{B} = k\text{-Ev}$  la catégorie des

$k$ -espaces vectoriels,  $M = A \otimes_k$  l'extension des scalaires et  $L = R$  la restriction des scalaires. Les objets M-split de  $\mathcal{A}$  sont les facteurs directs des  $A$ -modules libres c'est-à-dire les  $A$ -modules projectifs. Or la sous-catégorie des complexes bornés de  $A$ -modules projectifs est épaisse (voir le théorème 6.2 de [RIC1]). On retrouve ainsi la situation du théorème 2.1 de [RIC].  $\blacksquare$

**Exemple 4.7 – Catégorie M-dérivée.** Anticipons un peu sur les sections 4.2 et 4.3. On considère donc les hypothèses 4.14 :  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  deux catégories abéliennes et  $M : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $L, R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  trois foncteurs additifs. On suppose que  $(M, L, R)$  est un triplet adjoint et que  $L$  et  $R$  sont fidèles et exacts. On suppose aussi que toute suite exacte de  $\mathcal{A}$  est  $L$ -scindée si et seulement si elle est  $R$ -scindée.

On définit les catégories triangulées  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A}) = \text{Com}^{\text{ht}}(\mathcal{A})^b / \text{Ker } R$  et  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{B}) = \text{Com}^{\text{ht}}(\mathcal{A})^b / \text{Ker } M$ . Le foncteur  $M$  induit un foncteur triangulé  $M : \mathcal{D}_M^b(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$ . De même, les foncteurs  $L, R$  induisent des foncteurs triangulés  $L, R : \mathcal{D}_M^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}_M^b(\mathcal{B})$ . Le triplet  $(M, L, R)$  est un triplet adjoint. En suivant la méthode de l'exemple précédent, on en déduit que la sous-catégorie épaisse engendrée par les objets M-split de  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  contient les complexes bornés d'objets M-split. Ainsi lorsque les objets isomorphes dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  à un complexe borné d'objets M-split forment une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  (ce qui est le cas quand  $\mathcal{A}$  admet des coproduits dénombrables (voir le corollaire 4.51)),  $\langle M\text{-split} \rangle$  est la catégorie des complexes bornés isomorphes dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  à un complexe borné d'objets M-split. Le quotient  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A}) / \langle M\text{-split} \rangle$  donne alors la catégorie  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$  (voir la proposition 4.49 et la définition 4.21).  $\blacksquare$

## 4.1.2 CONTRE-EXEMPLE

L'objectif de cette sous-section est de montrer que les objets M-split d'une catégorie triangulée ne forment pas en général une sous-catégorie triangulée. Pour cela, on va s'intéresser à la catégorie homotopique d'une algèbre symétrique et au cas où  $M$  est l'extension d'un foncteur de la catégorie des modules : le foncteur d'induction. On commence par donner quelques propriétés des complexes scindés qui permettent de reconnaître ou de construire des objets M-split (lemme 4.11). On donne ensuite deux contre-exemples reposant sur le même principe : le cône d'un morphisme entre deux complexes scindés n'est pas forcément scindé.

**Lemme 4.8 – Complexes scindés et foncteur.** Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux catégories abéliennes,  $M : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur additif. On note  $M$  le foncteur de  $\text{Com}(\mathcal{C})$  dans  $\text{Com}(\mathcal{C}')$  qui prolonge  $M$  (voir la proposition 3.81).

Si  $X$  un complexe scindé de  $\mathcal{C}$  (voir la proposition 3.99) alors le complexe  $MX$  est scindé.

**Preuve.** Le point (iii) de la proposition-définition 3.99 assure l'existence de morphismes  $s^n : X^{n+1} \rightarrow X^n$  telle que  $d_X^n s^n d_X^n = d_X^n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . On a alors  $M d_X^n M s^n M d_X^n = M d_X^n$ . Comme  $M d_X^n = d_{MX}^n$ , on obtient que le complexe  $MX$  est scindé.  $\blacksquare$

**Lemme 4.9 – Complexes scindés et somme directe.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie abélienne et  $X, Y$  deux complexes de  $\mathcal{C}$ . Le complexe  $X \oplus Y$  est scindé si et seulement si  $X$  et  $Y$  le sont.

On suppose que  $X$  est scindé. Si  $Y$  est facteur direct dans  $\text{Com}(\mathcal{C})^{\text{ht}}$  de  $X$  alors  $Y$  est scindé.

**Preuve.** Supposons  $X$  et  $Y$  scindés. On a alors  $s^n : X^{n+1} \rightarrow X^n$  et  $t^n : Y^{n+1} \rightarrow Y^n$  tels que  $d_X^n s^n d_X^n = d_X^n$  et  $d_Y^n t^n d_Y^n = d_Y^n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad d_{X \oplus Y}^n (s^n \oplus t^n) d_{X \oplus Y}^n = d_{X \oplus Y}^n,$$

c'est-à-dire que  $X \oplus Y$  est scindé.

Réciproquement, supposons  $X \oplus Y$  scindé. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , il existe  $s^n : X^{n+1} \oplus Y^{n+1} \rightarrow X^n \oplus Y^n$  :

$$s^n = \begin{bmatrix} u^n & v^n \\ w^n & x^n \end{bmatrix}$$

tel que  $d_{X \oplus Y}^n s^n d_{X \oplus Y}^n = d_{X \oplus Y}^n$ . Cette égalité assure que  $d_X^n u^n d_X^n = d_X^n$  et  $d_Y^n x^n d_Y^n = d_Y^n$ . Autrement dit  $X$  et  $Y$  sont scindés.

Par hypothèse, il existe un complexe  $Z$  et un isomorphisme  $f$  de  $\text{Com}(\mathcal{C})^{\text{ht}}$  tel que  $f : Y \oplus Z \rightarrow X$ . Comme  $X$  est scindé, il existe un complexe  $V$  à différentielle nulle et un isomorphisme  $g : X \rightarrow V$  de  $\text{Com}(\mathcal{C})^{\text{ht}}$  (voir la proposition-définition 3.99 (i)). Par composition, on en déduit que le complexe  $Y \oplus Z$  est scindé. Ainsi  $Y$  l'est aussi d'après la première partie de la proposition.  $\blacksquare$

On va utiliser ces résultats sur les complexes scindés pour montrer que la sous-catégorie pleine des objets M-split (pour  $M$  un foncteur triangulé d'un triplet adjoint  $(M, L, R)$  de foncteurs triangulés) d'une catégorie triangulée n'est pas nécessairement une sous-catégorie triangulée. On considère pour cela la situation suivante.

**Notation 4.10** Soient  $k$  un corps et  $A$  une  $k$ -algèbre symétrique (voir la définition 3.5). On considère les foncteurs d'induction de  $k$  à  $A$  et de restriction de  $A$  à  $k$  qui sont donnés respectivement par

$$\text{Ind} = A \otimes_k \bullet \quad \text{et} \quad \text{Res} = A \otimes_A \bullet.$$

Comme  $A$  est symétrique, la paire  $(\text{Ind}, \text{Res})$  est une paire biadjointe (voir l'exemple 3.12). On considère les extensions de  $\text{Ind}$  et  $\text{Res}$  aux catégories homotopiques :  $\text{Ind} : k\text{Com}^{\text{ht}} \rightarrow A\text{Com}^{\text{ht}}$  et  $\text{Res} : A\text{Com}^{\text{ht}} \rightarrow k\text{Com}^{\text{ht}}$  (voir la proposition 3.93). Ils forment encore une paire biadjointe de foncteurs triangulés (voir la remarque 3.94).

On considère alors  $M = \text{Ind}$ . Un objet  $M$ -split de la catégorie des  $A$ -modules est en fait qu'un  $A$ -module projectif.

Montrons que la sous-catégorie pleine des objets  $M$ -split de  $A\text{Com}^{\text{ht}}$  n'est pas toujours une sous-catégorie triangulée. Pour cela, on commence par un lemme qui permet de reconnaître des objets  $M$ -splits de  $A\text{Com}^{\text{ht}}$ .

**Lemme 4.11 — Objet  $M$ -split et complexe scindé.** Dans la situation précédente, tout objet  $M$ -split de  $A\text{Com}^{\text{ht}}$  est scindé.

Tout complexe scindé d'objets  $M$ -split est un objet  $M$ -split de  $A\text{Com}$  et de  $A\text{Com}^{\text{ht}}$ . En particulier, tout complexe à différentielle nulle formé d'objets  $M$ -split est un objet  $M$ -split de  $A\text{Com}$  et  $A\text{Com}^{\text{ht}}$ .

**Preuve.** Comme  $k$  est un corps, le point (iv) de la proposition-définition 3.99 montre que tout complexe de  $k\text{Com}$  est scindé. Ainsi le lemme 4.8 assure que tout complexe de la forme  $MX$  est scindé. Enfin la deuxième partie du lemme 4.9 montre que tout objet  $M$ -split de  $A\text{Com}^{\text{ht}}$  est scindé.

Soit  $(X, d_X)$  un complexe scindé formé d'objets  $M$ -split. Le point (vi) de la proposition-définition 3.99 montre qu'on peut écrire  $X^n = U^n \oplus V^n \oplus U'^{n+1}$  et que la différentielle de  $X$  est donnée par la matrice

$$d_X^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{id}_{U'^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $U^n$  et  $V^n$  sont des objets  $M$ -split. Ainsi il existe  $U'^n$ ,  $V'^n$ ,  $A^n$  et  $B^n$  tels que  $U^n \oplus U'^n = MA^n$  et  $V^n \oplus V'^n = MB^n$ . Un simple calcul matriciel montre qu'on définit un complexe scindé  $Y$  en posant

$$Y^n = U'^n \oplus V'^n \oplus U'^{n+1} \quad \text{et} \quad d_Y^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{id}_{U'^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En écrivant, le complexe  $X \oplus Y$  sous la forme

$$(X \oplus Y)^n = (U^n \oplus U'^n) \oplus (V^n \oplus V'^n) \oplus (U'^{n+1} \oplus U'^{n+1}) = MA^n \oplus MB^n \oplus MA^{n+1} = M(A^n \oplus B^n \oplus A^{n+1})$$

$$\text{et} \quad d_{X \oplus Y}^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{id}_{U'^{n+1}} \oplus \text{id}_{U'^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{id}_{MA^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{Mid}_{A^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

on obtient que  $X \oplus Y = MC$  où  $C$  est le complexe donné par

$$C^n = A^n \oplus B^n \oplus A^{n+1} \quad \text{et} \quad d_C^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{id}_{A^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi  $X$  est un objet  $M$ -split de  $A\text{Com}$  et donc de  $A\text{Com}^{\text{ht}}$ . ■

### LES CONTRE-EXEMPLES

**Contre-exemple 4.12 — Le cas  $A = k[X]/X^2$ .** On considère  $k$  un corps commutatif et  $A = k[X]/X^2$ . La forme linéaire  $t : P \in k[X] \rightarrow P'(0) \in k$  passe au quotient (puisque  $t(X^2P) = 0$  pour tout  $P \in k[X]$ ). Comme  $A$  est commutatif, la forme linéaire  $t$  est centrale (voir la définition 3.1). De plus, pour  $a, b \in k$  avec  $a \neq 0$ , on a  $t((a + bX)X) = a \neq 0$  et si  $a = 0$ , on a  $t((bX)1) = b$ . Ainsi  $t$  est une forme symétrisante (voir la définition 3.3) et  $A$  est une  $k$ -algèbre symétrique.

Le  $A$ -module  $A$  est indécomposable : ses sous- $A$ -modules sont  $0$ ,  $kX$  et  $A$  (ils sont en bijection avec les idéaux de  $k[X]$  contenant  $X^2$  c'est-à-dire avec les diviseurs unitaires (non nuls) de  $X^2$ ). On considère alors le complexe  $Y$  à différentielle nulle dont la seule composante homogène non nulle est  $A$  en degré  $0$ . L'endomorphisme  $\mu_X : A \rightarrow A$  de multiplication par  $X$  définit un morphisme de complexes (encore noté  $\mu_X$ ) de  $Y$  dans lui-même. Le cône de ce morphisme est le complexe

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\mu_X} A \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

où le but de  $\mu_X$  est en degré  $0$ . L'objet  $Y$  est un objet  $M$ -split de  $A\text{Com}^{\text{ht}}$  (d'après le lemme 4.11). Donc, si les objets  $M$ -split de  $A\text{Com}^{\text{ht}}$  formaient une sous-catégorie triangulée de  $A\text{Com}^{\text{ht}}$ , le cône de  $\mu_X$  serait aussi un

objet M-split de  $A\text{Com}^{\text{ht}}$  (voir le corollaire 3.46). Le lemme 4.11 montre alors que le cône de  $\mu_X$  est un complexe scindé. Comme  $\text{Ker } \mu_X = kX$  est différent de 0 et A et que A est indécomposable,  $\text{Ker } \mu_X$  ne peut être facteur direct de A et donc le cône de  $\mu_X$  n'est pas un complexe scindé. ■

**Contre-exemple 4.13 – Le cas  $A = \mathbb{F}_3\mathfrak{S}_3$ .** On considère  $k = \mathbb{F}_3$  et  $A = \mathbb{F}_3\mathfrak{S}_3$  l'algèbre du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_3$  sur  $\mathbb{F}_3$  qui est une  $\mathbb{F}_3$ -algèbre symétrique puisque c'est l'algèbre d'un groupe fini (voir l'exemple 3.6). Fixons  $\tau = (1, 2) \in \mathfrak{S}_3$  une transposition et  $\sigma = (1, 2, 3)$  un 3-cycle. On a

$$(\tau - 1)^2 = 2 - 2\tau = \tau - 1, \quad (-1 - \tau)^2 = 2 + 2\tau = -1 - \tau \quad \text{et} \quad (\tau - 1) + (-1 - \tau) = -2 = 1.$$

Ainsi  $\tau - 1$  et  $-(\tau + 1)$  sont deux idempotents supplémentaires de A. On en déduit la décomposition de  $A = P_0 \oplus P_1$  en somme directe de deux A-modules projectifs avec

$$P_0 = A(\tau - 1) \quad \text{et} \quad P_1 = A(\tau + 1) = A(-\tau - 1).$$

Étudions  $P_0$  et  $P_1$ . Par construction, on a  $P_0 = \langle g(1 - \tau), \quad g \in \mathfrak{S}_3 \rangle_{\mathbb{F}_3 - \text{ev}}$ . Or, on a

$$\tau(\tau - 1) = 1 - \tau, (2, 3)(\tau - 1) = \sigma^2 - (2, 3), (1, 3)(\tau - 1) = \sigma - (1, 3), \sigma(\tau - 1) = (1, 3) - \sigma, \sigma^2(\tau - 1) = (2, 3) - \sigma^2.$$

On en déduit que  $P_0$  est de dimension 3 et qu'une base de  $P_0$  est  $(1 - \tau, \sigma^2 - (2, 3), \sigma - (1, 3))$ . De même,  $P_1 = \langle g(1 - \tau), \quad g \in \mathfrak{S}_3 \rangle_{\mathbb{F}_3 - \text{ev}}$  et  $P_1$  est de dimension 3 et  $(1 + \tau, \sigma^2 + (2, 3), \sigma + (1, 3))$  est une base de  $P_1$ .

Étudions les sous-A-modules de dimension 1 de  $P_0$  et  $P_1$ . Soit  $M = \mathbb{F}_3x$  un tel sous-module de  $P_0$ . En particulier, M est un  $\mathfrak{A}_3$ -module irréductible de dimension 1 et qui est donc le module trivial. Ainsi  $\sigma x = \sigma^2 x = x$ . On pose  $x = \lambda_1(1 - \tau) + \lambda_2(\sigma^2 - (2, 3)) + \lambda_3(\sigma - (1, 3))$ . Comme  $(2, 3) = \sigma^2\tau$  et  $(1, 3) = \sigma\tau$ , on a

$$\sigma x = \lambda_1(\sigma - (1, 3)) + \lambda_2(1 - \tau) + \lambda_3(\sigma^2 - (2, 3)) = x$$

et donc  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$ . Ainsi  $x = \lambda(1 + \sigma + \sigma^2 - (1, 2) - (2, 3) - (1, 3))$  et M est sous-A-module irréductible associé à la signature. En particulier,  $P_0$  admet un unique sous-module de dimension 1. De même,  $P_1$  admet un unique sous-module de dimension 1. On le note N. C'est la droite engendrée par  $1 + \sigma + \sigma^2 + (1, 2) + (2, 3) + (1, 3)$  qui donne un module trivial.

Or  $\mathfrak{S}_3$  admet deux représentations irréductibles en caractéristique 3 donnée par la représentation triviale et la signature qui sont toutes deux de dimension 1. On en déduit que M (resp. N) est le socle de  $P_0$  (resp.  $P_1$ ). Ainsi  $P_0/\text{Rad}(P_0)$  (resp.  $P_1/\text{Rad}(P_1)$ ) est de dimension 1 (puisque isomorphe à  $\text{Soc}(P_0)$  (resp.  $\text{Soc}(P_1)$ )) et donc  $\text{Rad}(P_0)$  et  $\text{Rad}(P_1)$  sont de dimension 2. Par ailleurs si  $M'$  (resp.  $N'$ ) est un sous-A-module de dimension 2 alors  $P_0/M'$  (resp.  $P_1/N'$ ) est de dimension 1 donc irréductible donc  $\text{Rad}(P_0) \subset M'$  (resp.  $\text{Rad}(P_1) \subset N'$ ). On obtient ainsi  $\text{Rad}(P_0) = M'$  (resp.  $\text{Rad}(P_1) = N'$ ) par raison de dimension. Ainsi  $P_0$  et  $P_1$  ont chacun un unique sous-module de dimension 2.

On note  $k^\varepsilon$  le A-module de dimension 1 associé à la signature. L'application

$$\alpha: \begin{cases} P_0 & \longrightarrow k^\varepsilon \\ x = \lambda_1(1 - \tau) + \lambda_2(\sigma^2 - (2, 3)) + \lambda_3(\sigma - (1, 3)) & \longmapsto \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$$

est un morphisme surjectif de A-modules. En effet, pour  $x \in P_0$  et  $g \in \mathfrak{A}_3$ , on a  $\alpha(gx) = \alpha(x)$  et si  $g$  est une transposition  $\alpha(gx) = -\alpha(x)$ . Ainsi  $\text{Ker } \alpha$  est un sous-module de  $P_0$  de dimension 2 contenant  $\text{Soc}(P_0)$ . Finalement  $P_0$  est indécomposable.

De même, on note  $k$  le A-module trivial. L'application

$$\beta: \begin{cases} P_1 & \longrightarrow k \\ x = \lambda_1(1 + \tau) + \lambda_2(\sigma^2 + (2, 3)) + \lambda_3(\sigma + (1, 3)) & \longmapsto \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$$

est un morphisme surjectif de A-modules. Ainsi  $\text{Ker } \beta$  est un sous-module de  $P_1$  de dimension 2 contenant  $\text{Soc}(P_1)$ . On en déduit que  $P_1$  est indécomposable.

On pose  $x = (1 - \tau)(\sigma + (1, 3)) = (1 - \tau)\sigma(1 + \tau) = \sigma - \sigma^2 + (1, 3) - (2, 3)$ . On considère le morphisme de A-modules donnée par

$$f: \begin{cases} P_0 \longrightarrow P_1 \\ y \longmapsto yx. \end{cases}$$

Le calcul montre que  $\text{Soc}(P_0) = \mathbb{F}_3(1 + \sigma + \sigma^2 - (1, 3) - (1, 2) - (2, 3)) \subset \text{Ker } f$ . Par ailleurs,  $f(1 - \tau) = -x \neq 0$ . On en déduit que  $\text{Ker } f \neq P_0$  et  $\text{Ker } f \neq 0$ . Enfin, si  $\dim \text{Ker } f = 2$  alors  $P_1$  contient un sous-module isomorphe à  $P_0/\text{Rad}(P_0) = k^\varepsilon$  ce qui n'est pas le cas. Ainsi  $\text{Ker } f = \text{Soc}(P_0)$ .

On considère alors le complexe X à différentielle nulle dont la seule composante non nulle est  $P_0$  en degré 0, le complexe Y à différentielle nulle dont la seule composante non nulle est  $P_1$  en degré 0 et le morphisme  $f: P_0 \rightarrow P_1$  ci-dessus. On obtient définit ainsi un morphisme de complexes (encore noté  $f$ ) de X dans Y. Le cône de  $f$  est le complexe

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{f} P_1 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

où  $P_1$  est en degré 0. Les objets  $X$  et  $Y$  sont des objets M-split de  $A\text{Com}^{\text{ht}}$  (d'après le lemme 4.11). Donc, si les objets M-split de  $A\text{Com}^{\text{ht}}$  formaient une sous-catégorie triangulée de  $A\text{Com}^{\text{ht}}$ , le cône de  $f$  serait aussi un objet M-split de  $A\text{Com}^{\text{ht}}$  (voir le corollaire 3.46). Le lemme 4.11 montre alors que le cône de  $f$  est un complexe scindé. Comme  $\text{Ker } f$  est différent de 0 et  $P_0$  et que  $P_0$  est indécomposable,  $\text{Ker } f$  ne peut être facteur direct de  $P_0$  et donc le cône de  $f$  n'est pas un complexe scindé. ■

## 4.2 CATÉGORIE M-STABLE D'UNE CATÉGORIE ABÉLIENNE

Dans cette section, on construit la catégorie M-stable d'une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  où M désigne un foncteur à valeurs dans  $\mathcal{A}$  ayant un adjoint à droite et à gauche tous deux fidèles et exacts : c'est le quotient de  $\mathcal{A}$  par les facteurs directs des objets de la forme  $MY$ . On suit pour cela pas à pas la méthode de Happel [HAP, Chapitre 2] et on aboutit à une catégorie triangulée.

**Hypothèse 4.14** Dans cette section, on fixe un anneau commutatif unitaire  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  deux catégories  $\mathcal{O}$ -abéliennes et  $M : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $L, R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  trois foncteurs  $\mathcal{O}$ -linéaires. On suppose que  $(M, L, R)$  est un triplet adjoint et que  $L$  et  $R$  sont fidèles (voir le corollaire 3.16 et la proposition 3.36) et exacts. On note

$$\varepsilon_X^R : MRX \longrightarrow X, \quad \eta_Y^R : Y \longrightarrow RMY \quad \text{et} \quad \varepsilon_Y^L : LMY \longrightarrow Y, \quad \eta_X^L : X \longrightarrow MLX$$

les unités et counités associées aux paires adjointes  $(M, R)$  et  $(L, M)$ .

Soient  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur additif et

$$(\mathcal{S}) \quad 0 \longrightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de  $\mathcal{A}$ . On dit que  $(\mathcal{S})$  est  $F$ -scindée si

$$(F\mathcal{S}) \quad 0 \longrightarrow FX' \xrightarrow{Ff} FX \xrightarrow{Fg} FX'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte scindée.

On suppose qu'une suite exacte courte de  $\mathcal{A}$  est L-scindée si et seulement si elle est R-scindée.

**Remarque 4.15** Faisons quelques commentaires sur les hypothèses 4.14. L'exactitude de  $L$  et  $R$  permet de définir deux structures de catégories exactes (au sens de Quillen [QUI] et Keller [KEL, Appendice A]) sur  $\mathcal{A}$  : on dit qu'une suite est exacte si son image par  $L$  (resp.  $R$ ) est une suite exacte scindée.

La fidélité de  $L$  (resp.  $R$ ) signifie que la structure de catégorie exacte associée à  $L$  (resp.  $R$ ) a assez d'injectifs (resp. de projectifs) (voir le corollaire 3.16).

L'hypothèse sur les suites L-scindées et R-scindées signifie que les deux structures de catégorie exactes sont les mêmes.

On peut alors appliquer le résultat de Happel [HAP, Chapitre 2]. Mais, dans cette section, on va adapter la démonstration en se servant de la fonctorialité au niveau de la catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  ce qui permet de simplifier les choses. En particulier, les triangles standards qu'on va choisir ne sont qu'une partie de ceux de Happel. ■

**Exemple 4.16** Donnons quelques exemples concrets dans lesquels les hypothèses sont vérifiées.

Les hypothèses sur le triplet adjoint  $(M, L, R)$  sont évidemment vérifiées lorsque  $L = R = N$  est fidèle c'est-à-dire si  $\{M, N\}$  est une paire biadjointe avec  $N$  fidèle puisqu'alors  $N$  est exact. C'est par exemple le cas lorsque  $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$  est la catégorie des  $A$ -modules où  $A$  est une  $k$ -algèbre symétrique,  $\mathcal{B} = k\text{-Ev}$ ,  $M = A \otimes_k \bullet$  est l'extension des scalaires et  $L = R$  est la restriction des scalaires (qui est évidemment fidèle).

Toujours dans le même ordre d'idée, on obtient aussi par cette construction, la catégorie relativement stable. En effet, on considère  $G$  un groupe fini,  $H$  un sous-groupe de  $G$  et  $\mathcal{O}$  un anneau commutatif unitaire.  $\mathcal{A} = \mathcal{O}G\text{-Mod}$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{O}H\text{-Mod}$ ,  $M = \mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}H} \bullet$ ,  $L = R$  est la restriction des scalaires (qui est évidemment fidèle).

Les exemples que nous avons donnés vérifient tous  $L = R$ . Mais les hypothèses présentées ici proposent en fait un cadre plus large dont nous n'avons pas pour l'instant d'exemples concrets autre que ceux ci-dessus.

Par ailleurs, lorsque  $L \neq R$ , l'hypothèse sur la scission des suites exactes après application de  $L$  ou  $R$  est évidemment vérifiée si  $\mathcal{B}$  est une catégorie abélienne semi-simple. ■

### 4.2.1 LA CATÉGORIE M-STABLE

Dans cette sous-section, on définit la catégorie M-stable (voir la proposition-définition 4.21). On introduit auparavant, au niveau de la catégorie abélienne, les foncteurs  $\Omega$  et  $\Omega^{-1}$  qui donneront les foncteurs de translation dans la catégorie stable.

**Proposition-Définition 4.17 — Foncteur  $\Omega$  et  $\Omega^{-1}$ .** Soit  $X \in \mathcal{A}$ . Par hypothèse (voir le corollaire 3.16),  $\varepsilon_X^R$  est un épimorphisme. On définit alors  $(\Omega^{-1}(X), i_X) = \text{Ker } \varepsilon_X^R$ . On a donc la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \Omega^{-1}(X) \xrightarrow{i_X} \text{MR}X \xrightarrow{\varepsilon_X^R} X \longrightarrow 0$$

Par hypothèse (voir le corollaire 3.16),  $\eta_X^L$  est un monomorphisme. On définit alors  $(\Omega(X), \pi_X) = \text{Coker } \eta_X^L$ . On a donc la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\eta_X^L} \text{ML}X \xrightarrow{\pi_X} \Omega(X) \longrightarrow 0$$

Soient  $X, X' \in \mathcal{A}$  et  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')$ . On définit  $\Omega^{-1}(f) : \Omega^{-1}(X) \rightarrow \Omega^{-1}(X')$  comme l'unique morphisme qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^{-1}(X) & \xrightarrow{i_X} & \text{MR}X & \xrightarrow{\varepsilon_X^R} & X \longrightarrow 0 \\ & & \Omega^{-1}(f) \downarrow & & \downarrow \text{MR}f & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{-1}(X') & \xrightarrow{i_{X'}} & \text{MR}X' & \xrightarrow{\varepsilon_{X'}^R} & X' \longrightarrow 0 \end{array}$$

On définit  $\Omega(f) : \Omega(X) \rightarrow \Omega(X')$  comme l'unique morphisme qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\eta_X^L} & \text{ML}X & \xrightarrow{\pi_X} & \Omega(X) \longrightarrow 0 \\ & & f \downarrow & & \downarrow \text{ML}f & & \downarrow \Omega(f) \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\eta_{X'}^L} & \text{ML}X' & \xrightarrow{\pi_{X'}} & \Omega(X') \longrightarrow 0 \end{array}$$

On définit ainsi deux endofoncteurs  $\mathcal{O}$ -linéaires  $\Omega$  et  $\Omega^{-1}$  de  $\mathcal{A}$ .

**Preuve.** Montrons que  $\Omega^{-1}(f)$  et  $\Omega(f)$  sont bien définis. Par hypothèse, on a  $\varepsilon_X^R \text{MR}f i_X = f \varepsilon_X^R i_X = 0$ . Ainsi  $\text{MR}f i_X$  se factorise de façon unique par  $\text{Ker } \varepsilon_{X'}^R$ . Par hypothèse, on a  $\pi_X \text{ML}f \eta_X^L = \pi_{X'} \eta_{X'}^L f = 0$ . Ainsi  $\pi_X \text{ML}f$  se factorise de façon unique par  $\text{Coker } \eta_{X'}^L$ .

La propriété d'unicité assure immédiatement que les applications  $f \mapsto \Omega^{-1}(f)$  et  $f \mapsto \Omega(f)$  sont des morphismes de  $\mathcal{O}$ -modules. Soient  $X''$  un objet de  $\mathcal{A}$  et  $g : X' \rightarrow X''$ . Comme  $\text{MR}(gf) = \text{MR}(g)\text{MR}(f)$ , la propriété d'unicité assure que  $\Omega^{-1}(gf) = \Omega^{-1}(g)\Omega^{-1}(f)$ . De même, comme  $\text{ML}(gf) = \text{ML}(g)\text{ML}(f)$ , la propriété d'unicité assure que  $\Omega(gf) = \Omega(g)\Omega(f)$ .

Enfin, comme  $\text{ML}(\text{id}_X) = \text{id}_{\text{ML}X}$  et  $\text{MR}(\text{id}_X) = \text{id}_{\text{MR}X}$ , on obtient  $\Omega(\text{id}_X) = \text{id}_{\Omega(X)}$  et  $\Omega^{-1}(\text{id}_X) = \text{id}_{\Omega^{-1}(X)}$ . Finalement  $\Omega$  et  $\Omega^{-1}$  sont bien des foncteurs. ■

Pour montrer que la catégorie M-stable est bien une catégorie  $\mathcal{O}$ -linéaire, on doit vérifier que la partie des morphismes par laquelle on quotient est un idéal. Les propriétés de composition et de  $\mathcal{O}$ -linéarité sont évidentes. Pour l'additivité, on utilise le fait que la somme de deux morphismes s'exprime à l'aide de la somme directe. C'est ce qu'on rappelle dans le lemme 4.19. La notation 4.18 introduit les notations du lemme 4.19.

**Notation 4.18 — Diagonale.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie additive. Pour  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , on note  $i_1^X, i_2^X : X \rightarrow X \oplus X$  et  $p_1^X, p_2^X : X \oplus X \rightarrow X$  les morphismes donnant la structure de somme directe sur  $X \oplus X$  c'est-à-dire tels qu'on ait  $p_1^X i_1^X = \text{id}_X$ ,  $p_2^X i_2^X = \text{id}_X$ ,  $p_1^X i_2^X = p_2^X i_1^X = 0$  et  $i_1^X p_1^X + i_2^X p_2^X = \text{id}_{X \oplus X}$ .

On note aussi  $\nabla_X : X \oplus X \rightarrow X$  la projection diagonale c'est-à-dire l'unique morphisme tel que  $\nabla_X \circ i_1^X = \text{id}_X$  et  $\nabla_X \circ i_2^X = \text{id}_X$ ; et  $\Delta_X : X \rightarrow X \oplus X$  le plongement diagonal c'est-à-dire l'unique morphisme vérifiant  $p_1^X \circ \Delta_X = \text{id}_X$  et  $p_2^X \circ \Delta_X = \text{id}_X$ .

**Lemme 4.19 — Somme.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie additive,  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  et  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ . On a  $f + g = \nabla_Y(f \oplus g)\Delta_X$ .

**Preuve.** Par définition,  $f \oplus g$  est l'unique morphisme de  $X \oplus X$  dans  $Y \oplus Y$  vérifiant  $p_1^Y(f \oplus g)i_1^X = f$ ,  $p_2^Y(f \oplus g)i_2^X = g$  et  $p_2^Y(f \oplus g)i_1^X = p_1^Y(f \oplus g)i_2^X = 0$ . On en déduit que

$$\begin{aligned}
\nabla_Y(f \oplus g)\Delta_X &= \nabla_Y(f \oplus g)(i_1^X p_1^X + i_2^X p_2^X)\Delta_X \\
&= \nabla_Y(f \oplus g)i_1^X + \nabla_Y(f \oplus g)i_2^X \\
&= \nabla_Y(i_1^Y p_1^Y + i_2^Y p_2^Y)(f \oplus g)i_1^X + \nabla_Y(i_1^Y p_1^Y + i_2^Y p_2^Y)(f \oplus g)i_2^X \\
&= p_1^Y(f \oplus g)i_1^X + p_2^Y(f \oplus g)i_2^X + p_1^Y(f \oplus g)i_2^X + p_2^Y(f \oplus g)i_1^X \\
&= f + 0 + 0 + g \\
&= f + g.
\end{aligned}$$

On arrive à présent à la définition de la catégorie M-stable. On commence par définir les morphismes qu'on veut annuler (et vérifier qu'il s'agit bien d'un idéal) puis on donne la définition.

**Lemme 4.20 — Morphisme M-split.** Pour  $X, X' \in \mathcal{A}$ , on définit

$$M(X, X') = \{f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X'), \quad f \text{ se factorise par un objet M-split de } \mathcal{A}\}.$$

On dit qu'un élément de  $M(X, X')$  est un *morphisme M-split de  $X$  dans  $X'$* . L'ensemble  $M(X, X')$  est un idéal de  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')$ .

**Preuve.** Soient  $X'' \in \mathcal{A}$ ,  $g : X'' \rightarrow X$ ,  $g' : X' \rightarrow X''$  et  $f \in M(X, X')$ . On a évidemment  $g'f \in M(X, X'')$  et  $fg \in M(X'', X')$ .

Montrons à présent que  $M(X, X')$  est un sous-groupe de  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')$ . Soient  $f, g \in M(X, X')$ . D'après le lemme 4.19, on a  $f + g = \nabla_{X'}(f \oplus g)\Delta_X$ . En écrivant  $f = f'f''$  et  $g = g'g''$  où le but de  $f''$  (resp.  $g''$ ) est un objet M-split de  $\mathcal{A}$ , on obtient  $f + g = \nabla_{X'}(f' \oplus g')(f'' \oplus g'')\Delta_X$ . Comme la somme directe d'objets M-split est M-split, on en déduit que  $f + g \in M(X, X')$ . ■

**Proposition-Définition 4.21 — Catégorie M-stable.** On définit la catégorie M-stable  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$  de la façon suivante. Les objets de  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$  sont les objets de  $\mathcal{A}$ . Pour  $X, X' \in \mathcal{A}$ , on pose

$$\text{Hom}_{M\text{Stab}_{\mathcal{A}}}(X, X') = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')/M(X, X').$$

**Preuve.** Comme  $M(X, X')$  est un idéal de  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')$  pour tous  $X, X'$  dans  $\mathcal{A}$ , la loi de composition de  $\mathcal{A}$  passe au quotient et donne une structure de catégorie  $\mathcal{O}$ -linéaire sur  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$ .

## 4.2.2 LEMME DE SCHANUEL

La suite de cette section est consacrée à la démonstration du fait que  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$  est une catégorie triangulée. Dans cette sous-section, on construit, en faisant passer au quotient  $\Omega$  et  $\Omega^{-1}$ , les foncteurs de décalage de la catégorie  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$ . Le résultat central est le lemme de « M-Schanuel » (voir le lemme 4.23) qui permet, pour le calcul de  $\Omega X$ , de remplacer le couple  $(MLX, \eta_X^L)$  par n'importe quel couple  $(P, i)$  avec  $P$  un objet M-split et  $i : X \rightarrow P$  tels qu'il existe  $\beta : LP \rightarrow LX$  tel que  $\beta \bar{L}i = \text{id}_{LX}$ .

**Proposition 4.22 — Décalage.** Les foncteurs  $\Omega$  et  $\Omega^{-1}$  passent au quotient et définissent deux endofoncteurs de la catégorie  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$ .

**Preuve.** Montrons à présent que  $\Omega$  et  $\Omega^{-1}$  passent au quotient. On commence par montrer que si  $X$  est M-split alors  $\Omega X$  et  $\Omega^{-1}X$  le sont aussi. D'après la définition 3.24, les suites exactes

$$0 \longrightarrow \Omega^{-1}(X) \xrightarrow{i_X} MRX \xrightarrow{\varepsilon_X^R} X \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow X \xrightarrow{\eta_X^L} MLX \xrightarrow{\pi_X} \Omega(X) \longrightarrow 0$$

sont scindés. En particulier,  $\Omega^{-1}(X)$  et  $\Omega(X)$  sont facteurs directs respectivement de  $MRX$  et  $MLX$ . Ils sont donc M-split. Considérons à présent  $f \in M(X, X')$  et  $Z$  un objet M-split de  $\mathcal{A}$  tel que  $f$  se factorise par  $Z$ . Par fonctorialité de  $\Omega$  et  $\Omega^{-1}$ , on obtient que  $\Omega(f)$  (resp.  $\Omega^{-1}(f)$ ) se factorise par  $\Omega Z$  (resp.  $\Omega^{-1}(Z)$ ) qui est M-split. Ainsi  $\Omega(f) \in M(\Omega(X), \Omega(X'))$  (resp.  $\Omega^{-1}(f) \in M(\Omega^{-1}(X), \Omega^{-1}(X'))$ ). ■

Dans le reste de cette sous-section, on démontre que les foncteurs  $\Omega$  et  $\Omega^{-1}$  définissent des auto-équivalences de la catégorie  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$  quasi-inverse l'une de l'autre. Cela résulte de façon essentielle du lemme de Schanuel et de ses corollaires (remarques 4.24 et 4.25).

**Lemme 4.23 — Lemme de M-Schanuel.** *Prolongement vers la gauche.* Soient  $X, X'$  deux objets de  $\mathcal{A}$ ,  $P, P'$  deux objets M-split de  $\mathcal{A}$  et  $\pi : P \rightarrow X$ ,  $\pi' : P' \rightarrow X'$  tels qu'il existe  $\beta, \beta'$  vérifiant

$$R\pi \beta = \text{id}_{RX} \quad \text{et} \quad R\pi' \beta' = \text{id}_{RX'}.$$

On pose  $(TX, j_X) = \text{Ker } \pi$  et  $(TX', j_{X'}) = \text{Ker } \pi'$ . Pour  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')$ , il existe  $g : P \rightarrow P'$  et  $h : TX \rightarrow TX'$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & TX & \xrightarrow{j_X} & P & \xrightarrow{\pi} & X \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow h & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 0 & \longrightarrow & TX' & \xrightarrow{j_{X'}} & P' & \xrightarrow{\pi'} & X' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

De plus, l'image de  $h$  dans  $\text{Hom}_{\text{MStab}_{\mathcal{A}}}(TX, TX')$  ne dépend pas du choix  $g$ . De même, pour  $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')$ , on note  $h' : TX \rightarrow TX'$  le morphisme donné par la construction ci-dessus. Si  $f = f'$  dans  $\text{Hom}_{\text{MStab}_{\mathcal{A}}}(X, X')$  alors  $h = h'$  dans  $\text{Hom}_{\text{MStab}_{\mathcal{A}}}(TX, TX')$ .

On a ainsi défini un morphisme de  $\mathcal{O}$ -modules

$$\Phi_{P, P', \pi, \pi'} : \begin{cases} \text{Hom}_{\text{MStab}_{\mathcal{A}}}(X, X') \longrightarrow \text{Hom}_{\text{MStab}_{\mathcal{A}}}(TX, TX') \\ f \longmapsto h. \end{cases}$$

*Prolongement vers la droite.* Soient  $X, X'$  deux objets de  $\mathcal{A}$ ,  $P, P'$  deux objets M-split de  $\mathcal{A}$  et  $i : X \rightarrow P$ ,  $i' : X' \rightarrow P'$  tels qu'il existe  $\beta, \beta'$  vérifiant

$$\beta Li = \text{id}_{LX} \quad \text{et} \quad \beta' Li' = \text{id}_{LX'}.$$

On pose  $(T'X, p_X) = \text{Coker } i$  et  $(T'X', p_{X'}) = \text{Coker } i'$ . Pour tout  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')$ , il existe  $g : P \rightarrow P'$  et  $h : T'X \rightarrow T'X'$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{p_X} & T'X \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\
 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{i'} & P' & \xrightarrow{p_{X'}} & T'X' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

De plus, l'image de  $h$  dans  $\text{Hom}_{\text{MStab}_{\mathcal{A}}}(T'X, T'X')$  ne dépend pas du choix  $g$ . De même, pour  $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')$ , on note  $h' : T'X \rightarrow T'X'$  le morphisme donné par la construction ci-dessus. Si  $f = f'$  dans  $\text{Hom}_{\text{MStab}_{\mathcal{A}}}(X, X')$  alors  $h = h'$  dans  $\text{Hom}_{\text{MStab}_{\mathcal{A}}}(T'X, T'X')$ .

On a ainsi défini un morphisme de  $\mathcal{O}$ -modules

$$\Psi_{P, P', i, i'} : \begin{cases} \text{Hom}_{\text{MStab}_{\mathcal{A}}}(X, X') \longrightarrow \text{Hom}_{\text{MStab}_{\mathcal{A}}}(T'X, T'X') \\ f \longmapsto h. \end{cases}$$

**Preuve.** *Prolongement vers la gauche.* Par hypothèse,  $R\pi$  et  $R\pi'$  sont des rétractions et donc des épimorphismes. La fidélité de  $R$  (hypothèse 4.14) assure que  $\pi$  et  $\pi'$  sont des épimorphismes (voir le lemme 3.35). Les lignes du diagramme suivant sont donc exactes.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & TX & \xrightarrow{j_X} & P & \xrightarrow{\pi} & X \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \downarrow f \\
 0 & \longrightarrow & TX' & \xrightarrow{j_{X'}} & P' & \xrightarrow{\pi'} & X' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Comme  $R\pi'$  admet une section et que  $P$  est M-split, on peut, par relative projectivité, construire  $g$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & TX & \xrightarrow{j_X} & P & \xrightarrow{\pi} & X \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 0 & \longrightarrow & TX' & \xrightarrow{j_{X'}} & P' & \xrightarrow{\pi'} & X' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Comme  $\pi'gj_X = f\pi j_X = 0$ , le morphisme  $gj_X$  se factorise (de façon unique) par  $\text{Ker } \pi'$  pour donner  $h$ .

Supposons à présent qu'on ait le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & TX & \xrightarrow{j_X} & P & \xrightarrow{\pi} & X \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow h' & & \downarrow g' & & \downarrow f \\
 0 & \longrightarrow & TX' & \xrightarrow{j_{X'}} & P' & \xrightarrow{\pi'} & X' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

On a alors  $\pi'(g - g') = (f - f')\pi = 0$ . Ainsi  $g - g'$  se factorise par  $\text{Ker } \pi'$  c'est-à-dire qu'il existe  $u$  tel que  $g - g' = j_X u$ . En composant à droite par  $j_X$ , on en déduit alors que  $j_{X'}(h - h') = j_{X'} u j_X$ . Comme  $j_{X'}$  est un monomorphisme, on obtient que  $h - h' = u j_X$  se factorise par l'objet  $P$  qui est M-split. Ainsi  $h$  et  $h'$  ont bien la même image dans  $\text{Hom}_{\text{MStab}_{\mathcal{A}}}(TX, TX')$ .

On considère à présent  $f', g', h'$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & TX & \xrightarrow{j_X} & P & \xrightarrow{\pi} & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h' & & \downarrow g' & & \downarrow f' \\ 0 & \longrightarrow & TX' & \xrightarrow{j_{X'}} & P' & \xrightarrow{\pi'} & X' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Par hypothèse,  $f - f'$  se factorise par un objet M-split  $P''$  :  $f - f' = vu$  avec  $u : X \rightarrow P''$  et  $v : P'' \rightarrow X'$ . Par relative projectivité de  $P''$ , il existe  $w : P'' \rightarrow P'$  tel que  $v = \pi'w$ . Ainsi  $f - f' = \pi'wu$  se factorise par  $P'$ . En composant à droite par  $\pi$ , on obtient  $\pi'(g - g' - wu\pi) = 0$ . Ainsi  $g - g' - wu\pi$  se factorise par  $\text{Ker } \pi'$  c'est-à-dire qu'il existe  $\delta : P \rightarrow TX'$  tel que  $g - g' - wu\pi = j_X\delta$ . En composant à droite par  $j_X$ , on obtient  $j_X(h - h') = j_X\delta j_X$ . Comme  $j_X$  est un monomorphisme, on obtient  $h - h' = \delta j_X$  et  $h - h'$  se factorise par  $P$  qui est M-split. Finalement  $h$  et  $h'$  ont bien la même image dans  $\text{Hom}_{\text{MStab}_{\mathcal{A}}}(TX, TX')$ .

Enfin, pour  $\lambda, \mu \in \mathcal{O}$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & TX & \xrightarrow{j_X} & P & \xrightarrow{\pi} & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \lambda h + \mu h' & & \downarrow \lambda g + \mu g' & & \downarrow \lambda f + \mu f' \\ 0 & \longrightarrow & TX' & \xrightarrow{j_{X'}} & P' & \xrightarrow{\pi'} & X' \longrightarrow 0 \end{array}$$

est commutatif. On obtient donc que  $\Phi_{P, P', \pi, \pi'}$  est bien un morphisme de  $\mathcal{O}$ -modules.

*Prolongement vers la droite.* Par hypothèse,  $Li$  et  $Li'$  sont des sections et donc des monomorphismes. La fidélité de  $L$  (hypothèse 4.14) assure que  $i$  et  $i'$  sont des monomorphismes (voir le lemme 3.35). Les lignes du diagramme suivant sont donc exactes.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{p_X} & T'X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & & & \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{i'} & P' & \xrightarrow{p_{X'}} & T'X' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Comme  $Li$  admet une rétraction et que  $P'$  est M-split, on peut, par relative injectivité, construire  $g$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{p_X} & T'X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{i'} & P' & \xrightarrow{p_{X'}} & T'X' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Comme  $p_{X'}gi = p_{X'}i'f = 0$ , le morphisme  $p_{X'}g$  se factorise (de façon unique) par  $\text{Coker } i$  pour donner  $h$ .

Supposons à présent qu'on ait le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{p_X} & T'X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g' & & \downarrow h' \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{i'} & P' & \xrightarrow{p_{X'}} & T'X' \longrightarrow 0 \end{array}$$

On a alors  $(g - g')i = i'(f - f) = 0$ . Ainsi  $g - g'$  se factorise par  $\text{Coker } i$  c'est-à-dire qu'il existe  $u$  tel que  $g - g' = up_X$ . En composant à gauche par  $p_{X'}$ , on en déduit alors que  $(h - h')p_X = p_{X'}up_X$ . Comme  $p_X$  est un épimorphisme, on obtient que  $h - h' = p_Xu$  se factorise par l'objet  $P'$  qui est M-split. Ainsi  $h$  et  $h'$  ont bien la même image dans  $\text{Hom}_{\text{MStab}_{\mathcal{A}}}(T'X, T'X')$ .

On considère à présent  $f', g', h'$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{p_X} & T'X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow g' & & \downarrow h' \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{i'} & P' & \xrightarrow{p_{X'}} & T'X' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Par hypothèse,  $f - f'$  se factorise par un objet M-split  $P''$  :  $f - f' = vu$  avec  $u : X \rightarrow P''$  et  $v : P'' \rightarrow X'$ . Par relative injectivité de  $P''$ , il existe  $w : P \rightarrow P''$  tel que  $u = wi$ . Ainsi  $f - f' = vwi$  se factorise par  $P$ . En composant à gauche par  $i'$ , on obtient  $(g - g' - i'vw)i = 0$ . Ainsi  $g - g' - i'vw$  se factorise par  $\text{Coker } i$  c'est-à-dire qu'il existe  $\delta : T'X \rightarrow P'$  tel que  $g - g' - i'vw = \delta p_X$ . En composant à gauche par  $p_{X'}$ , on obtient  $(h - h')p_X = p_{X'}\delta p_X$ .

Comme  $p_X$  est un épimorphisme, on obtient  $h - h' = p_X \delta$  et  $h - h'$  se factorise par  $P'$  qui est M-split. Finalement  $h$  et  $h'$  ont bien la même image dans  $\text{Hom}_{\text{MStab}_{\mathcal{A}}}(T'X, T'X')$ .

Enfin, pour  $\lambda, \mu \in \mathcal{O}$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{p_X} & T'X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \lambda f + \mu f' & & \downarrow \lambda g + \mu g' & & \downarrow \lambda h + \mu h' \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{i'} & P' & \xrightarrow{p_{X'}} & T'X' \longrightarrow 0 \end{array}$$

est commutatif. On obtient donc que  $\Psi_{P, P', i, i'}(f)$  est bien un morphisme de  $\mathcal{O}$ -modules. ■

**Remarque 4.24 – Lemme de M-Schanuel et composition.** Reprenons les notations du lemme 4.23 et considérons  $X''$  un objet de  $\mathcal{A}$ ,  $P''$  un objet M-split et  $\pi'' : P'' \rightarrow X''$  tel qu'il existe  $\beta''$  vérifiant  $R\pi'' \beta'' = \text{id}_{RX''}$ .

Pour  $f : X \rightarrow X'$  et  $f' : X' \rightarrow X''$ , on a

$$\Phi_{P, P'', \pi, \pi''}(f'f) = \Phi_{P', P'', \pi', \pi''}(f')\Phi_{P, P', \pi, \pi'}(f).$$

Cela résulte immédiatement du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & TX & \xrightarrow{j_X} & P & \xrightarrow{\pi} & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow g & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & TX' & \xrightarrow{j_{X'}} & P' & \xrightarrow{\pi'} & X' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h' & & \downarrow g' & & \downarrow f' \\ 0 & \longrightarrow & TX'' & \xrightarrow{j_{X''}} & P'' & \xrightarrow{\pi''} & X'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Par ailleurs, grâce au diagramme commutatif,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & TX & \xrightarrow{j_X} & P & \xrightarrow{\pi} & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id}_{TX} & & \downarrow \text{id}_P & & \downarrow \text{id}_X \\ 0 & \longrightarrow & TX & \xrightarrow{j_X} & P & \xrightarrow{\pi} & X \longrightarrow 0 \end{array}$$

on a  $\Phi_{P, P, \pi, \pi}(\text{id}_X) = \text{id}_{TX}$ .

On en déduit immédiatement que si  $f$  est un isomorphisme dans la catégorie  $\text{MStab}_{\mathcal{A}}$  alors  $\Phi_{P, P', \pi, \pi'}(f)$  aussi. En particulier, la classe d'isomorphisme de  $TX$  dans  $\text{MStab}_{\mathcal{A}}$  ne dépend pas des choix de  $P$  et de  $\pi : P \rightarrow X$  vérifiant  $P$  est M-split et il existe  $\beta : RX \rightarrow RP$  tel que  $R\pi \beta = \text{id}_{RX}$ . En effet, si  $P'$  est un objet M-split et  $\pi' : P' \rightarrow X$  un morphisme tels qu'il existe  $\beta' : RX \rightarrow RP'$  vérifiant  $R\pi' \beta' = \text{id}_{RX}$  alors  $\Phi_{P, P', \pi, \pi'}(\text{id}_X)$  est un isomorphisme dans  $\text{MStab}_{\mathcal{A}}$  d'inverse  $\Phi_{P', P, \pi', \pi}(\text{id}_X)$ .

Toujours avec les notations du lemme 4.23, considérons  $X'' \in \mathcal{A}$ ,  $P''$  un objet M-split et  $i'' : X'' \rightarrow P''$  tel qu'il existe  $\beta''$  vérifiant  $\beta'' \text{id}_{X''} = \text{id}_{RX''}$ . Pour  $f : X \rightarrow X'$  et  $f' : X' \rightarrow X''$ , on a

$$\Psi_{P, P'', i, i''}(f'f) = \Psi_{P', P'', i', i''}(f')\Psi_{P, P', i, i'}(f)$$

Cela résulte immédiatement du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{p_X} & T'X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{i'} & P' & \xrightarrow{p_{X'}} & T'X' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow g' & & \downarrow h' \\ 0 & \longrightarrow & X'' & \xrightarrow{i''} & P'' & \xrightarrow{p_{X''}} & T'X'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Par ailleurs, grâce au diagramme commutatif,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{p_X} & T'X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id}_X & & \downarrow \text{id}_P & & \downarrow \text{id}_{T'X} \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{p_X} & T'X \longrightarrow 0 \end{array}$$

on a  $\Phi_{P, P, i, i}(\text{id}_X) = \text{id}_{T'X}$ .

On en déduit immédiatement que si  $f$  est un isomorphisme dans la catégorie  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$  alors  $\Psi_{P,P',i,i'}(f)$  aussi. En particulier, la classe d'isomorphisme de  $T'X$  dans  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$  ne dépend pas des choix de  $P$  et de  $i : X \rightarrow P$  vérifiant  $P$  est  $M$ -split et il existe  $\beta : LP \rightarrow LX$  tel que  $\beta Li = \text{id}_{LX}$ . En effet, si  $P'$  est un objet  $M$ -split et  $i' : X \rightarrow P'$  un morphisme tels qu'il existe  $\beta' : LP' \rightarrow LX$  vérifiant  $\beta' Li' = \text{id}_{LX}$  alors  $\Psi_{P,P',i,i'}(\text{id}_X)$  est un isomorphisme dans  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$ .  $\blacksquare$

**Remarque 4.25 — Lemme de M-Schanuel et bijection.** Reprenons une nouvelle fois les notations du lemme 4.23. Par hypothèse, les suites exactes

$$0 \longrightarrow TX \xrightarrow{j_X} P \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow TX' \xrightarrow{j_{X'}} P' \xrightarrow{\pi'} X' \longrightarrow 0$$

sont  $R$ -scindées. D'après les hypothèses 4.14, elles sont aussi  $L$ -scindées. On peut donc définir  $\Psi_{P,P',j_X,j_{X'}}$  et on a bien sûr

$$\Phi_{P,P',j_X,j_{X'}} \Phi_{P,P',\pi,\pi'} = \text{id}_{\text{Hom}_{M\text{Stab}_{\mathcal{A}}}(X,X')} \quad \text{et} \quad \Phi_{P,P',\pi,\pi'} \Psi_{P,P',j_X,j_{X'}} = \text{id}_{\text{Hom}_{M\text{Stab}_{\mathcal{A}}}(TX,TX')}.$$

En particulier,  $\Phi_{P,P',\pi,\pi'}$  est bijective.

De même, les suites exactes

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p_X} T'X \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow X' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{p_{X'}} T'X' \longrightarrow 0$$

sont  $L$ -scindées. D'après les hypothèses 4.14, elles sont aussi  $R$ -scindées. On peut donc définir  $\Phi_{P,P',p_X,p_{X'}}$  et on a bien sûr

$$\Phi_{P,P',p_X,p_{X'}} \Psi_{P,P',i,i'} = \text{id}_{\text{Hom}_{M\text{Stab}_{\mathcal{A}}}(X,X')} \quad \text{et} \quad \Psi_{P,P',i,i'} \Phi_{P,P',p_X,p_{X'}} = \text{id}_{\text{Hom}_{M\text{Stab}_{\mathcal{A}}}(T'X,T'X')}.$$

En particulier,  $\Psi_{P,P',i,i'}$  est bijective.  $\blacksquare$

On peut à présent démontrer le résultat souhaité sur  $\Omega$  et  $\Omega^{-1}$ .

**Proposition 4.26 — Décalage.** Les foncteurs  $\Omega$  et  $\Omega^{-1}$  sont des auto-équivalences  $\mathcal{O}$ -linéaires de la catégorie  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$  quasi-inverse l'une de l'autre.

**Preuve.** Par construction et grâce au corollaire 3.11, on a  $\Omega = \Psi_{MLX,MLX',\eta_X^L,\eta_{X'}^L}$  et  $\Omega^{-1} = \Phi_{MRX,MRX',\varepsilon_X^R,\varepsilon_{X'}^R}$ . La remarque 4.25 assure alors que  $\Omega$  et  $\Omega^{-1}$  sont pleinement fidèles.

Par définition de  $\Omega$  et  $\Omega^{-1}$ , on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^{-1}X & \xrightarrow{i_X} & MRX & \xrightarrow{\varepsilon_X^L} & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id}_{\Omega^{-1}X} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{-1}X & \xrightarrow{\eta_{\Omega^{-1}X}^L} & ML\Omega^{-1}X & \xrightarrow{\pi_{\Omega^{-1}X}} & \Omega\Omega^{-1}X \longrightarrow 0 \end{array}$$

Or, encore grâce au corollaire 3.11, la suite du haut est  $R$ -scindé et donc  $L$ -scindé d'après les hypothèses 4.14. De plus, toujours grâce au corollaire 3.11, la suite du bas est  $L$ -scindé. Grâce au lemme 4.23 de Schanuel, on peut compléter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^{-1}X & \xrightarrow{i_X} & MRX & \xrightarrow{\varepsilon_X^L} & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id}_{\Omega^{-1}X} & & \downarrow & & \downarrow \alpha_X \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{-1}X & \xrightarrow{\eta_{\Omega^{-1}X}^L} & ML\Omega^{-1}X & \xrightarrow{\pi_{\Omega^{-1}X}} & \Omega\Omega^{-1}X \longrightarrow 0 \end{array}$$

Montrons que  $\alpha = (\alpha_X)_{X \in \mathcal{A}}$  est une transformation naturelle entre  $\text{id}_{M\text{Stab}_{\mathcal{A}}}$  et  $\Omega\Omega^{-1}$ . Considérons donc  $X' \in \mathcal{A}$  et  $f : X \rightarrow X'$ . Par définition, on a

$$\Omega\Omega^{-1}(f) \alpha_X = \Psi_{ML\Omega^{-1}X,ML\Omega^{-1}X',\eta_{\Omega^{-1}(X)}^L,\eta_{\Omega^{-1}(X')}^L}(\Omega^{-1}(f)) \Psi_{MRX,ML\Omega^{-1}X,i_X,\eta_{\Omega^{-1}(X)}^L}(\text{id}_{\Omega^{-1}X}).$$

On en déduit alors, grâce à la remarque 4.24 que

$$\Omega\Omega^{-1}(f) \alpha_X = \Psi_{MRX,ML\Omega^{-1}X',i_X,\eta_{\Omega^{-1}(X')}^L}(\Omega^{-1}(f)).$$

Par ailleurs, grâce à la remarque 4.25, on a  $f = \Psi_{MRX,MRX',i_X,i_{X'}}(\Omega^{-1}(f))$ . La remarque 4.24 donne alors

$$\alpha_{X'} f = \Psi_{MRX,ML\Omega^{-1}X',i_X,\eta_{\Omega^{-1}(X')}^L}(\Omega^{-1}(f))$$

ce qui donne la naturalité de  $\alpha$ . De plus, grâce à la remarque 4.25,  $\alpha_X$  est un isomorphisme. Ainsi  $\Omega$  est essentiellement surjectif et  $\Omega\Omega^{-1} \simeq \text{id}_{M\text{Stab}_{\mathcal{A}}}$ .

Passons à l'étude de  $\Omega^{-1}\Omega$ . Par définition de  $\Omega$  et  $\Omega^{-1}$ , on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\eta_X^L} & \text{MLX} & \xrightarrow{\pi_X} & \Omega X \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \downarrow \text{id}_{\Omega X} \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^{-1}\Omega X & \xrightarrow{i_{\Omega X}} & \text{MR}\Omega X & \xrightarrow{\varepsilon_{\Omega X}^R} & \Omega X \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Or, d'après le corollaire 3.11, la suite du haut est L-scindé et donc R-scindé d'après les hypothèses 4.14. De plus, toujours grâce au corollaire 3.11, la suite du bas est R-scindé. Grâce au lemme 4.23 de Schanuel, on peut compléter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\eta_X^L} & \text{MLX} & \xrightarrow{\pi_X} & \Omega X \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \gamma_X & & \downarrow & & & \downarrow \text{id}_{\Omega X} \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^{-1}\Omega X & \xrightarrow{i_{\Omega X}} & \text{MR}\Omega X & \xrightarrow{\varepsilon_{\Omega X}^R} & \Omega X \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Montrons que  $\gamma = (\gamma_X)_{X \in \mathcal{A}}$  est une transformation naturelle entre  $\text{id}_{\text{MStab}_{\mathcal{A}}}$  et  $\Omega^{-1}\Omega$ . Considérons donc  $X' \in \mathcal{A}$  et  $f : X \rightarrow X'$ . Par définition, on a

$$\Omega^{-1}\Omega(f) \gamma_X = \Phi_{\text{MR}\Omega X, \text{MR}\Omega X', \varepsilon_{\Omega X}^R, \varepsilon_{\Omega X'}^R}(\Omega(f)) \Phi_{\text{MLX}, \text{MR}\Omega X, \pi_X, \varepsilon_{\Omega X}^R}(\text{id}_{\Omega X}).$$

La remarque 4.24 donne alors  $\Omega^{-1}\Omega(f) \alpha_X = \Phi_{\text{MLX}, \text{MR}\Omega X', \pi_X, \varepsilon_{\Omega X'}^R}(\Omega(f))$ .

Par ailleurs, d'après la remarque 4.25,  $f = \Phi_{\text{MLX}, \text{MLX}', \pi_X, \pi_{X'}}(\Omega(f))$ . On en déduit, grâce à la remarque 4.24, que

$$\gamma_{X'} f = \Phi_{\text{MLX}, \text{MR}\Omega X', \pi_X, \varepsilon_{\Omega X'}^R}(\Omega(f))$$

ce qui donne la naturalité de  $\gamma$ . De plus, grâce à la remarque 4.25,  $\gamma_X$  est un isomorphisme donc  $\Omega^{-1}\Omega$  est essentiellement surjectif et  $\Omega^{-1}\Omega \simeq \text{id}_{\text{MStab}_{\mathcal{A}}}$ . On obtient bien la proposition-définition 4.26. ■

### 4.2.3 STRUCTURE TRIANGULÉE

Dans cette sous-section, on définit les triangles de la catégorie  $\text{MStab}_{\mathcal{A}}$  puis on démontre que  $\text{MStab}_{\mathcal{A}}$  est une catégorie triangulée.

**Définition 4.27 – Triangle standard.** Soient  $X, X' \in \mathcal{A}$  et  $f : X \rightarrow X'$ . On considère  $Z = X' \underset{f}{\oplus}_{\eta_X^L} \text{MLX}$  la somme amalgamée  $X'$  et  $\text{MLX}$  au-dessus  $f$  et  $\eta_X^L$  (voir l'exemple 3.29). On note  $g_{X'} : X' \rightarrow Z$  et  $u_X : \text{MLX} \rightarrow Z$  les morphismes donnant la structure de somme amalgamée. On considère le morphisme  $0 : X' \rightarrow \Omega X$ . Comme  $0 \circ f = 0$  et  $\pi_X \eta_X^L = 0$ , il existe  $h : Z \rightarrow \Omega X$  tel que  $h g_{X'} = 0$  et  $h u_X = \pi_X$ . On en déduit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\eta_X^L} & \text{MLX} & \xrightarrow{\pi_X} & \Omega X \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow u_X & & \parallel \\
 X' & \xrightarrow{g_{X'}} & Z & \xrightarrow{h} & \Omega X & & 
 \end{array}$$

On dit que  $X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{g_{X'}} Z \xrightarrow{h} \Omega X$  est un *triangle standard de base f dans  $\mathcal{A}$* . L'image de ce triangle dans  $\text{MStab}_{\mathcal{A}}$  est appelé *triangle standard de base f dans  $\text{MStab}_{\mathcal{A}}$* . Un triangle  $T$  de  $\mathcal{A}$  (resp.  $\text{MStab}_{\mathcal{A}}$ ) est dit *standard* s'il existe  $f$  tel que  $T$  soit un triangle standard de base  $f$  dans  $\mathcal{A}$  (resp.  $\text{MStab}_{\mathcal{A}}$ ). On note  $\mathcal{T}$  l'ensemble des triangles de  $\text{MStab}_{\mathcal{A}}$  qui sont isomorphes dans  $\text{MStab}_{\mathcal{A}}$  à *triangle standard*.

**Remarque 4.28 – Triangle standard et suite exacte.** On reprend les notations de la définition 4.27. Montrons que la suite  $0 \longrightarrow X' \xrightarrow{g_{X'}} Z \xrightarrow{h} \Omega X \longrightarrow 0$  est exacte. La fidélité de  $L$  (hypothèse 4.14) assure que  $\eta_X^L$  est un monomorphisme (voir le corollaire 3.16). Grâce à la proposition 3.33, on en déduit que  $g_{X'}$  est un monomorphisme. De plus, la construction de  $h$  suit exactement la construction du conoyau de  $g_{X'}$  à partir de celui de  $\eta_X^L$  de la preuve de la proposition 3.33. Ainsi  $h$  est le conoyau de  $g_{X'}$ . ■

**Proposition 4.29 – Catégorie triangulée.** La catégorie  $(\text{MStab}_{\mathcal{A}}, \Omega, \mathcal{T})$  est  $\mathcal{O}$ -triangulée.

**Preuve.** Par construction,  $\text{MStab}_{\mathcal{A}}$  est  $\mathcal{O}$ -linéaire,  $\Omega$  une auto-équivalence de catégorie  $\mathcal{O}$ -linéaire et  $\mathcal{T}$  une famille de triangles de  $\text{MStab}_{\mathcal{A}}$ . Il s'agit de vérifier les axiomes T1 à T6 de la définition 3.39.

*Axiome T1.* Par définition de  $\mathcal{T}$  et transitivité de la relation d'isomorphie des triangles, l'axiome T1 est vérifié.

*Axiome T2.* D'après l'exemple 3.28,  $(MLX, \text{id}_{MLX}, \eta_X^L)$  est la somme amalgamée de  $MLX$  et  $X$  au-dessus de  $\text{id}_X$  et  $\eta_X^L$ . Par unicité de  $h$  (voir la construction de  $h$  ci-dessus), on a donc le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\eta_X^L} & MLX & \xrightarrow{\pi_X} & \Omega X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id}_X & & \downarrow \text{id}_{MLX} & & \parallel \\ & & X & \xrightarrow{\eta_X^L} & MLX & \xrightarrow{h=\pi_X} & \Omega X \end{array}$$

Ainsi  $X \xrightarrow{\text{id}_X} X \xrightarrow{\eta_X^L} MLX \xrightarrow{\pi_X} \Omega X$  est un triangle standard de base  $\text{id}_X$  dans  $\mathcal{A}$ . Comme  $MLX, \eta_X^L$  et  $\pi_X$  sont nuls dans  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$ , on obtient l'axiome T2.

*Axiome T3.* Tout  $f \in \text{Hom}_{M\text{Stab}_{\mathcal{A}}}(X, X')$  se relève en un morphisme de  $\tilde{f} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')$ . Il ne reste plus qu'à considérer l'image d'un triangle standard de base  $\tilde{f}$  dans  $\mathcal{A}$ .

*Axiome T4.* Considérons un triangle standard. On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\eta_X^L} & MLX & \xrightarrow{\pi_X} & \Omega X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow u_X & & \parallel \\ & & Y & \xrightarrow{g_Y} & Z & \xrightarrow{h} & \Omega X \end{array}$$

où  $Z$  est la somme amalgamée de  $Y$  et  $MLX$  au-dessus de  $f$  et  $\eta_X^L$ . On considère alors  $\eta_Y^L : Y \rightarrow MLY$  et  $MLf : MLX \rightarrow MLY$ . Comme  $\eta_Y^L f = MLf \eta_X^L$ , on en déduit, par la propriété universelle de la somme amalgamée, l'existence de  $\varphi : Z \rightarrow MLY$  (unique) telle que  $\varphi u_X = MLf$  et  $\varphi g_Y = \eta_Y^L$ . On considère la somme directe  $MLY \oplus \Omega X$ . On note  $i_1 : MLY \rightarrow MLY \oplus \Omega X$ ,  $i_2 : \Omega X \rightarrow MLY \oplus \Omega X$ ,  $p_1 : MLY \oplus \Omega X \rightarrow MLY$  et  $p_2 : MLY \oplus \Omega X \rightarrow \Omega X$  les morphismes donnant la structure de somme directe. On pose alors  $(\varphi, h) : Z \rightarrow MLY \oplus \Omega X$  l'unique morphisme tel que  $p_1(\varphi, h) = \varphi$  et  $p_2(\varphi, h) = h$ . Montrons que  $(MLY \oplus \Omega X, i_1, (\varphi, h))$  est la somme amalgamée de  $MLY$  et  $Z$  au-dessus  $\eta_Y^L$  et  $g_Y$ . Tout d'abord, on a bien  $(\varphi, h)g_Y = (\varphi g_Y, hg_Y)$ . Par construction de  $h$  et  $\varphi$ , on a donc  $(\varphi, h)g_Y = (\eta_Y^L, 0) = i_1 \eta_Y^L$ . Considérons à présent un objet  $Z'$  de  $\mathcal{A}$  et  $\alpha : Z \rightarrow Z'$  et  $\beta : MLY \rightarrow Z'$  tel que  $\beta \eta_Y^L = \alpha g_Y$ . On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\eta_Y^L} & MLY & & \\ \downarrow g_Y & \lceil \begin{matrix} \varphi \\ h \end{matrix} \rceil & \downarrow i_1 & \searrow \beta & \\ Z & \xrightarrow{\alpha} & MLY \oplus \Omega X & \xrightarrow{\gamma?} & Z' \\ \searrow \beta & & \nearrow \alpha & & \\ & & Z' & & \end{array}$$

Il s'agit de montrer que le système d'inconnue  $\gamma : MLY \oplus \Omega X \rightarrow Z'$

$$\begin{cases} \gamma(\varphi, h) = \alpha \\ \gamma i_1 = \beta \end{cases}$$

a une unique solution. En décomposant  $\gamma = (\varepsilon, \delta)$  tel que  $\gamma i_1 = \varepsilon$  et  $\gamma h = \delta$ , le système se réécrit

$$\begin{cases} \varepsilon \varphi + \delta h = \alpha \\ \varepsilon = \beta \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de la solution de ce dernier système est équivalente à l'existence et l'unicité de la solution de l'équation  $\beta \varphi + \delta h = \alpha$ . Comme  $Z$  est la somme amalgamée de  $Y$  et  $MLX$  au-dessus de  $f$  et  $\eta_X^L$ , cette équation est équivalente au système

$$\begin{cases} (\beta \varphi + \delta h)u_X = \alpha u_X \\ (\beta \varphi + \delta h)g_Y = \alpha g_Y \end{cases}$$

qui est lui-même équivalent au système

$$\begin{cases} \beta MLY + \delta \Omega X = \alpha u_X \\ \beta \eta_Y^L + \delta hg_Y = \alpha g_Y \end{cases}$$

Comme  $hg_Y = 0$  (par construction de  $h$ ), le système précédent est équivalent à l'équation  $\delta \pi_X = \alpha u_X - \beta MLY$ . Comme  $\pi_X$  est le conoyau de  $\eta_X^L$ , l'existence et l'unicité d'une solution  $\delta$  à l'équation précédente est équivalente au fait que  $(\alpha u_X - \beta MLY)\eta_X^L = 0$ . Or  $(\alpha u_X - \beta MLY)\eta_X^L = \alpha g_Y - \beta \eta_Y^L = 0$  ce qui assure que  $(MLY \oplus \Omega X, i_1, (\varphi, h))$  est la somme amalgamée de  $MLY$  et  $\Omega X$  au-dessus  $\eta_Y^L$  et  $g_Y$ .

Finalement, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{\eta_Y^L} & MLY & \xrightarrow{\pi_Y} & \Omega Y \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow g_Y & \left[ \begin{smallmatrix} \varphi \\ h \end{smallmatrix} \right] & \downarrow i_1 & & \parallel \\
& & Z & \longrightarrow & MLY \oplus \Omega X & \xrightarrow{\left[ \begin{smallmatrix} \pi_Y & -\Omega f \end{smallmatrix} \right]} & \Omega Y
\end{array}$$

$$\text{et pour montrer que } Y \xrightarrow{g_Y} Z \xrightarrow{\left[ \begin{smallmatrix} \varphi \\ h \end{smallmatrix} \right]} MLY \oplus \Omega X \xrightarrow{\left[ \begin{smallmatrix} \pi_Y & -\Omega f \end{smallmatrix} \right]} \Omega Y$$

est un triangle standard de base  $g_Y$ , il suffit de vérifier que  $\pi_Y \varphi - \Omega f h = 0$ . Or on a  $(\pi_Y \varphi - \Omega f h)g_Y = \pi_Y \eta_Y = 0$  et  $(\pi_Y \varphi - \Omega f h)u_X = \pi_Y MLY - \Omega f \pi_X = 0$  ce qui donne le résultat. Comme  $MLY$  est un objet M-split, l'image de ce triangle standard dans  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$  est  $Y \xrightarrow{g_Y} Z \xrightarrow{h} \Omega X \xrightarrow{-\Omega f} \Omega Y$  ce qui donne le résultat souhaité.

Considérons à présent un triangle distingué  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Omega X$ . Par définition des triangles distingués, il existe un triangle standard  $X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{g_1} Z_1 \xrightarrow{h_1} \Omega X_1$  et des isomorphismes  $u_1, v_1, w_1$  qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Omega X \\
\downarrow u_1 & & \downarrow v_1 & & \downarrow w_1 & & \downarrow \Omega u_1 \\
X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z_1 & \xrightarrow{h_1} & \Omega X_1
\end{array}$$

On en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Omega X & \xrightarrow{-\Omega f} & \Omega Y \\
\downarrow v_1 & & \downarrow w_1 & & \downarrow \Omega u_1 & & \downarrow \Omega v_1 \\
Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z_1 & \xrightarrow{h_1} & \Omega X_1 & \xrightarrow{-\Omega f_1} & \Omega Y_1
\end{array}$$

où  $v_1, w_1, \Omega u_1$  sont des isomorphismes. Or, d'après la première partie de la démonstration, la ligne du bas est un triangle distingué donc la ligne du haut aussi.

*Axiome T5.* Commençons par considérer deux triangles standards dans  $\mathcal{A}$  : on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
0 \longrightarrow X \xrightarrow{\eta_X^L} MLY \xrightarrow{\pi_X} \Omega X \longrightarrow 0 & \text{et} & 0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\eta_{X'}^L} MLY' \xrightarrow{\pi_{X'}} \Omega X' \longrightarrow 0 \\
\downarrow f & \downarrow u_X & \downarrow \parallel \\
Y \xrightarrow{g_Y} Z \xrightarrow{h} \Omega X & & Y' \xrightarrow{g_{Y'}} Z' \xrightarrow{h'} \Omega X'
\end{array}$$

où  $Z$  (resp.  $Z'$ ) est la somme amalgamée de  $Y$  et  $MLY$  (resp.  $Y'$  et  $MLY'$ ) au-dessus de  $f$  et  $\eta_X^L$  (resp.  $f'$  et  $\eta_{X'}^L$ ). On considère aussi  $u : X \rightarrow X'$  et  $v : Y \rightarrow Y'$  tels que  $f'u = vf$  dans  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$ . Par définition, il existe  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $vf - f'u = \beta\alpha$  où le but de  $\alpha$  est un objet M-split  $P$ . On a donc le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\eta_X^L} & MLY \\
\downarrow \alpha & & \\
P & & 
\end{array}$$

Le corollaire 3.11 montre que  $L\eta_X^L$  admet une rétraction. Ainsi, par relative injectivité de  $P$ , on obtient l'existence de  $\gamma : MLY \rightarrow P$  tel que  $\alpha = \gamma\eta_X^L$ . On pose alors  $\delta = \beta\gamma$  de sorte que  $vf - f'u = \delta\eta_X^L$ . On considère alors  $g_{Y'}v : Y \rightarrow Z'$  et  $u_X MLY + g_{Y'}\delta : MLY \rightarrow Z'$ . On a donc

$$(u_X MLY + g_{Y'}\delta)\eta_X^L = u_X\eta_X^L u + g_{Y'}\beta\alpha = g_{Y'}(f'u + \beta\alpha) = (g_{Y'}v)f$$

Par définition de  $Z$ , il existe alors  $w : Z \rightarrow Z'$  tel que  $g_Yv = wg_Y$  et  $u_X MLY + g_{Y'}\delta = wu_X$ . En particulier dans  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$ , on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g_Y} & Z & \xrightarrow{h} & \Omega X \\
\downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\
X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g_{Y'}} & Z' & \xrightarrow{h'} & \Omega X'
\end{array}$$

Or  $h'w u_X = h' u_X MLY + h' g_{Y'}\delta = \pi_{X'} MLY = \Omega(u)\pi_X = \Omega(u)h u_X$  et  $h'w g_Y = h' g_{Y'}v = 0 = \Omega(u)h g_Y$ , on obtient donc le diagramme commutatif dans  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g_Y} & Z & \xrightarrow{h} & \Omega X \\
 \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow \Omega u \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g_{Y'}} & Z' & \xrightarrow{h'} & \Omega X'
 \end{array}$$

On a traité le cas des triangles standards. On considère à présent deux triangles distingués quelconques  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Omega X$  et  $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} \Omega X'$  et  $u : X \rightarrow X'$ ,  $v : Y \rightarrow Y'$  tel que  $f'u = vf$ . Par définition des triangles distingués, il existe deux triangles standards  $X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{g_1} Z_1 \xrightarrow{h_1} \Omega X_1$  et  $X'_1 \xrightarrow{f'_1} Y'_1 \xrightarrow{g'_1} Z'_1 \xrightarrow{h'_1} \Omega X'_1$  et des isomorphismes  $u_1, v_1, w_1$  et  $u'_1, v'_1, w'_1$  qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Omega X \\
 u_1 \downarrow & & v_1 \downarrow & & w_1 \downarrow & & \Omega u_1 \downarrow \\
 X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z_1 & \xrightarrow{h_1} & \Omega X_1 \\
 \alpha = u'^{-1} u u_1^{-1} \downarrow & & \beta = v'^{-1} v v_1^{-1} \downarrow & & & & \\
 X'_1 & \xrightarrow{f'_1} & Y'_1 & \xrightarrow{g'_1} & Z'_1 & \xrightarrow{h'_1} & \Omega X'_1 \\
 u'_1 \downarrow & & v'_1 \downarrow & & w'_1 \downarrow & & \Omega u'_1 \downarrow \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & \Omega X'
 \end{array}$$

La première partie de la démonstration donne alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Omega X \\
 u_1 \downarrow & & v_1 \downarrow & & w_1 \downarrow & & \Omega u_1 \downarrow \\
 X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z_1 & \xrightarrow{h_1} & \Omega X_1 \\
 \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \Omega \alpha \downarrow \\
 X'_1 & \xrightarrow{f'_1} & Y'_1 & \xrightarrow{g'_1} & Z'_1 & \xrightarrow{h'_1} & \Omega X'_1 \\
 u'_1 \downarrow & & v'_1 \downarrow & & w'_1 \downarrow & & \Omega u'_1 \downarrow \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & \Omega X'
 \end{array}$$

et l'axiome T5 est vérifié. On en déduit que  $\text{MStab}_{\mathcal{A}}$  est  $\mathcal{O}$ -prétriangulée.

*Axiome T6.* Commençons par le cas des triangles standards. On considère trois triangles standards de  $\mathcal{A}$  : on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
 0 \longrightarrow X \xrightarrow{\eta_X^L} \text{MLX} \xrightarrow{\pi_X} \Omega X \longrightarrow 0 & & 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\eta_Y^L} \text{MLY} \xrightarrow{\pi_Y} \Omega Y \longrightarrow 0 \\
 f \downarrow & & g \downarrow \\
 Y \xrightarrow{i} Z' \xrightarrow{i''} \Omega X & & Z \xrightarrow{j} X' \xrightarrow{j'} \Omega Y
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 0 \longrightarrow X \xrightarrow{\eta_X^L} \text{MLX} \xrightarrow{\pi_X} \Omega X \longrightarrow 0 & & \\
 g \downarrow & & \\
 Z \xrightarrow{k} Y' \xrightarrow{k'} \Omega X & &
 \end{array}$$

où  $Z'$  (resp.  $X'$ ,  $Y'$ ) est la somme amalgamée de  $Y$  et  $\text{MLX}$  (resp.  $Z$  et  $\text{MLY}$ ,  $Z$  et  $\text{MLX}$ ) au-dessus de  $f$  et  $\eta_X^L$  (resp.  $g$  et  $\eta_Y^L$ ,  $gf$  et  $\eta_X^L$ ). Par la propriété universelle de la somme amalgamée, on peut construire  $\alpha : Z' \rightarrow Y'$  vérifiant

$$\begin{cases} \alpha i = kg \\ \alpha u_X = v_X \end{cases}$$

puisque  $(kg)f = v_X \eta_X^L$ . De plus, par définition de  $\alpha$ , on a  $k'\alpha = i'$  puisque

$$\begin{cases} k'\alpha i = k'kg = 0 = i'i \\ k'\alpha u_X = k'v_X = \pi_X = i'u_X. \end{cases}$$

Par ailleurs, d'après la remarque 4.28,  $i$  est un monomorphisme, on peut donc compléter le morphisme  $\eta_{Z'}^L i : Y \rightarrow \text{MLZ}'$  en une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\eta_{Z'}^L i} \text{MLZ}' \xrightarrow{p_Y} TY \longrightarrow 0$$

On considère alors  $(X'_1, j_1, v_Y)$  la somme amalgamée de  $Z$  et  $\text{MLZ}'$  au-dessus de  $g$  et  $\eta_{Z'}^L i$ . On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{\eta_{Z'}^L i} & \text{MLZ}' & \xrightarrow{p_Y} & TY \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow v_Y & & \\ & & Z & \xrightarrow{j_1} & X'_1 & & \end{array}$$

qu'on complète, grâce à la propriété universelle de la somme amalgamée, avec  $j'_1 : X'_1 \rightarrow TY$  qui est l'unique morphisme vérifiant  $j'_1 j_1 = 0$  et  $j'_1 v_Y = p_Y$  (on a bien  $0 \circ g = 0 = p_Y \circ \eta_{Z'}^L i$ ) en le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{\eta_{Z'}^L i} & \text{MLZ}' & \xrightarrow{p_Y} & TY \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow v_Y & & \\ & & Z & \xrightarrow{j_1} & X'_1 & \xrightarrow{j'_1} & TY \\ & & & & & & \parallel \end{array}$$

Par la propriété universelle de la somme amalgamée, on peut alors définir  $\beta : Y' \rightarrow X'_1$  vérifiant

$$\begin{cases} \beta k = j_1 \\ \beta v_X = v_Y \eta_{Z'}^L u_X \end{cases}$$

car  $j_1 g f = v_Y \eta_{Z'}^L i f = v_Y \eta_{Z'}^L u_X \eta_X^L$ .

On va définir à présent  $Tf : \Omega X \rightarrow TY$  et  $Ti : TY \rightarrow \Omega Z'$  grâce au fait que  $\pi_X$  (resp.  $p_Y$ ) est le conoyau de  $\eta_X^L$  (resp.  $\eta_{Z'}^L i$ ) et aux diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\eta_X^L} & \text{MLX} & \xrightarrow{\pi_X} & \Omega X & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow \eta_{Z'}^L u_X & & \downarrow Tf & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{\eta_{Z'}^L i} & \text{MLZ}' & \xrightarrow{p_Y} & TY & \longrightarrow 0 \end{array} & \text{et} & \begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{\eta_{Z'}^L i} & \text{MLZ}' & \xrightarrow{p_Y} & TY & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i & & \parallel & & \downarrow Ti & \\ 0 & \longrightarrow & Z' & \xrightarrow{\eta_{Z'}^L} & \text{MLZ}' & \xrightarrow{\pi_{Z'}} & \Omega Z' & \longrightarrow 0 \end{array} \end{array}$$

Finalement, en posant  $\gamma = Ti j'_1$ , on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i} & Z' & \xrightarrow{i'} & \Omega X \\ \parallel & & \downarrow g & & \downarrow \alpha & & \parallel \\ X & \xrightarrow{gf} & Z & \xrightarrow{k} & Y' & \xrightarrow{k'} & \Omega X \\ \downarrow f & & \parallel & & \downarrow \beta & & \downarrow Tf \\ Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{j_1} & X'_1 & \xrightarrow{j'_1} & TY \\ \downarrow i & & \downarrow k & & \parallel & & \downarrow Ti \\ Z' & \xrightarrow{\alpha} & Y' & \xrightarrow{\beta} & X'_1 & \xrightarrow{\gamma} & \Omega Z' \end{array}$$

puisque

$$\begin{cases} j'_1 \beta k = j'_1 j_1 = 0 = Tfk'k \\ j'_1 \beta v_X = j'_1 v_Y \eta_{Z'}^L u_X = p_Y \eta_{Z'}^L u_X = Tf \pi_X = Tf k' v_X. \end{cases}$$

Montrons à présent que  $Z' \xrightarrow{\alpha} Y' \xrightarrow{\beta} X'_1 \xrightarrow{\gamma} \Omega Z'$  est un triangle standard. Il s'agit donc de vérifier que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z' & \xrightarrow{\eta_{Z'}^L} & \text{MLZ}' & \xrightarrow{\pi_{Z'}} & \Omega Z' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow v_Y & & \parallel \\ Y' & \xrightarrow{\beta} & X'_1 & \xrightarrow{\gamma} & \Omega Z' & & \end{array}$$

que  $\gamma \beta = 0$  et que  $X'_1$  est la somme amalgamée de  $Y'$  et  $\text{MLZ}'$  au-dessus de  $\eta_{Z'}^L$  et  $\alpha$ . Or on a

$$\begin{cases} \beta \alpha i = \beta k g = j_1 g = v_Y \eta_{Z'}^L i \\ \beta \alpha u_X = \beta v_X = v_Y \eta_{Z'}^L u_X \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \gamma \beta k = Tij'_1 j_1 = 0 \\ \gamma \beta v_X = Tij'_1 v_Y \eta_{Z'}^L u_X = Tip_Y \eta_{Z'}^L u_X = \pi_{Z'} \eta_{Z'}^L u_X = 0 = 0 v_X. \end{cases}$$

Il reste à démontrer que  $X'_1$  est la somme amalgamée de  $Y'$  et  $\text{MLZ}'$  au-dessus de  $\eta_{Z'}^L$ , et  $\alpha$  : étant donné un objet  $W$  de  $\mathcal{A}$  et  $\delta : Y' \rightarrow W$  et  $\varepsilon : \text{MLZ}' \rightarrow W$  deux morphismes vérifiant  $\varepsilon \eta_{Z'}^L = \delta \alpha$ , le système suivant d'inconnue  $\theta : X'_1 \rightarrow W$

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \theta\beta = \delta \\ \theta v_X = \varepsilon \end{cases}$$

admet-il une unique solution ?

Comme  $(Y', k, v_X)$  est la somme amalgamée de  $Z$  et  $MLX$  au-dessus de  $gf$  et  $\eta_X^L$ , le système  $(\mathcal{S})$  est équivalent au système

$$\begin{cases} \theta\beta k = \delta k \\ \theta\beta v_X = \delta v_X \\ \theta v_Y = \varepsilon. \end{cases}$$

Or on a  $\theta\beta v_X = \theta v_Y \eta_{Z'}^L u_X = \varepsilon \eta_{Z'}^L u_X = \delta \alpha u_X = \delta v_X$  et  $\beta k = j_1$ . Ainsi  $(\mathcal{S})$  est équivalent au système

$$\begin{cases} \theta j_1 = \delta k \\ \theta v_Y = \varepsilon. \end{cases}$$

qui admet une unique solution puisque  $(X'_1, j_1, v_Y)$  est la somme amalgamée de  $Z$  et  $MLZ'$  au-dessus de  $\eta_{Z'}^L i$  et  $g$  et que  $\varepsilon \eta_{Z'}^L i = \delta \alpha i = \delta k g$ .

Il s'agit à présent de vérifier ce qu'on obtient dans la catégorie M-stable : on va montrer que  $X'$  et  $X'_1$  sont isomorphes dans  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$ . Pour cela, on démontre que  $X'_1 = X' \oplus V$  où  $V$  est un objet M-split.

On considère  $v_Y M L i : MLY \rightarrow X'_1$  et  $j_1 : Z \rightarrow X'_1$ . Comme  $v_Y M L i \eta_Y^L = v_Y \eta_{Z'}^L i = j_1 g$ , on construit par la propriété universelle de la somme amalgamée un morphisme  $\theta : X' \rightarrow X'_1$  vérifiant  $\theta u_Y = v_Y M L i$  et  $\theta j = j_1$ .

Par ailleurs, grâce à la propriété universelle de la somme amalgamée, on peut construire  $\varphi : Z' \rightarrow MLY$  vérifiant

$$\begin{cases} \varphi i = \eta_Y^L \\ \varphi u_X = M L f \end{cases}$$

puisque  $\eta_Y^L f = M L f \eta_X^L$ . De plus, on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{\eta_{Z'}^L} & MLZ' \\ \varphi \downarrow & & \\ MLY & & \end{array}$$

Comme  $L \eta_{Z'}^L$  est une section (voir le corollaire 3.11), l'injectivité relative de  $MLY$  donne  $\varphi' : MLZ' \rightarrow MLY$  tel que  $\varphi' \eta_{Z'}^L = \varphi$ . De plus, en reprenant la démonstration de la proposition-définition 3.21, on peut choisir  $\varphi' = M(\varepsilon_{LY}^L)ML\varphi$  (voir aussi le corollaire 3.11).

On considère alors  $u_Y \varphi' : MLZ' \rightarrow X'$  et  $j : Z \rightarrow X'$ . Comme  $u_Y \varphi' \eta_{Z'}^L i = u_Y \varphi i = u_Y \eta_Y^L = j g$ , on construit par la propriété universelle de la somme amalgamée un morphisme  $\theta' : X'_1 \rightarrow X'$  vérifiant  $\theta' v_Y = u_Y \varphi'$  et  $\theta' j_1 = j$ .

Par ailleurs, grâce au corollaire 3.11, on a  $\varphi' M L i = M(\varepsilon_{LY}^L) M L(\varphi i) = M(\varepsilon_{LY}^L L \eta_Y^L) = \text{id}_{MLY}$ . D'après le lemme 3.97, il existe un objet  $V$  et deux morphismes  $t : MLZ' \rightarrow V$  et  $e : V \rightarrow MLZ'$  tels que

$$te = \text{id}_V, \quad t M L i = 0, \quad \varphi' e = 0 \quad \text{et} \quad M L i \varphi' + et = \text{id}_{MLZ'}.$$

On a donc  $MLY \oplus V = MLZ'$ . En particulier,  $V$  est un objet M-split.

On considère  $t : MLZ' \rightarrow V$  et  $0 : Z \rightarrow V$ . Comme  $t \eta_{Z'}^L i = t M L i \eta_Y^L = 0 = 0 g$ , on construit par la propriété universelle de la somme amalgamée un morphisme  $u : X'_1 \rightarrow V$  tel que  $u v_Y = t$  et  $u j_1 = 0$ . On va montrer à présent que  $(\theta, \theta', v_Y e, u)$  fait de  $X'_1$  la somme directe de  $X'$  et  $V$ . Pour cela, on calcule

$$u v_Y e = te = \text{id}_V, \quad \theta' v_Y e = u_Y \varphi' e = 0, \quad \begin{cases} u \theta u_Y = u v_Y M L i = t M L i = 0 = 0 u_Y \\ u \theta j = u j_1 = 0 = 0 j \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} \theta' \theta j = \theta' j_1 = j = \text{id}_{X'} j \\ \theta' \theta u_Y = \theta' v_Y M L i = u_Y \varphi' M L i = u_Y \text{id}_{MLY} = \text{id}_{X'} u_Y. \end{cases}$$

$$\text{Enfin, on a} \quad \begin{cases} (\theta \theta' + v_Y e u) j_1 = \theta j + 0 = j_1 = \text{id}_{X'_1} j_1 \\ (\theta \theta' + v_Y e u) v_Y = \theta u_Y \varphi' + v_Y e t = v_Y M L i \varphi' + v_Y e t = v_Y \text{id}_{MLZ'} = \text{id}_{X'_1} v_Y. \end{cases}$$

Finalement, comme  $V$  est un objet M-split, on en déduit que  $\theta : X' \rightarrow X'_1$  et  $\theta' : X'_1 \rightarrow X'$  sont deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre dans  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$ . On en déduit alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} Z' & \xrightarrow{\alpha} & Y' & \xrightarrow{\theta' \beta} & X' & \xrightarrow{\gamma \theta} & \Omega Z' \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \theta & & \parallel \\ Z' & \xrightarrow{\alpha} & Y' & \xrightarrow{\beta} & X'_1 & \xrightarrow{\gamma} & \Omega Z' \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont des isomorphismes. Ainsi, par T1, le triangle  $Z' \xrightarrow{\alpha} Y' \xrightarrow{\theta' \beta} X' \xrightarrow{\gamma \theta} \Omega Z'$  est distingué.

Il ne reste plus qu'à vérifier qu'on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i} & Z' & \xrightarrow{i'} & \Omega X \\
 \parallel & & \downarrow g & & \downarrow \alpha & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{gf} & Z & \xrightarrow{k} & Y' & \xrightarrow{k'} & \Omega X \\
 \downarrow f & & \parallel & & \downarrow \theta'\beta & & \downarrow \Omega f \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{j} & X' & \xrightarrow{j'} & \Omega Y \\
 \downarrow i & & \downarrow k & & \parallel & & \downarrow \Omega i \\
 Z' & \xrightarrow{\alpha} & Y' & \xrightarrow{\theta'\beta} & X' & \xrightarrow{\gamma\theta} & \Omega Z'
 \end{array}$$

ce qui découle des calculs suivants :  $\theta'\beta k = \theta'j_1 = j$ ,

$$\begin{cases} j'\theta'\beta k = j'\theta'j_1 = j'j = 0 = \Omega f k' k \\ j'\theta'\beta v_X = j'\theta'v_Y \eta_{Z'}^L u_X = j'u_Y \varphi' \eta_{Z'}^L u_X = \pi_Y \varphi u_X = \pi_Y \text{ML} f = \Omega(f) \pi_X = \Omega(f) k' v_X \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \gamma\theta j = Tij'_1 j_1 = 0 = \Omega(i) j' j \\ \gamma\theta u_Y = \gamma v_Y \text{ML} i = Tij'_1 v_Y \text{ML} i = \text{Tip}_Y \text{ML} i = \pi_{Z'} \text{ML} i = \Omega(i) \pi_Y = \Omega(i) j' u_Y \end{cases}$$

Considérons à présent le cas de trois triangles non nécessairement standards

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} Z' \xrightarrow{i'} \Omega X, \quad Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{j} X' \xrightarrow{j'} \Omega Y \quad \text{et} \quad X \xrightarrow{gf} Z \xrightarrow{k} Y' \xrightarrow{k'} \Omega X$$

D'après l'axiome (T3), il existe trois triangles standards

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i_1} Z'_1 \xrightarrow{i'_1} \Omega X, \quad Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{j_1} X'_1 \xrightarrow{j'_1} \Omega Y \quad \text{et} \quad X \xrightarrow{gf} Z \xrightarrow{k} Y'_1 \xrightarrow{k'} \Omega X$$

De plus, comme  $\text{MStab}_{\mathcal{A}}$  est  $\mathcal{O}$ -prétriangulée, l'axiome T5 et le corollaire 3.44 donnent les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} Z' \xrightarrow{i'} \Omega X & Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{j} X' \xrightarrow{j'} \Omega Y & X \xrightarrow{gf} Z \xrightarrow{k} Y' \xrightarrow{k'} \Omega X \\
 \parallel & \parallel & \parallel \\
 X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i_1} Z'_1 \xrightarrow{i'_1} \Omega X & Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{j_1} X'_1 \xrightarrow{j'_1} \Omega Y & X \xrightarrow{gf} Z \xrightarrow{k} Y'_1 \xrightarrow{k'} \Omega X
 \end{array}$$

où  $u_X$ ,  $u_Y$  et  $u_Z$  sont des isomorphismes. D'après la première partie de la démonstration, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i_1} & Z'_1 & \xrightarrow{i'_1} & \Omega X \\
 \parallel & & \downarrow g & & \downarrow \alpha & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{gf} & Z & \xrightarrow{k_1} & Y'_1 & \xrightarrow{k'_1} & \Omega X \\
 \downarrow f & & \parallel & & \downarrow \beta & & \downarrow \Omega f \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{j_1} & X'_1 & \xrightarrow{j'_1} & \Omega Y \\
 \downarrow i_1 & & \downarrow k_1 & & \parallel & & \downarrow \Omega i_1 \\
 Z'_1 & \xrightarrow{\alpha} & Y'_1 & \xrightarrow{\beta} & X'_1 & \xrightarrow{\gamma} & \Omega Z'_1
 \end{array}$$

où  $Z'_1 \xrightarrow{\alpha} Y'_1 \xrightarrow{\beta} X'_1 \xrightarrow{\gamma} \Omega Z'_1$  est un triangle distingué. En posant  $\alpha' = u_Y^{-1} \alpha u_Z$ ,  $\beta' = u_X^{-1} \beta u_Y$  et  $\gamma' = \Omega(u_Z^{-1}) \gamma u_X$ , on obtient les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccccccc}
 Z' & \xrightarrow{\alpha'} & Y' & \xrightarrow{\beta'} & X' & \xrightarrow{\gamma'} & \Omega Z' \\
 \downarrow u_Z & & \downarrow u_Y & & \downarrow u_X & & \downarrow \Omega(u_Z) \\
 Z'_1 & \xrightarrow{\alpha} & Y'_1 & \xrightarrow{\beta} & X'_1 & \xrightarrow{\gamma} & \Omega Z'_1
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i} & Z' & \xrightarrow{i'} & \Omega X \\
 \parallel & & \downarrow g & & \downarrow \alpha' & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{gf} & Z & \xrightarrow{k} & Y' & \xrightarrow{k'} & \Omega X \\
 \downarrow f & & \parallel & & \downarrow \beta' & & \downarrow \Omega f \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{j} & X' & \xrightarrow{j'} & \Omega Y \\
 \downarrow i & & \downarrow k & & \parallel & & \downarrow \Omega i \\
 Z' & \xrightarrow{\alpha'} & Y' & \xrightarrow{\beta'} & X' & \xrightarrow{\gamma'} & \Omega Z'
 \end{array}$$

où les flèches verticales du premier diagramme sont des isomorphismes. Ainsi  $Z' \xrightarrow{\alpha'} Y' \xrightarrow{\beta'} X' \xrightarrow{\gamma'} \Omega Z'$  est un triangle distingué et l'axiome T6 est vérifié. ■

### 4.3 CATÉGORIE M-STABLE À LA RICKARD

L'objectif de cette section est de généraliser le théorème 2.1 de Rickard [RIC]. On y démontre que la catégorie M-stable est un quotient d'une catégorie M-dérivée bornée (voir la définition 4.33 qu'on pourra comparer avec la définition 5.1 de [GRI]). On commence par rappeler les notations de la section 4.2. On donne aussi quelques définitions pour simplifier le vocabulaire. Ensuite, dans les sous-sections 4.3.1 et 4.3.2, on généralise les théorèmes classiques d'algèbre homologique en remplaçant les objets projectifs et injectifs par les objets M-split et la catégorie dérivée usuelle par la catégorie M-dérivée (voir, par exemple, le lemme 4.34, le corollaire 4.36, la proposition 4.39 ou encore la proposition-définition 4.42). Globalement, la sous-section 4.3.1 est consacrée à l'étude des morphismes dans la catégorie M-dérivée et notamment la comparaison avec les morphismes dans la catégorie homotopique (voir la remarque 4.38). La sous-section 4.3.2 est, quant à elle, consacrée à l'étude des M-résolutions d'un objet de  $\mathcal{A}$  : l'objectif est de montrer que le foncteur canonique de  $\mathcal{A}$  dans la catégorie M-dérivée est pleinement fidèle (voir le lemme 4.48). Enfin, dans la sous-section 4.3.3, on donne la démonstration de la généralisation du théorème de Rickard.

**Hypothèse 4.30** Dans cette section, on reprend les notations et hypothèses de la section précédente. On fixe un anneau commutatif unitaire  $A$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  deux catégories  $A$ -abéliennes et  $M : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $L, R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  trois foncteurs  $A$ -linéaires. On suppose que  $(M, L, R)$  est un triplet adjoint et que  $L$  et  $R$  sont fidèles (voir le corollaire 3.16 et la proposition 3.36) et exacts. On note

$$\varepsilon_X^R : MRX \rightarrow X, \quad \eta_Y^R : Y \rightarrow RMY \quad \text{et} \quad \varepsilon_Y^L : LMY \rightarrow Y, \quad \eta_X^L : X \rightarrow MLX$$

les unités et counités associées aux paires adjointes  $(M, R)$  et  $(L, M)$ . On suppose qu'une suite exacte de  $\mathcal{A}$  est L-scindée si et seulement si elle est R-scindée.

L'hypothèse sur la scission des suites exactes se prolonge au niveau des complexes : un complexe de  $\mathcal{A}$  dont l'image par  $L$  (resp.  $R$ ) est contractile a son image par  $R$  (resp.  $L$ ) qui est aussi contractile (voir la remarque 4.32). On introduit alors un vocabulaire pour pouvoir décrire simplement cette situation :

**Définition 4.31 — Complex scindé, complexe contractile et complexe à objet M-split.** Soit  $(X, d_X)$  un complexe de  $\mathcal{A}$ . On dit que  $X$  est R-scindé (resp. R-contractile, L-scindé, L-contractile) si  $RX$  (resp.  $RX$ ,  $LX$ ,  $LX$ ) est un complexe scindé (resp. contractile, scindé, contractile) de  $\mathcal{B}$ .

On dit que  $(X, d_X)$  est formé d'objets M-split si les composantes homogènes de  $X$  sont des objets M-split.

**Remarque 4.32 — Complex contractile.** Soit  $(X, d_X)$  un complexe de  $\mathcal{A}$ . Montrons que le complexe  $X$  est L-contractile si et seulement si  $X$  est R-contractile.

Commençons par montrer que  $LX$  est exact si et seulement si  $RX$  l'est si et seulement si  $X$  l'est. Comme  $L$  et  $R$  sont exacts, on a  $H^n(LX) = LH^n(X)$  et  $H^n(RX) = RH^n(X)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Ainsi si  $X$  est exact, alors  $LX$  et  $RX$  le sont aussi. Si  $LX$  ou  $RX$  est exact, alors comme  $L$  est fidèle, le lemme 3.35 assure que  $H^n(X) = 0$  et donc  $X$  est exact.

Montrons que  $LX$  est scindé si et seulement si  $RX$  l'est. Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $d : X^n \rightarrow \text{Im } d_X^n$  l'épimorphisme canonique et  $i : \text{Im } d_X^n \rightarrow X^{n+1}$  le monomorphisme canonique. On a alors les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \text{Ker } d_X^n \longrightarrow X^n \xrightarrow{d} \text{Im } d_X^n \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow \text{Im } d_X^n \xrightarrow{i} X^{n+1} \longrightarrow \text{Coker } d_X^n \longrightarrow 0$$

Comme R et L sont exacts, l'image par L (resp. R) de ces suites exactes sont les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \text{Ker } d_{\text{LX}}^n \longrightarrow \text{LX}^n \xrightarrow{\text{Ld}} \text{Im } d_{\text{LX}}^n \longrightarrow 0 \quad 0 \longrightarrow \text{Im } d_{\text{LX}}^n \xrightarrow{\text{Li}} \text{LX}^{n+1} \longrightarrow \text{Coker } d_{\text{LX}}^n \longrightarrow 0 \quad (1)$$

respectivement

$$0 \longrightarrow \text{Ker } d_{\text{RX}}^n \longrightarrow \text{RX}^n \xrightarrow{\text{Rd}} \text{Im } d_{\text{RX}}^n \longrightarrow 0 \quad 0 \longrightarrow \text{Im } d_{\text{RX}}^n \xrightarrow{\text{Ri}} \text{RX}^{n+1} \longrightarrow \text{Coker } d_{\text{RX}}^n \longrightarrow 0 \quad (2)$$

D'après la proposition-définition 3.99, LX (resp. RX) est scindée si et seulement les deux suites exactes (1) (resp. (2)) sont scindées. L'hypothèse 4.14 assure alors que LX est scindé si et seulement si RX l'est.

Comme un complexe contractile est un complexe exact et scindé, on obtient que LX est contractile si et seulement si RX l'est. ■

**Définition 4.33 – Catégorie M-dérivée.** D'après la proposition 3.93 et la remarque 3.94, on a un triplet adjoint de foncteurs triangulés  $(M, L, R)$  avec  $M : \mathcal{B}^{\text{ht}} \rightarrow \mathcal{A}^{\text{ht}}$  et  $L, R : \mathcal{A}^{\text{ht}} \rightarrow \mathcal{B}^{\text{ht}}$ . On définit alors la *catégorie M-dérivée*  $\mathcal{D}_M(\mathcal{A})$  comme le quotient au sens de Verdier [VER] de la catégorie  $\mathcal{A}^{\text{ht}}$  par la sous-catégorie épaisse  $\text{Ker } L = \text{Ker } R$  (voir la remarque 4.32) :

$$\mathcal{D}_M(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^{\text{ht}} / \text{Ker } L = \mathcal{A}^{\text{ht}} / \text{Ker } R.$$

De même, on définit la *catégorie M-dérivée bornée* (resp. à droite, à gauche) comme

$$\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A}) = (\mathcal{A}^{\text{ht}})^b / \text{Ker } L, \quad (\text{resp. } \mathcal{D}_M^-(\mathcal{A}) = (\mathcal{A}^{\text{ht}})^- / \text{Ker } L, \quad \mathcal{D}_M^+(\mathcal{A}) = (\mathcal{A}^{\text{ht}})^+ / \text{Ker } L).$$

### 4.3.1 UN PEU D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE M-SPLIT

Cette sous-section 4.3.1 est consacrée à la généralisation des théorèmes classiques d'algèbre homologique en remplaçant les objets projectifs et injectifs par les objets M-split. Le résultat fondateur est le lemme 4.34. De ce lemme vont découler les comparaisons entre les morphismes dans la catégorie  $\mathcal{D}_M(\mathcal{A})$  et la catégorie homotopique de  $\mathcal{A}$  (corollaire 4.37 et remarque 4.38). Le deuxième résultat important de cette section (en vue de la démonstration du théorème 4.49 de Rickard) est la proposition 4.39. Elle servira à montrer que les seuls objets de  $\mathcal{A}$  nuls dans le quotient  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A}) / K^b(M)$  sont bien les objets M-split.

**Lemme 4.34 – Complexe contractile et complexe M-split.** Soit  $(X, d_X)$  un complexe borné à droite (resp. à gauche) formé d'objets M-split,  $Y$  un complexe R-contractile (resp. L-contractile) de  $\mathcal{A}$  et  $f : X \rightarrow Y$  (resp.  $f : Y \rightarrow X$ ) un morphisme de complexes. Alors  $f$  est une homotopie.

**Preuve.** Considérons  $N$  tel que  $X^n = 0$  pour  $n > N$ . Pour  $n \geq N$ , on pose  $s^n = 0 : X^{n+1} \rightarrow Y^n$ . On a alors évidemment  $f^n = d_Y^{n-1} s^{n-1} + s^n d_X^n = 0$  pour tout  $n > N$ .

Soit  $n \in \mathbb{Z}$  tel qu'il existe  $s^{n-1} : X^n \rightarrow Y^{n-1}$  et  $s^n : X^{n+1} \rightarrow Y^n$  vérifiant  $f^n = d_Y^{n-1} s^{n-1} + s^n d_X^n$ . On considère  $g = f^{n-1} - s^{n-1} d_X^{n-1}$ . On a alors

$$d_Y^{n-1} g = d_Y^{n-1} f^{n-1} - d_Y^{n-1} s^{n-1} d_X^n = f^n d_X^n - d_Y^{n-1} s^{n-1} d_X^n = 0$$

On en déduit que  $g$  se factorise par  $\text{Ker } d_X^{n-1}$ . D'après la remarque 4.32,  $Y$  est exact et donc  $g$  se factorise par  $\text{Im } d_Y^{n-2}$ . On note alors  $i : \text{Im } d_Y^{n-2} \rightarrow Y^{n-1}$  l'inclusion canonique et  $d : Y^{n-2} \rightarrow \text{Im } d_Y^{n-2}$  tel que  $id = d_Y^{n-2}$ . On a construit  $v : X^{n-1} \rightarrow \text{Im } d_Y^{n-2}$  tel que  $g = iv$ . Par ailleurs, comme R est exact,  $Rd : RY^{n-2} \rightarrow \text{Im } d_{RY}^{n-2}$  est un épimorphisme. Montrons que  $Rd$  admet une section. Comme  $RY$  est contractile, il existe  $t$  tel que  $Ri Rdt Ri Rd = Ri Rd$  et donc, comme  $Ri$  est un monomorphisme et  $Rd$  un épimorphisme, on a  $Rdt Ri = \text{id}$ . La relative projectivité de  $X^{n-1}$  permet de définir  $s^{n-2} : X^{n-1} \rightarrow Y^{n-2}$  tel que  $ds^{n-2} = v$ . En composant par  $i$ , on obtient le résultat souhaité.

Considérons  $N$  tel que  $X^n = 0$  pour  $n < N$ . Pour  $n < N$ , on pose  $s^n = 0 : Y^{n+1} \rightarrow X^n$ . On a alors évidemment  $f^n = s^n d_Y^n + d_X^{n-1} s^{n-1} = 0$  pour tout  $n < N$ .

Soit  $n \in \mathbb{Z}$  tel qu'il existe  $s^{n-1} : Y^n \rightarrow X^{n-1}$  et  $s^n : Y^{n+1} \rightarrow X^n$  vérifiant  $f^n = s^n d_Y^n + d_X^{n-1} s^{n-1}$ . On considère  $g = f^{n+1} - d_X^n s^n$ . On a alors

$$gd_Y^n = f^{n+1} d_Y^n - d_X^n s^n d_Y^n = d_X^n f^n - d_X^n s^n d_Y^n = 0$$

On en déduit que  $g$  se factorise par  $\text{Coker } d_Y^n$ . D'après la remarque 4.32,  $Y$  est exact et donc  $g$  se factorise par  $Y^{n+1} / \text{Ker } d_Y^{n+1} = \text{Im } d_Y^{n+1}$ . On note alors  $i : \text{Im } d_Y^{n+1} \rightarrow Y^{n+2}$  l'inclusion canonique et  $d : Y^{n+1} \rightarrow \text{Im } d_Y^{n+1}$  tel que  $id = d_Y^{n+1}$ . On a construit  $v : \text{Im } d_Y^{n+1} \rightarrow X^{n+1}$  tel que  $g = vd$ . Par ailleurs, comme L est exact,  $Li : \text{Im } d_{LY}^{n+1} \rightarrow LY^{n+2}$  est un monomorphisme. Montrons que  $Li$  admet une rétraction. Comme  $LY$  est contractile, il existe  $t$  tel que  $Li Ldt Li Ld = Li Ld$  et donc, comme  $Li$  est un monomorphisme et  $Ld$  un épimorphisme, on a  $Ldt Li = \text{id}$ . La relative injectivité de  $X^{n+1}$  permet de définir  $s^{n+2} : Y^{n+2} \rightarrow X^{n+1}$  tel que  $s^{n+2} i = v$ . On obtient ainsi le résultat souhaité. ■

**Corollaire 4.35 — Complexe contractile et complexe M-split.** Soit  $(X, d_X)$  un complexe borné à droite (resp. à gauche) formé d'objets M-split tel que  $RX$  (resp.  $LX$ ) soit un complexe contractile. Alors  $X$  est contractile.

**Preuve.** Il suffit d'appliquer le lemme 4.34 au morphisme de complexe  $\text{id}_X$ . ■

**Corollaire 4.36 — Complexe M-split.** Soient  $(X, d_X)$  un complexe borné à droite (resp. à gauche) formé d'objets M-split,  $(Y, d_Y)$  un complexe et  $f : Y \rightarrow X$  (resp.  $f : X \rightarrow Y$ ) un morphisme de complexes tel que  $RC(f)$  (resp.  $LC(f)$ ) est contractile. Alors  $f$  est une rétraction (resp. une section).

**Preuve.** On considère le morphisme canonique  $i_f : X \rightarrow C(f)$  (resp.  $\pi_f : C(f) \rightarrow X[1]$ ) (voir la proposition 3.79). Comme  $RC(f)$  ( $LC(f)$ ) est contractile, le lemme 4.34 assure alors que  $i_f$  (resp.  $\pi_f$ ) est une homotopie. Or dans la catégorie homotopique, on a le triangle distingué

$$Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{i_f} C(f) \xrightarrow{\pi_f} Y[1] \quad (\text{resp. } X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i_f} C(f) \xrightarrow{\pi_f} X[1])$$

avec  $i_f = 0$  (resp.  $\pi_f = 0$ ). Grâce au corollaire 3.51, on en déduit qu'il existe  $g : X \rightarrow Y$  (resp.  $g : Y \rightarrow X$ ) tel que  $fg = \text{id}_X$  (resp.  $gf = \text{id}_X$ ) dans la catégorie homotopique. ■

**Corollaire 4.37 — Complexe M-split et catégorie M-dérivée.** Soient  $(X, d_X)$  un complexe borné à droite (resp. à gauche) formé d'objets M-split et  $(Y, d_Y)$  un complexe. La localisation  $\text{Hom}_{\mathcal{A}^{\text{ht}}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_M(\mathcal{A})}(X, Y)$  est un isomorphisme (resp.  $\text{Hom}_{\mathcal{A}^{\text{ht}}}(Y, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_M(\mathcal{A})}(Y, X)$ ).

**Preuve.** Commençons par l'injectivité : on considère  $f, g : X \rightarrow Y$  qui ont la même image dans  $\mathcal{D}_M(\mathcal{A})$ . Par définition, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \text{id}_X \swarrow & \downarrow u & \searrow f & \\ X & \xleftarrow{q} & Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ & \text{id}_X \swarrow & \downarrow v & \searrow g & \\ & & X & & \end{array}$$

où  $C(q) = u = v$  vérifie  $RC(C(q))$  est contractile. De plus, on a  $fq = gq = g'$ . Or, d'après le corollaire 4.36,  $q$  est une rétraction, donc il existe  $q'$  tel que  $qq' = \text{id}_X$ . Ainsi  $f = g = g'q'$ .

Montrons la surjectivité. Considérons donc un morphisme entre  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{D}_M(\mathcal{A})$  c'est-à-dire un diagramme  $X \xleftarrow{q} Y' \xrightarrow{g} Y$  où  $RC(q)$  est contractile. D'après le corollaire 4.36, il existe  $q'$  tel que  $qq' = \text{id}_X$ . On a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} & Y' & \\ q \swarrow & \downarrow & \searrow g \\ X & \xleftarrow{\text{id}_X} & Y \\ \text{id}_X \swarrow & \xrightarrow{gq'} & \searrow \\ & X & \end{array}$$

qui assure la surjectivité.

Commençons par l'injectivité : on considère  $f, g : Y \rightarrow X$  qui ont la même image dans  $\mathcal{D}_M(\mathcal{A})$ . Par définition, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & f \nearrow & \downarrow u & \searrow \text{id}_X & \\ Y & \xrightarrow{g'} & Y' & \xleftarrow{q} & X \\ & \text{id}_X \swarrow & \downarrow v & \searrow & \\ & & X & & \end{array}$$

où  $LC(q)$  est contractile. De plus, on a  $qf = qg = g'$ . Or, d'après le corollaire 4.36,  $q$  est une section, donc il existe  $q'$  tel que  $q'q = \text{id}_X$ . Ainsi  $f = g = q'g'$ .

Montrons la surjectivité. Considérons donc un morphisme entre  $Y$  et  $X$  dans  $\mathcal{D}_M(\mathcal{A})$  c'est-à-dire un diagramme  $Y \xrightarrow{g} Y' \xleftarrow{q} X$  où  $LC(q)$  est contractile. D'après le corollaire 4.36, il existe  $q'$  tel que  $q'q = \text{id}_X$ . On a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y' & & \\
 & \nearrow g & \downarrow q' & \swarrow q & \\
 Y & \xrightarrow{q'g} & X & \xleftarrow{\text{idx}} & X
 \end{array}$$

qui assure la surjectivité.  $\blacksquare$

**Remarque 4.38 – Complexe borné.** La preuve de la proposition précédente s'applique évidemment lorsque  $Y$  est un complexe borné à droite ou un complexe borné à gauche ou encore quand  $X$  et  $Y$  sont bornés. On a donc les isomorphismes

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_{\mathcal{A}^{\text{ht-}}}(X, Y) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_M^-(\mathcal{A})}(X, Y), & \text{Hom}_{\mathcal{A}^{\text{ht+}}}(Y, X) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_M^+(\mathcal{A})}(Y, X), \\
 \text{Hom}_{\mathcal{A}^{\text{htb}}}(X, Y) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})}(X, Y) & \text{et} & \text{Hom}_{\mathcal{A}^{\text{htb}}}(Y, X) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})}(Y, X).
 \end{aligned}$$

**Proposition 4.39 – Complexe borné quasi-exact.** Soit  $(X, d_X)$  un complexe borné d'objets M-split. On suppose  $RX$  et  $LX$  sont scindés et qu'il existe au plus un entier  $i$  tel que  $H^i(X) \neq 0$ . Alors  $X$  est un complexe scindé et en particulier  $H^i(X)$  est facteur direct de  $X^i$ .

**Preuve.** On suppose que  $X^j = 0$  si  $j < m$  et  $j > n$ . On peut écrire  $X$  sous la forme

$$0 \longrightarrow X^m \xrightarrow{d_X^m} X^{m+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^n \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Montrons par récurrence que  $\text{Im } d_X^k$  est un facteur direct de  $X^{k+1}$  pour tout  $k \in \llbracket m-1, i-1 \rrbracket$ . Il est clair que  $\text{Im } d_X^{m-1} = 0$  est facteur direct de  $X^m$ . Si  $m = i$ , on a fini. Sinon, on suppose que  $\text{Im } d_X^k$  est un facteur direct de  $X^{k+1}$  avec  $k+1 \in \llbracket m, i-1 \rrbracket$ . Par hypothèse, on a  $X^{k+1} = \text{Im } d_X^k \oplus Y^{k+1}$ . En particulier,  $Y^{k+1}$  est un objet M-split de  $\mathcal{A}$  puisque c'est un facteur direct d'un objet M-split. L'exactitude en degré  $k+1$  assure que  $\text{Im } d_X^k = \text{Ker } d_X^{k+1}$ . En particulier la restriction de  $d_X^k$  à  $Y^{k+1}$  est un monomorphisme  $d : Y^{k+1} \rightarrow X^{k+2}$  qui a la même image que  $d_X^{k+1}$ . Montrons que  $Ld$  est une section. On note alors  $d_1 : Y^{k+1} \rightarrow \text{Im } d_X^{k+1}$  l'isomorphisme vérifiant  $id_1 = d$  où  $i$  est l'inclusion canonique de  $\text{Im } d_X^{k+1}$  dans  $X^{k+2}$ . Comme  $L$  est exact, on obtient  $Ld_1 : LY^{k+1} \rightarrow \text{Im } d_{LX}^{k+1}$  un isomorphisme et  $Li$  est l'inclusion canonique de  $\text{Im } d_{LX}^{k+1}$  dans  $LX^{k+2}$ . Mais  $LX$  est scindé, donc il existe  $Z$  tel que  $\text{Im } d_{LX}^{k+1} \oplus Z = LX^{k+2}$ . On a alors  $Ld = (Ld_1, v)$  avec  $Ld_1$  qui est un isomorphisme. En posant  $\beta = (Ld_1^{-1}, 0)$ , on obtient  $\beta Ld = id_{Y^{k+1}}$ . Par relative injectivité de  $Y^{k+1}$ , il existe  $g : X^{k+2} \rightarrow Y^{k+1}$  tel que  $gd = id_{Y^{k+1}}$ . Le lemme 3.97 assure que  $\text{Im } d_X^{k+1}$  est facteur de  $X^{k+2}$ .

Montrons par récurrence descendante que  $\text{Ker } d_X^k$  est un facteur direct de  $X^k$  pour tout  $k \in \llbracket i, n \rrbracket$ . Il est clair que  $\text{Ker } d_X^n = X^n$  est facteur direct de  $X^n$ . Si  $i = n$ , on a fini. Sinon, on fixe  $k \in \llbracket i+1, n \rrbracket$  tel que  $\text{Ker } d_X^k$  est un facteur direct de  $X^k$ . Par hypothèse, on a  $X^k = \text{Ker } d_X^k \oplus Y^k$ . En particulier,  $\text{Ker } d_X^k$  est un objet M-split de  $\mathcal{A}$  puisque c'est un facteur direct d'un objet M-split. Par ailleurs, l'hypothèse d'exactitude en degré  $k$  assure que  $\text{Im } d_X^{k-1} = \text{Ker } d_X^k$ . Ainsi  $d_X^{k-1}$  induit un épimorphisme  $d : X^{k-1} \rightarrow \text{Ker } d_X^k$  qui a le même noyau que  $d_X^{k-1}$ . Montrons que  $Rd$  est une rétraction. On note  $i : \text{Ker } d_X^{k-1} \rightarrow X^{k-1}$  l'inclusion canonique. Comme  $R$  est exact,  $Ri : \text{Ker } d_{RX}^{k-1} \rightarrow X^{k-1}$  est l'inclusion canonique et  $Rd : RX^{k-1} \rightarrow \text{Ker } d_{RX}^k$  est l'épimorphisme associé à  $Rd_X^{k-1}$ . De plus, comme  $RX$  est scindé, il existe  $Z$  tel que  $\text{Ker } d_{RX}^{k-1} \oplus Z = X^{k-1}$ . La restriction de  $Rd$  à  $Z$  est donc un isomorphisme noté  $f$ . On a ainsi  $Rd = (0, f)$ . En posant,  $\beta = (0, f^{-1})$ , on a  $Rd\beta = id_{\text{Ker } d_{RX}^k}$ . Par relative projectivité de  $\text{Ker } d_X^k$ , il existe  $g : \text{Ker } d_X^k \rightarrow X^{k-1}$  tel que  $dg = id_{\text{Ker } d_X^k}$ . La preuve du lemme 3.97 assure que  $\text{Ker } d_X^{k-1}$  est facteur de  $X^{k-1}$ .

Finalement, pour  $k \in \llbracket m, i \rrbracket$ , on a  $\text{Im } d_X^{k-1}$  est facteur direct de  $X^k$ . De plus, par exactitude, on obtient que  $\text{Ker } d_X^k = \text{Im } d_X^{k-1}$  est facteur direct de  $X^k$  pour  $k \in \llbracket i+1, n \rrbracket$ . De même, par exactitude, on obtient que  $\text{Im } d_X^{k-1} = \text{Ker } d_X^k$  est facteur direct de  $X^k$  pour  $k \in \llbracket m, i-1 \rrbracket$ . Enfin  $\text{Ker } d_X^k$  est facteur direct de  $X^k$  pour  $k \in \llbracket i, n \rrbracket$ . Le point (iv) de la proposition-définition 3.99 assure alors que  $X$  est scindé.  $\blacksquare$

### 4.3.2 M-RÉSOLUTION

Dans cette sous-section, on définit la résolution M-canonical d'un objet de  $\mathcal{A}$  (pour pouvoir utiliser les propriétés de relative injectivité et de relative projectivité, on ne demande pas simplement un quasi-isomorphisme). On étudie aussi ses propriétés de fonctorialité. L'objectif étant de montrer que le foncteur canonique de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  est pleinement fidèle ce qui servira pour démontrer que le foncteur  $\theta$  du théorème 4.49 de Ricard est plein.

**Définition 4.40 — M-résolution.** Soit  $(X, d_X)$  un complexe de  $\mathcal{A}$ . Une *M-résolution* de  $X$  est un couple  $(P, f)$  où  $P$  est un complexe formé d'objets M-split et  $RC(f)$  est R-contractile.

**Lemme 4.41 — Image dans une catégorie abélienne.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie abélienne et  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ . Supposons qu'il existe un objet  $Z \in \mathcal{C}$  et deux morphismes  $p : X \rightarrow Z$  et  $i : Z \rightarrow Y$  vérifiant  $ip = f$ ,  $i$  est un monomorphisme et  $p$  un épimorphisme alors  $\text{Im } f = (Z, i)$ .

**Preuve.** Comme  $p$  est un épimorphisme, on a  $\text{Coker } f = \text{Coker } i$  et donc  $\text{Im } f = \text{Ker Coker } f = \text{Ker Coker } i$ . Comme  $i$  est un monomorphisme, on a  $\text{Ker Coker } i = i$ . ■

**Proposition-Définition 4.42 — Résolution canonique.** Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$ . On construit par récurrence  $M_0 = \text{MRX}$ ,  $\varepsilon_0 = \varepsilon_X^R : \text{MRX} \rightarrow X$  et  $j_0 : \text{Ker } \varepsilon_0 \rightarrow \text{MRX}$  le monomorphisme canonique puis pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $M_{n+1} = \text{MRKer } \varepsilon_n$ ,  $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{\text{Ker } \varepsilon_n}^R$  et  $j_{n+1} : \text{Ker } \varepsilon_{n+1} \rightarrow M_{n+1}$  le monomorphisme canonique. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $d_n = j_{n-1} \varepsilon_n : M_n \rightarrow M_{n-1}$ .

On a donc le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \nwarrow & & \nearrow \varepsilon_{\text{Ker } \varepsilon_1}^R = \varepsilon_2 & & \nearrow \varepsilon_{\text{Ker } \varepsilon_0}^R = \varepsilon_1 & \\
 & \dashrightarrow & & j_1 & & j_0 & \\
 \dashrightarrow & & M_2 = \text{MRKer } \varepsilon_1 & \xrightarrow{d_2 = j_1 \varepsilon_2} & M_1 = \text{MRKer } \varepsilon_0 & \xrightarrow{d_1 = j_0 \varepsilon_1} & M_0 = \text{MRX} \\
 & & & & & & \downarrow \varepsilon_X^R = \varepsilon_0 \\
 & & & & & & X
 \end{array}$$

En prolongeant à droite par 0, on construit une M-résolution de  $X$  appelée *résolution M-canonique de  $X$* .

**Preuve.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $d_n d_{n+1} = j_{n-1} \varepsilon_n j_n \varepsilon_{n+1} = 0$  car  $j_n = \text{Ker } \varepsilon_n$ . Ainsi, on a bien construit un complexe. De plus, on a  $\varepsilon_0 d_1 = \varepsilon_0 j_0 \varepsilon_1 = 0$  car  $j_0$  est le noyau de  $\varepsilon_0$ . Ainsi la famille  $(f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$  donnée par  $f^i = 0$  si  $i \neq 0$  et  $f^0 = \varepsilon_0$  est bien un morphisme de complexes entre la résolution M-canonique et le complexe réduit à  $X$  en degré 0.

Montrons que la résolution M-canonique est bien une M-résolution de  $X$ . La résolution canonique est formée d'objets M-split. Il s'agit à présent de montrer que le complexe  $C(f)$

$$\cdots \longrightarrow M_2 \xrightarrow{-d_2} M_1 \xrightarrow{-d_1} M_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

est R-contractile.

On commence par montrer que  $C(f)$  est R-scindé. Pour cela, on va montrer que  $Rj_n$  admet une rétraction qu'on notera  $\alpha_n$  et que  $R\varepsilon_n$  admet une section qu'on notera  $\beta_n$ . On utilise la convention  $\text{Ker } \varepsilon_{-1} = X$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , comme  $\varepsilon_n$  est un épimorphisme, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \varepsilon_n \xrightarrow{j_n} M_n \xrightarrow{\varepsilon_n} \text{Ker } \varepsilon_{n-1} \longrightarrow 0$$

L'exactitude de R assure alors l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow \text{RKer } \varepsilon_n \xrightarrow{Rj_n} \text{RM}_n \xrightarrow{R\varepsilon_n} \text{RKer } \varepsilon_{n-1} \longrightarrow 0$$

Or le corollaire 3.11 assure que  $R\varepsilon_n$  admet une section (qu'on note  $\beta_n$ ). On en déduit que  $Rj_n$  admet une rétraction qu'on note  $\alpha_n$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $s_n = -\beta_n \alpha_{n-1}$ . Vérifions que  $R(-d_n)s_nR(-d_n) = R(-d_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par définition, on a  $R(-d_n)s_nR(-d_n) = -Rj_{n-1}(R\varepsilon_n \beta_n)(\alpha_{n-1} Rj_{n-1})R\varepsilon_n = -Rj_{n-1}R\varepsilon_n = R(-d_n)$ . En posant  $s_0 = \beta_0$ , on obtient  $R\varepsilon_0 s_0 R\varepsilon_0 = R\varepsilon_0$ . Enfin, comme les composantes homogènes de degré positif de la différentielle du complexe  $RC(f)$  sont nulles, on obtient la relation  $Rd s R d = R d$  avec  $s = 0$ . Ainsi  $RC(f)$  est un complexe scindé.

Montrons que  $C(f)$  est un complexe exact. Commençons par l'exactitude en  $M_n$  pour  $n \geq 1$ . On a vu que  $d_n d_{n+1} = 0$ . Ainsi  $d_{n+1}$  se factorise par  $\text{Ker } d_n$ . Or  $j_{n-1}$  est un monomorphisme, on a  $\text{Ker } d_n = \text{Ker } \varepsilon_n$  donc Ainsi  $d_{n+1}$  se factorise par  $\text{Ker } \varepsilon_n$ . Mais par définition de  $d_{n+1}$  cette factorisation est justement  $d_{n+1} = j_n \varepsilon_{n+1}$ . Mais par hypothèse,  $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{\text{Ker } \varepsilon_n}^R$  est un épimorphisme et donc  $\text{Im } d_{n+1} = \text{Ker } d_n$ . En  $X$ , le complexe est exact puisque  $\varepsilon_0$  est un épimorphisme. Il reste à étudier l'exactitude en  $M_0$ . D'après le lemme 4.41,  $(\text{Ker } \varepsilon_0, j_0)$  est l'image de  $d_1$  ce qui montre l'exactitude en  $M_0$ . ■

Comme R est un foncteur exact,  $RC(f)$  est exact et donc contractile.

Passons aux propriétés de fonctorialité de la résolution M-canonique.

**Proposition-Définition 4.43 — Résolution canonique et fonctorialité.** Soient  $X, X'$  deux objets de  $\mathcal{A}$  et  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')$ . On note  $\text{Resol}(X)$  (resp.  $\text{Resol}(X')$ ) la résolution M-canonique de  $X$  (resp.  $X'$ ). On pose  $M_0 = \text{MRX}$  (resp.  $M'_0 = \text{MRX}'$ ),  $\varepsilon_0 = \varepsilon_X^R : \text{MRX} \rightarrow X$  (resp.  $\varepsilon'_0 = \varepsilon_{X'}^R : \text{MRX}' \rightarrow X'$ ) et  $j_0 : \text{Ker } \varepsilon_0 \rightarrow \text{MRX}$

(resp.  $j'_0 : \text{Ker } \varepsilon'_0 \rightarrow \text{MRX}'$ ) le monomorphisme canonique puis pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit alors  $M_{n+1} = \text{MRKer } \varepsilon_n$  (resp.  $M'_{n+1} = \text{MRKer } \varepsilon'_n$ ),  $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{\text{Ker } \varepsilon_n}^R$  (resp.  $\varepsilon'_{n+1} = \varepsilon_{\text{Ker } \varepsilon'_n}^R$ ) et, enfin,  $j_{n+1} : \text{Ker } \varepsilon_{n+1} \rightarrow M_{n+1}$  (resp.  $j'_{n+1} : \text{Ker } \varepsilon'_{n+1} \rightarrow M'_{n+1}$ ) le monomorphisme canonique.

On construit par récurrence  $g_0 = \text{MR}f : M_0 \rightarrow M'_0$ ,  $h_0 : \text{Ker } \varepsilon_0 \rightarrow \text{Ker } \varepsilon'_0$  induit par  $g_0$  puis, pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $g_{n+1} = \text{MR}h_n : M_{n+1} \rightarrow M'_{n+1}$  et  $h_{n+1} : \text{Ker } \varepsilon_{n+1} \rightarrow \text{Ker } \varepsilon'_{n+1}$  le morphisme induit par  $g_{n+1}$ .

On pose alors  $\text{Resol}(f)^n = g^{-n}$  si  $n \leq 0$  et  $\text{Resol}(f)^n = 0$  si  $n > 0$ . La famille  $(\text{Resol}(f)^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes. De plus, on a le diagramme commutatif dans  $\text{Com}(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{ccc} \text{Resol}(X) & \xrightarrow{\varepsilon_0} & X \\ \text{Resol}(f) \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Resol}(X') & \xrightarrow{\varepsilon'_0} & X' \end{array} \quad (*)$$

On définit ainsi un foncteur

$$\text{Resol} : \begin{cases} \mathcal{A} \longrightarrow \text{Com}(\mathcal{A}) \\ X \longmapsto \text{Resol}(X) \\ f \longmapsto \text{Resol}(f). \end{cases}$$

et une transformation naturelle donnée par  $\varepsilon_0$  entre le foncteur  $\text{Resol}$  et le foncteur d'inclusion en degré 0 de  $\mathcal{A}$  dans  $\text{Com}(\mathcal{A})$ .

**Preuve.** Montrons que  $h_0$  est bien défini. Comme  $\varepsilon$  est une transformation naturelle de  $\text{MR}$  dans  $\text{id}_{\mathcal{A}}$ , on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } \varepsilon_0 & \xrightarrow{j_0} & M_0 & \xrightarrow{\varepsilon_0} & X \\ \downarrow h_0 & & \downarrow \text{MR}f & & \downarrow f \\ \text{Ker } \varepsilon'_0 & \xrightarrow{j'_0} & M'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'_0} & X' \end{array} \quad (1)$$

Ainsi  $\varepsilon'_0 \text{MR}f j_0 = f \varepsilon_0 j_0 = 0$  et donc  $\text{MR}f j_0$  se factorise par  $\text{Ker } \varepsilon'_0$  en  $h_0$ .

Montrons à présent l'hérité de la construction : on a donc  $h_n : \text{Ker } \varepsilon_n \rightarrow \text{Ker } \varepsilon'_n$ . Comme  $M_{n+1} = \text{MRKer } \varepsilon_n$  et  $M'_{n+1} = \text{MRKer } \varepsilon'_n$ , et que  $\varepsilon$  est une transformation naturelle de  $\text{MR}$  dans  $\text{id}_{\mathcal{A}}$ , on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } \varepsilon_{n+1} & \xrightarrow{j_{n+1}} & M_{n+1} & \xrightarrow{\varepsilon_{n+1}} & \text{Ker } \varepsilon_n \\ \downarrow h_{n+1} & & \downarrow \text{MR}h_n = g_{n+1} & & \downarrow h_n \\ \text{Ker } \varepsilon'_{n+1} & \xrightarrow{j'_{n+1}} & M'_n & \xrightarrow{\varepsilon'_{n+1}} & \text{Ker } \varepsilon'_n \end{array} \quad (2)$$

Ainsi, comme ci-dessus, on a  $\varepsilon'_{n+1} g_n j_{n+1} = h_n \varepsilon_{n+1} j_{n+1} = 0$ . On en déduit que  $g_{n+1}$  se factorise de façon unique par  $\text{Ker } \varepsilon'_{n+1}$  en  $h_{n+1}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $d_n = j_{n-1} \varepsilon_n : M_n \rightarrow M_{n-1}$  (resp.  $d'_n : M'_n \rightarrow M'_{n-1}$ ) la différentielle du complexe  $\text{Resol}(X)$  (resp.  $\text{Resol}(X')$ ). Pour montrer que  $\text{Resol}(f)$  est un morphisme de complexes, il suffit de montrer que  $d'_n g_n = g_{n-1} d_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  (les autres égalités sont vérifiées puisque les espaces d'arrivées sont 0). Or, par construction de  $g_n$ , on a  $d'_n g_n = j'_{n-1} \varepsilon'_n g_n = j'_{n-1} h_{n-1} \varepsilon_n$ . La construction de  $h_{n-1}$  donne alors  $d'_n g_n = j'_{n-1} h_{n-1} \varepsilon_n = g_{n-1} j_{n-1} \varepsilon_n = g_n d_n$ .

Pour la commutativité du diagramme  $(*)$ , il suffit de regarder ce qui se passe en degré 0 puisque pour les autres degrés, la composante de  $X'$  est nulle. En degré 0, il s'agit alors de l'égalité  $f \varepsilon_0 = \varepsilon'_0 \text{MR}f$  qui provient du fait que  $\varepsilon$  est une transformation naturelle.

Montrons à présent qu'on a bien défini un foncteur. Si  $X' = X$  et  $f = \text{id}_X$  alors  $\text{MRid}_X = \text{id}_{\text{MR}X}$  et  $\text{id}_{\text{Ker } \varepsilon_0}$  fait commuter le diagramme  $(1)$ . Ainsi par unicité  $h_0 = \text{id}_{\text{Ker } \varepsilon_0}$ . On suppose alors que  $g_n = \text{id}_{M_n}$  et  $h_n = \text{id}_{\text{Ker } \varepsilon_n}$ . On a alors  $g_{n+1} = \text{MR}h_n = \text{id}_{M_{n+1}}$  et  $\text{id}_{\text{Ker } \varepsilon_{n+1}}$  fait commuter le diagramme  $(2)$ . Ainsi  $h_{n+1} = \text{id}_{\text{Ker } \varepsilon_{n+1}}$ . Enfin, pour les composantes homogènes de degré positif, on a  $\text{Resol}(f)^n = 0 = \text{id}_{\text{Resol}(X)^n}$  puisque les composantes homogènes sont nulles. Ainsi  $\text{Resol}(\text{id}_X) = \text{id}_{\text{Resol}(X)}$ .

Enfin, soient  $X'' \in \mathcal{A}$  et  $f' : X' \rightarrow X''$ . Montrons que  $\text{Resol}(f') \text{Resol}(f) = \text{Resol}(f' f)$ . On définit à présent  $M''_0 = \text{MR}X''$ ,  $\varepsilon''_0 = \varepsilon_{X''}^R$  et  $j_0 : \text{Ker } \varepsilon''_0 \rightarrow \text{MR}X''$  le monomorphisme canonique puis pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $M''_{n+1} = \text{MRKer } \varepsilon''_n$ ,  $\varepsilon''_{n+1} = \varepsilon_{\text{Ker } \varepsilon''_n}^R$  et  $j''_{n+1} : \text{Ker } \varepsilon''_{n+1} \rightarrow M''_{n+1}$  le monomorphisme canonique. On définit alors  $g'_0 = \text{MR}f'$ ,  $h_0 : \text{Ker } \varepsilon'_0 \rightarrow \text{Ker } \varepsilon''_0$  induite par  $g'_0$  puis, pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $g''_{n+1} = \text{MR}h'_n : M'_{n+1} \rightarrow M''_{n+1}$  et  $h''_{n+1} : \text{Ker } \varepsilon'_{n+1} \rightarrow \text{Ker } \varepsilon''_{n+1}$  le morphisme induit par  $g''_{n+1}$  et  $g''_0 = \text{MR}f' f$ ,  $h''_0 : \text{Ker } \varepsilon_0 \rightarrow \text{Ker } \varepsilon''_0$  induite par  $g'_0$

puis, pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $g''_{n+1} = \text{MR}h''_n : M_{n+1} \rightarrow M''_{n+1}$  et  $h''_{n+1} : \text{Ker } \varepsilon_{n+1} \rightarrow \text{Ker } \varepsilon''_{n+1}$  le morphisme induit par  $g''_{n+1}$ .

En degré 0, par fonctorialité, on a  $g'_0 g_0 = \text{Resol}(f' f)^0$ . Par ailleurs,  $h'_0 h_0$  fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } \varepsilon_0 & \xrightarrow{j_0} & M_0 & \xrightarrow{\varepsilon_0} & X \\ \downarrow h'_0 h_0 & & \downarrow \text{MR}f & & \downarrow f \\ \text{Ker } \varepsilon''_0 & \xrightarrow{j''_0} & M''_0 & \xrightarrow{\varepsilon''_0} & X'' \end{array}$$

Ainsi  $h''_0 = h'_0 h_0$ . De plus, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a, par fonctorialité  $g''_{n+1} = g'_{n+1} g_{n+1}$ . Enfin  $h'_{n+1} h_{n+1}$  fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } \varepsilon_{n+1} & \xrightarrow{j_{n+1}} & M_{n+1} & \xrightarrow{\varepsilon_{n+1}} & \text{Ker } \varepsilon_n \\ \downarrow h'_{n+1} h_{n+1} & & \downarrow \text{MR}h_n = g_{n+1} & & \downarrow h_n \\ \text{Ker } \varepsilon''_{n+1} & \xrightarrow{j''_{n+1}} & M''_{n+1} & \xrightarrow{\varepsilon''_{n+1}} & \text{Ker } \varepsilon''_n \end{array}$$

Par unicité, on en déduit  $h''_{n+1} = h'_{n+1} h_{n+1}$ . Finalement, on obtient bien la fonctorialité. ■

Le lemme et la remarque qui suivent font le lien entre la catégorie homotopique des objets M-split et la catégorie  $\mathcal{A}$ .

**Lemme 4.44 — Relèvement de morphismes.** Soient  $X, X'$  deux objets de  $\mathcal{A}$  et  $(P, f)$  (resp.  $(P', f')$ ) une M-résolution de  $X$  (resp.  $X'$ ) nulle en degré strictement positif. L'application

$$H^0 : \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{ht}}(P, P') \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X') \\ \varphi \longmapsto H^0(\varphi) \end{cases}$$

est une bijection.

**Preuve.** Comme  $(P, f)$  (resp.  $(P', f')$ ) est une résolution de  $X$  (resp.  $X'$ ), le morphisme  $f$  (resp.  $f'$ ) induit par passage au quotient un isomorphisme entre  $H^0(P)$  et  $X$  (resp.  $H^0(P')$  et  $X'$ ). Ainsi, on peut identifier  $H^0(\varphi)$  à l'unique application faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P^0 & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow \varphi^0 & & \downarrow H^0(\varphi) \\ P'^0 & \xrightarrow{f'} & X' \end{array}$$

Ainsi l'application  $H^0$  est bien définie. De plus, la propriété d'unicité assure que c'est un morphisme R-linéaire.

Montrons à présent la bijectivité. Commençons par la surjectivité. Soit  $u : X \rightarrow X'$ . Par hypothèse,  $Rf'$  admet une section. Ainsi la projectivité relative de  $P^0$  assure qu'il existe l'existence de  $\varphi^0 : P^0 \rightarrow P'^0$  telle que  $uf = f'\varphi^0$ . On en déduit alors l'existence (et l'unicité) de  $\alpha^0 : \text{Ker } f \rightarrow \text{Ker } f'$  telle que  $i'\alpha^0 = \varphi^0 i$  où  $i : \text{Ker } f \rightarrow P^0$  (resp.  $i' : \text{Ker } f' \rightarrow P'^0$ ) désigne le monomorphisme canonique. Or  $\text{Ker } f = \text{Im } d_P^{-1}$  et  $\text{Ker } f' = \text{Im } d_{P'}^{-1}$  puisque  $(P, f)$  et  $(P', f')$  sont des résolutions. On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & P^{-1} \\ & & \downarrow \alpha^0 d \\ P'^{-1} & \xrightarrow{d'} & \text{Im } d_P^{-1} \end{array}$$

où  $d : P^{-1} \rightarrow \text{Im } d_P^{-1}$  (resp.  $d' : P'^{-1} \rightarrow \text{Im } d_{P'}^{-1}$ ) désigne l'unique morphisme tel que  $d_P^{-1} = id$  (resp.  $d_{P'}^{-1} = i'd'$ ). Montrons que  $Rd'$  admet une section. Par hypothèse, il existe  $t$  tel que  $Rd_{P'}^{-1} t R d_P^{-1} = R d_{P'}^{-1}$ . On a donc  $Ri' R d' t R i' R d' = R i' R d'$ . Or R est exact donc  $Ri'$  est un monomorphisme et  $Rd'$  un épimorphisme. Ainsi  $Rd'(t R i') = id$ . La projectivité relative de  $P^{-1}$  assure alors l'existence de  $\varphi^{-1} : P^{-1} \rightarrow P'^{-1}$  tel que  $d' \varphi^{-1} = \alpha^0 d$ . En composant par  $i'$ , on obtient  $d_{P'}^{-1} \varphi^{-1} = \varphi^0 d_P^{-1}$ .

Supposons à présent  $n < -1$  et que  $\varphi^{n+1}$  est construit tel que  $d_P^{n+1} \varphi^{n+1} = \varphi^{n+2} d_P^{n+1}$ . On en déduit l'existence de  $\alpha : \text{Ker } d_P^{n+1} \rightarrow \text{Ker } d_{P'}^{n+1}$  telle que  $i'\alpha = \varphi^{n+1} i$  où  $i : \text{Ker } d_P^{n+1} \rightarrow P^{n+1}$  (resp.  $i' : \text{Ker } d_{P'}^{n+1} \rightarrow P'^{n+1}$ ) désigne le monomorphisme canonique. Or  $\text{Ker } d_P^{n+1} = \text{Im } d_P^n$  et  $\text{Ker } d_{P'}^{n+1} = \text{Im } d_{P'}^n$  puisque  $(P, f)$  et  $(P', f')$  sont des résolutions (et  $n \neq -1$ ). On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} P^n & & \\ \downarrow \alpha d & & \\ P'^n & \xrightarrow{d'} & \text{Im } d_{P'}^n \end{array}$$

où  $d : P^n \rightarrow \text{Im } d_P^n$  (resp.  $d' : P'^n \rightarrow \text{Im } d_{P'}^n$ ) désigne l'unique morphisme tel que  $d_P^n = id$  (resp.  $d_{P'}^n = i'd'$ ). Montrons que  $Rd'$  admet une section. Par hypothèse, il existe  $t$  tel que  $Rd_P^n t R d_{P'}^n = Rd_{P'}^n$ . On a donc  $Ri' Rd' t Ri' Rd' = Ri' Rd'$ . Or  $R$  est exact donc  $Ri'$  est un monomorphisme et  $Rd'$  un épimorphisme. Ainsi  $Rd'(tRi') = id$ . La projectivité relative de  $P^n$  assure alors l'existence de  $\varphi^n : P^n \rightarrow P'^n$  tel que  $d' \varphi^n = \alpha d$ . En composant par  $i'$ , on obtient  $d_{P'}^n \varphi^n = \varphi^{n+1} d_P^n$ .

En posant  $\varphi^n = 0$  si  $n > 0$ , on a construit  $\varphi = (\varphi^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  un morphisme de complexes de  $P$  dans  $P'$ . De plus la relation  $uf = f' \varphi^0$  assure que  $u = H^0(\varphi)$  et donc la surjectivité de  $H^0$ .

Montrons l'injectivité de  $H^0$ . On suppose que  $H^0(\varphi) = 0$ . Montrons que  $\varphi$  est une homotopie. On cherche donc à construire une famille  $(s^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  telle que  $\varphi^n = s^n d_P^n + d_{P'}^{n-1} s^{n-1}$ . On pose  $s^n = 0$  pour  $n \geq 0$ . On a bien sûr  $\varphi^n = s^n d_P^n + d_{P'}^{n-1} s^{n-1} = 0$  pour  $n \geq 1$ . Par hypothèse, on a  $f' \varphi^0 = 0$ . Ainsi  $\varphi^0$  se factorise en  $\alpha$  par  $\text{Ker } f' = \text{Im } d_{P'}^1$ . On reprend les notations ci-dessus,  $Rd'$  admet une section. La projectivité relative de  $P^0$  assure l'existence de  $s^0$  tel que  $d' s^{-1} = \alpha$ . En composant par  $i'$ , on obtient

$$\varphi^0 = d_{P'}^{-1} s^{-1} = d_{P'}^{-1} s^{-1} + s^0 d_P^0.$$

On suppose à présent  $n < -1$  et  $s^{n+1}$  construit tel que  $\varphi^{n+2} = s^{n+2} d_P^{n+2} + d_{P'}^{n+1} s^{n+1}$ . On considère alors  $u = \varphi^{n+1} - s^{n+1} d_P^{n+1}$ . On a alors

$$d_{P'}^{n+1} u = d_{P'}^{n+1} \varphi^{n+1} - d_{P'}^{n+1} s^{n+1} d_P^{n+1} = \varphi^{n+2} d_P^{n+1} - d_{P'}^{n+1} s^{n+1} d_P^{n+1} = s^{n+2} d_P^{n+2} d_P^{n+1} = 0.$$

Ainsi  $u$  se factorise en  $\alpha$  par  $\text{Ker } d_{P'}^{n+1} = \text{Im } d_{P'}^n$ . Toujours avec les notations de ci-dessus,  $Rd'$  admet une section. La projectivité relative de  $P^{n+1}$  assure l'existence de  $s^n : P^{n+1} \rightarrow P^n$  tel que  $d' s^n = \alpha$ . En composant par  $i'$ , on obtient  $d_P^n s^n = u = \varphi^{n+1} - s^{n+1} d_P^{n+1}$ . Finalement  $\varphi$  est bien une homotopie et le noyau de  $H^0$  est réduit à 0. ■

**Remarque 4.45 — Fonctorialité et résolution M-canonique.** Soient  $X, X'$  deux objets de  $\mathcal{A}$ ,  $\text{Resol}(X)$  et  $\text{Resol}(X')$  les résolutions M-canonique de  $X$  et  $X'$ . Montrons que l'application

$$\text{Resol}: \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X') \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}^{\text{ht}}}(\text{Resol}(X), \text{Resol}(X')) \\ f \longmapsto \text{Resol}(f) \end{cases}$$

est la bijection réciproque de l'application  $H^0$ .

Pour  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')$ , on a  $H^0 \text{Resol}(f) = f$  puisque  $f$  vérifie  $f \varepsilon_X = \varepsilon_{X'} M R f = \varepsilon_{X'} \text{Resol}(f)^0$ . On en déduit que  $H^0 \text{Resol} H^0(\varphi) = H^0(\varphi)$  pour tout  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\text{Resol}(X), \text{Resol}(X'))$ . Par injectivité de  $H^0$ , on en déduit que  $\text{Resol} H^0 = id$ . ■

### 4.3.3 THÉORÈME DE RICKARD

On est maintenant prêt pour généraliser le théorème de Rickard. C'est l'objectif de cette sous-section. On commence par énoncer deux lemmes qui serviront lors de la démonstration. L'énoncé de la proposition 4.49 fait intervenir une hypothèse supplémentaire par rapport aux hypothèses 4.14 : la catégorie  $K^b(M)$  doit être une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$ . Cette hypothèse supplémentaire est discutée après la démonstration de la proposition 4.49. En particulier, elle est vérifiée si  $\mathcal{A}$  admet des sommes directes infinies.

**Notation 4.46** On note  $K^b(M)$  la catégorie homotopique bornée de la catégorie additive des objets M-split de  $\mathcal{A}$ . C'est une sous-catégorie R-triangulée de la catégorie  $\text{Com}(\mathcal{A})^{\text{ht}}$  puisque le translaté d'un complexe borné d'objets M-split est un complexe borné d'objets M-split, que le cône d'un morphisme entre complexes bornés d'objets M-split est un complexe borné d'objets M-split.

**Lemme 4.47 — Complexe d'objets M-split et catégorie dérivée.** Le foncteur canonique  $i : K^b(M) \rightarrow \mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  est pleinement fidèle.

**Preuve.** Il s'agit d'une conséquence immédiate de la remarque 4.38. ■

**Lemme 4.48 — Foncteur pleinement fidèle.** Le foncteur canonique  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  est pleinement fidèle.

**Preuve.** Soient  $X, X' \in \mathcal{A}$ . On considère la composée de  $\text{Resol}$  avec la localisation de  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')$  dans  $\text{Hom}_{\mathcal{D}_M^-(\mathcal{A})}(\text{Resol}(X), \text{Resol}(X'))$ . D'après les remarques 4.38 et 4.45, elle est bijective.

On reprend les notations de la proposition-définition 4.43. Par définition, les morphismes  $\varepsilon_0 : \text{Resol}(X) \rightarrow X$  et  $\varepsilon'_0 : \text{Resol}(X') \rightarrow X'$  sont des isomorphismes dans  $\mathcal{D}_M^-(\mathcal{A})$ , on en déduit alors, par composition, un isomorphisme entre  $\text{Hom}_{\mathcal{D}_M^-(\mathcal{A})}(\text{Resol}(X), \text{Resol}(X'))$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{D}_M^-(\mathcal{A})}(X, X')$ .

En composant les deux isomorphismes qui précédent, le diagramme commutatif (\*) de la proposition-définition 4.43 montre que le foncteur canonique  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}_M^-(\mathcal{A})$  est pleinement fidèle. Or ce foncteur est le composé de  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  et de  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}_M^-(\mathcal{A})$ . Ce dernier foncteur étant pleinement fidèle (voir [GRI, corollaire 6.2]), le foncteur canonique  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  est pleinement fidèle. ■

**Théorème 4.49 — Théorème de Rickard.** On considère la catégorie triangulée quotient (au sens de Verdier) donnée par  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})/\text{K}^b(M)$  et  $\theta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})/\text{K}^b(M)$  le foncteur canonique.

Le foncteur  $\theta$  passe au quotient. De plus, si  $\text{K}^b(M)$  est une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  alors  $\theta$  induit une équivalence de catégories A-triangulées entre  $\text{MStab}_{\mathcal{A}}$  et  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})/\text{K}^b(M)$ .

**Preuve.** Commençons par montrer que  $\theta$  passe au quotient. Pour cela, on commence par montrer que  $\theta(P) = 0$  pour tout objet  $P$  qui est M-split. Soit  $P$  un objet M-split. On a  $\theta(P) = 0$  puisque le complexe dont toutes les composantes homogènes sont nulles sauf celle de degré 0 qui est  $P$  est évidemment un complexe borné d'objets M-split. On en déduit que  $\theta$  passe au quotient. En effet, si  $f : X \rightarrow X'$  se factorise par un objet M-split  $P$  alors  $\theta(f)$  se factorise par 0 dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})/\text{K}^b(M)$ . Ainsi  $\theta$  définit un foncteur A-linéaire entre  $\text{MStab}_{\mathcal{A}}$  et  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})/\text{K}^b(M)$ .

Montrons de plus que si  $X \in \mathcal{A}$  vérifie  $\theta(X) = 0$  alors  $X$  est M-split. Supposer que  $\theta(X)$  est nul est équivalent au fait que  $\text{id}_{\theta(X)} = 0$  ou encore que  $\theta(\text{id}_X) = 0$ . En mimant la démonstration du lemme 4.3, on en déduit que  $\text{id}_X$  se factorise dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  par un complexe borné d'objets M-split : il existe  $P$  complexe borné d'objets M-split et  $f : X \rightarrow P$  et  $g : P \rightarrow X$  deux morphismes dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  tel que  $gf = \text{id}_X$ . En particulier, on en déduit que  $f$  est un monomorphisme dans la catégorie  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$ . Comme la catégorie  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  est triangulée, le corollaire 3.51 assure alors que  $X$  est facteur direct de  $P$  dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$ . Comme  $\text{K}^b(M)$  est, par hypothèse, une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$ , on en déduit un isomorphisme  $\gamma$  dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  entre  $X$  et un complexe borné d'objets M-split  $Q$ . Comme  $\gamma$  est un isomorphisme et que  $\text{Ker } R$  est une sous-catégorie épaisse, on obtient le diagramme suivant décrivant  $\gamma$  :

$$X \xrightarrow{g} Y \xleftarrow{h} Q \quad \text{avec} \quad \text{RC}(g), \text{RC}(h), \text{LC}(g), \text{LC}(h) \text{ contractile.}$$

Or  $\text{RC}(g) = \text{C}(Rg)$ ,  $\text{RC}(h) = \text{C}(Rh)$ ,  $\text{LC}(g) = \text{C}(L(g))$  et  $\text{LC}(h) = \text{C}(L(h))$  (voir la remarque 3.85), on en déduit que  $Rg$ ,  $Lg$ ,  $Rh$  et  $Rh$  sont des isomorphismes dans  $\mathcal{B}^{\text{ht}}$  (voir le corollaire 3.91). On a donc un isomorphisme entre  $RX$  et  $RQ$  (resp. entre  $LX$  et  $LQ$ ) dans  $\mathcal{B}^{\text{ht}}$ . En particulier,  $RQ$  (resp.  $LQ$ ) est scindé puisque  $RX$  (resp.  $LX$ ) est à différentielle nulle. De plus, comme  $R$  est exact, on a  $H^i(RX) = RH^iX = 0$  pour  $i \neq 0$  et donc, comme  $R$  est fidèle et exact,  $H^i(X) = 0$  si  $i \neq 0$  (voir le lemme 3.35). La proposition 4.39 donne alors que  $Q$  est scindé et  $H^0(Q) = X$  est facteur direct de  $Q^0$  et donc est M-split.

Montrons que  $\theta$  est triangulé. Commençons par montrer que  $\theta$  commute avec les décalages. Par définition de  $\Omega$ , on a la suite exacte  $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\eta_X^L} \text{MLX} \xrightarrow{\pi_X} \Omega X \longrightarrow 0$  qui est L-split. La proposition 7.1 de [GRI] assure alors que  $X \xrightarrow{\eta_X^L} \text{MLX} \xrightarrow{\pi_X} \Omega X \xrightarrow{\alpha_X} X[1]$  est un triangle distingué dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$ . Comme  $\text{MLX}$  est un complexe borné d'objet M-split, on en déduit le triangle distingué  $X \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \Omega X \xrightarrow{\alpha_X} X[1]$  dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})/\text{K}^b(M)$ . On obtient ainsi, grâce au corollaire 3.47, l'isomorphisme souhaité entre  $\Omega X$  et  $X[1]$  dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})/\text{K}^b(M)$ . De plus, la construction du triangle distingué à partir d'une suite exacte étant fonctorielle en les suites exactes, on en déduit que l'isomorphisme décrit ci-dessus est bien un morphisme de foncteurs. Pour un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$ , on pose  $\beta_X = -\alpha_X$ . On choisit alors  $\beta = (\beta_X)_X$  comme isomorphisme naturel entre les foncteurs  $\Omega$  et  $\bullet[1]$ .

Considérons à présent  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Omega X$  un triangle standard dans  $\text{M-Stab}_{\mathcal{A}}$ . Il s'agit de montrer que  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\beta_X h} X[1]$  est un triangle distingué dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})/\text{K}^b(M)$ . D'après le corollaire 3.45, il suffit de montrer que  $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\beta_X h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$  est un triangle distingué dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})/\text{K}^b(M)$ . Grâce à la remarque 3.38, il suffit de montrer que  $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\alpha_X h} X[1] \xrightarrow{f[1]} Y[1]$  est un triangle distingué dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})/\text{K}^b(M)$ . Or on a l'isomorphisme de triangles

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Omega X & \xrightarrow{f[1]\alpha_X} & Y[1] \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow \alpha_X & & \parallel \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{\alpha_X h} & X[1] & \xrightarrow{f[1]} & Y[1]
 \end{array}$$

Il suffit donc de montrer que  $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Omega X \xrightarrow{f[1]\alpha_X} Y[1]$  est un triangle distingué de  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})/K^b(M)$ .

Comme  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Omega X$  est un triangle standard, grâce à la remarque 4.28, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\eta_X^L} & MLX & \xrightarrow{\pi_X} & \Omega X \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Omega X \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où  $Z$  est la somme amalgamée de  $Y$  et  $MLX$  au-dessus de  $f$  et  $\eta_X^L$  et où les lignes sont exactes. La fonctorialité de la construction d'un triangle distingué de  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  à partir d'une suite exacte (voir la proposition 7.1 de [GRI]) appliquée aux suites exactes ci-dessus montre que  $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Omega X \xrightarrow{f[1]\alpha_X} Y[1]$  est un triangle distingué de  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})/K^b(M)$ .

Considérons un triangle distingué (non nécessairement standard)  $T$  dans  $M\text{-Stab}_{\mathcal{A}}$ . Il est isomorphe à un triangle standard  $T_1$ . L'image de  $T_1$  par  $\theta$  est un triangle distingué d'après ce qui précède qui est isomorphe à l'image de  $T$  par  $\theta$ . Ainsi l'image de  $T$  par  $\theta$  est un triangle distingué. Finalement  $\theta$  est bien triangulé.

Montrons que  $\theta$  est plein. Considérons donc  $X, Y$  deux objets de  $\mathcal{A}$  et un morphisme de  $X$  dans  $Y$  dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})/K^b(M)$ . Un morphisme de  $X$  dans  $Y$  dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})/K^b(M)$  est la donnée d'un objet  $Z \in \mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})/K^b(M)$  et d'un couple de morphismes de  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$   $f : X \rightarrow Z$  et  $g : Y \rightarrow Z$  tels que le triangle distingué construit sur  $g$

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{u} P \xrightarrow{v} Y[1]$$

soit tel que  $P$  soit un complexe borné d'objets  $M$ -split. On en déduit alors que le triangle

$$P[-1] \xrightarrow{-v[-1]} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{u} P$$

est distingué. D'après le corollaire 4.37,  $-v[-1]$  se relève en un morphisme dans la catégorie homotopique. On définit alors le complexe  $Q$  donné par  $Q^i = P[-1]^i$  si  $i \leq 0$  et  $Q^i = 0$  si  $i > 0$  et  $d_Q^i = d_{P[-1]}^i$  si  $i < 0$  et  $d_Q^i = 0$  si  $i \geq 0$  (c'est la troncation naïve de  $P[-1]$  en degré 0). De plus, en posant  $h^i = \text{id}_{Q^i}$  si  $i \leq 0$  et  $h^i = 0$  si  $i = 0$ , on obtient le morphisme de complexes  $h = (h^i)_{i \in \mathbb{Z}} : P[-1] \rightarrow Q$ . On pose alors  $\tilde{v}^i = -v[-1]^i$  pour  $i \leq 0$  et  $\tilde{v}^i = 0 : 0 \rightarrow 0$  si  $i > 0$ . Comme  $Y$  est concentré en degré 0, on obtient le diagramme commutatif suivant dans la catégorie homotopique

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xlongequal{\quad} & Y \\
 \uparrow -v[-1] & & \uparrow \tilde{v} \\
 P[-1] & \xrightarrow{h} & Q
 \end{array}$$

On complète alors  $\tilde{v}$  en un triangle distingué dans la catégorie homotopique :  $Q \xrightarrow{\tilde{v}} Y \xrightarrow{\alpha} W \xrightarrow{\beta} Q[1]$ . Dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$ , on a alors, grâce à l'axiome T5, le diagramme commutatif,

$$\begin{array}{ccccccc}
 P[-1] & \xrightarrow{-v[1]} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{u} & P \\
 \downarrow h & \parallel & \downarrow & & \downarrow \gamma & & \downarrow f[1] \\
 Q & \xrightarrow{\tilde{v}} & Y & \xrightarrow{\alpha} & W & \xrightarrow{\beta} & Q[1]
 \end{array}$$

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & & \\
 & \nearrow f & \downarrow \gamma & \searrow g & \\
 X & \xrightarrow{\gamma f} & W & \xleftarrow{\alpha} & Y
 \end{array}$$

et le triangle distingué  $Q \xrightarrow{\tilde{v}} Y \xrightarrow{\alpha} W \xrightarrow{\beta} Q[1]$  assure que le couple  $(f, g)$  et le couple  $(\gamma f, \alpha)$  représentent le même morphisme dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})/K^b(M)$  puisque  $Q[1]$  est un complexe borné d'objets  $M$ -split. De plus, on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & & \downarrow \gamma f & & \\
 Y & \xrightarrow{\alpha} & W & \xrightarrow{\beta} & Q[1]
 \end{array}$$

avec  $\beta\gamma f : X \rightarrow Q[1]$ . D'après le corollaire 4.37,  $\beta\gamma f$  provient d'un morphisme dans la catégorie homotopique. Or  $X$  est concentré en degré 0 et  $Q[1]$  en degré strictement négatifs. On en déduit que  $\beta\gamma f = 0$ . La proposition 3.43 assure alors que  $\gamma f$  se factorise par  $Y$  : il existe  $\kappa : X \rightarrow Y$  tel que  $\gamma f = \alpha\kappa$ . Finalement, le morphisme  $\kappa$  représente le morphisme  $(\gamma f, \alpha) = (f, g)$ . Comme le foncteur canonique  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  est pleinement fidèle (voir le lemme 4.48), on obtient que le foncteur  $\theta$  est plein.

Montrons que  $\theta$  est fidèle. Soit  $f : X \rightarrow Y$  tel que  $\theta(f) = 0$ . On considère un triangle construit sur  $f$  :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Omega X.$$

Comme  $\theta$  est un foncteur triangulé, on obtient le triangle

$$\theta(X) \xrightarrow{0} \theta(Y) \xrightarrow{\theta(g)} \theta(Z) \xrightarrow{\theta(h)} \theta(X)[1].$$

Le corollaire 3.51 assure alors qu'il existe  $v : \theta(Z) \rightarrow \theta(Y)$  tel que  $v\theta(g) = \text{id}_{\theta(Y)}$ . Comme  $\theta$  est plein, on peut écrire  $v = \theta(u)$ . On considère alors le triangle construit sur  $ug$  :

$$Y \xrightarrow{ug} Y \longrightarrow W \longrightarrow \Omega(Y).$$

Son image par  $\theta$  donne alors le triangle

$$\theta(Y) \xrightarrow{\text{id}_{\theta(Y)}} \theta(Y) \longrightarrow \theta(W) \longrightarrow \theta(Y)[1].$$

Le corollaire 3.47 assure alors que  $\theta(W) = 0$ . D'après ce qu'on a vu plus haut, on en déduit que  $W = 0$ . Toujours grâce au lemme 3.47, on en déduit que  $ug$  est un isomorphisme. En particulier,  $g$  est un monomorphisme. Le corollaire 3.51 assure alors que  $f = 0$ .

Montrons que  $\theta$  est essentiellement surjectif. Raisonnons par récurrence sur  $n$  pour montrer qu'un complexe de longueur  $n$  est dans l'image essentielle de  $\theta$ . Pour  $n \leq 1$ , c'est la définition de  $\theta$ . Supposons le résultat vrai pour les complexes de longueur  $n - 1$ . On considère alors un complexe  $X$  :

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^1 \xrightarrow{d_X^1} X^2 \xrightarrow{d_X^2} \cdots \longrightarrow X^n \longrightarrow 0 \longrightarrow$$

de longueur  $n$ . Comme  $d_X^{n-1}(-d_X^{n-2}) = 0$ , on a le morphisme de complexes  $d$  donné par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^1 & \xrightarrow{-d_X^1} & X^2 \xrightarrow{-d_X^2} \cdots \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\
 & & & & \downarrow d_X^{n-1} & & \\
 & & & & \cdots & \longrightarrow & 0 \longrightarrow X^n \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

dont le cône est  $X$ . Par hypothèse de récurrence, il existe  $Y \in \mathcal{A}$  tel que  $\theta(Y)$  soit le complexe

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow X^1 \xrightarrow{-d_X^1} X^2 \xrightarrow{-d_X^2} \cdots \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow 0 \longrightarrow$$

Or on a le triangle distingué dans  $\mathcal{A}^{\text{ht}^b}$  :  $\theta(Y) \xrightarrow{d} \theta(X^n) \longrightarrow X \longrightarrow \theta(Y)[1]$  qui donne aussi un triangle distingué dans  $\mathcal{D}_M(\mathcal{A})/K^b(M)$ . De plus comme  $\theta$  est plein, il existe  $f : Y \rightarrow X^n$  tel que  $\theta(f) = d$ . On considère alors le triangle construit sur  $f$  dans  $M\text{Stab}_{\mathcal{A}}$  :

$$Y \xrightarrow{f} X^n \longrightarrow Z \longrightarrow Y[1]$$

Comme  $\theta$  est un foncteur triangulé, on en déduit que  $\theta(Z)$  est isomorphe à  $X$  dans  $\mathcal{D}_M(\mathcal{A})/K^b(M)$ . Ainsi  $X$  appartient à l'image essentielle de  $\theta$ . ■

### SOUS-CATÉGORIE ÉPAISSE

Dans la proposition 4.49, on a vu apparaître l'hypothèse  $K^b(M)$  est une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  (qui intervient pour montrer que les seuls objets de  $\mathcal{A}$  annulés par  $\theta$  sont les objets M-splits). Dans ce qui suit, on montre, grâce à la caractérisation du lemme 4.50, qu'elle est vérifiée lorsque  $\mathcal{A}$  admet des sommes directes dénombrables. Enfin, on termine en donnant une autre condition dans le cas où  $\mathcal{A}$  est la catégorie des modules de type fini sur un anneau noethérien.

**Lemme 4.50 — Complexes M-parfaits.** On suppose que  $\mathcal{A}$  admet des sommes directes dénombrables. Soit  $(X, d_X)$  un complexe borné. On a l'équivalence

- (i)  $X$  est isomorphe dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  à un complexe borné d'objets M-split ;  
(ii) Pour tout  $(Y, d_Y)$  complexe borné, il existe  $N \in \mathbb{Z}$  tel que  $\text{Hom}_{\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})}(X, Y[n]) = 0$  pour tout  $n \geq N$ .

**Preuve.** (i)  $\Rightarrow$  (ii). D'après le corollaire 4.37, on a  $\text{Hom}_{\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})}(X, Y[n]) = \text{Hom}_{\mathcal{A}^{\text{ht}}}(X, Y[n])$ . Or pour  $n$  suffisamment grand,  $\text{Hom}_{\mathcal{A}^{\text{ht}}}(X, Y[n])$  est évidemment nul.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). On raisonne par contraposition. On suppose donc que  $(X, d_X)$  n'est pas isomorphe (dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$ ) à un complexe borné d'objet M-split. D'après le théorème 5.3 de Grime, on peut remplacer  $X$  par une M-résolution  $(P, d_P)$  formée d'objets M-split.

Comme  $(X, d_X)$  est un complexe borné, il existe  $N$  tel que  $X^n = 0$  pour tout  $n < N$ . Supposons qu'il existe  $n < N$  tel que  $B^n(P) = \text{Im } d_P^{n-1}$  est un objet M-split. Montrons que le complexe  $\tilde{\tau}^{\geq n}P$  donné par

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{Im } d_P^{n-1} \longrightarrow P^n \xrightarrow{d_P^n} P^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

où  $P^n$  est en degré  $n$  est une M-résolution de  $X$ . Tout d'abord, par hypothèse,  $\tilde{\tau}^{\geq n}P$  est formé d'objets M-split. Comme  $n < N$ , on a  $\tilde{\tau}^{\geq n}X = X$  et donc, en tronquant, on obtient un morphisme de complexes de  $\tilde{\tau}^{\geq n}P$  dans  $X$ . Montrons que le cône de ce morphisme de complexes est R-contractile. Pour cela, en comparant au cône du morphisme  $f$  de  $P$  dans  $X$ , il suffit de regarder en degré  $n-1$  et  $n-2$ . Par hypothèse, il existe  $s, s'$  tels que  $\text{id}_{RP^n} = s(d_{RC(f)}^n) + (-Rd_P^{n-1})s'$ . On note alors  $i : \text{Im } d_P^{n-1} \rightarrow RP^n$  le morphisme canonique et  $d : RP^{n-1} \rightarrow \text{Im } d_P^{n-1}$  l'épimorphisme canonique tel que  $id = Rd_P^{n-1}$ . On en déduit alors  $\text{id}_{RP^n} = s(d_{RC(f)}^n) + (-i)ds'$ . Il ne reste plus qu'à vérifier que  $ds'(-i) = \text{Id}_{\text{Im } d_P^{n-1}}$ . Comme  $RC(f)$  est contractile, il existe  $s''$  tel que  $\text{id}_{RP^{n-1}} = (-d_{RP}^{n-2})s'' + s'(-Rd_P^{n-1})$ . Ainsi,  $Rd_P^{n-1} = -Rd_P^{n-1}s'Rd_P^{n-1}$ . Comme  $i$  est un monomorphisme et  $d$  un épimorphisme, on en déduit que  $\text{id}_{\text{Im } d_P^{n-1}} = -ds'i$ . Finalement  $(X, d_X)$  est isomorphe dans  $\mathcal{D}_M^b$  à  $\tilde{\tau}^{\geq n}P$  ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi  $B^n(P)$  n'est pas un objet M-split pour tout  $n < N$ . On considère alors le complexe  $Y$  concentré en degré 0 donné par

$$Y^0 = \bigoplus_{n \leq N} B^n(P).$$

Pour  $n < N$ , on note  $j^n : B^n(P) \rightarrow P^n$  le monomorphisme canonique et  $d^{n-1} : P^{n-1} \rightarrow B^n(P)$  l'épimorphisme tel que  $d_P^{n-1} = j^n d^{n-1}$ . Pour  $n > -N+1$ , on considère alors  $\tilde{d} : P \rightarrow Y[n]$  le morphisme donné par  $\tilde{d}^{-n} : P^{-n} \rightarrow Y^0$  est le composé du morphisme  $d^{-n} : P^{-n} \rightarrow B^{-n+1}(P)$  et du morphisme canonique  $B^{-n+1}(P) \rightarrow Y^0$  et  $\tilde{d}^i = 0$  si  $i \neq -n$  (c'est bien un morphisme de complexes car  $d^{-n}d_P^{n-1} = 0$  puisque  $j^{-n+1}d^{-n}d_P^{n-1} = d_P^{-n}d_P^{n-1} = 0$  et que  $j^{-n+1}$  est un monomorphisme). Montrons que  $\tilde{d} \neq 0$  dans  $\mathcal{D}_M^-(\mathcal{A})$ . D'après le corollaire 4.37, il suffit de montrer que  $\tilde{d}$  n'est pas une homotopie. Si  $\tilde{d}$  est une homotopie alors il existe  $s : P^{-n+1} \rightarrow B^{-n+1}$  tel que  $sd_P^{-n} = d^{-n}$ . Par définition de  $d^{-n}$ , on obtient  $sj^{-n+1}d^{-n} = d^{-n}$ . Comme  $d^{-n}$  est un épimorphisme, on en déduit que  $sj^{-n+1} = \text{id}_{B^{-n+1}}$ . Le lemme 3.97 assure alors que  $B^{-n+1}$  est facteur direct de  $P^{-n+1}$  et donc un objet M-split ce qui n'est pas le cas. ■

**Corollaire 4.51 – Catégorie épaisse.** On suppose que  $\mathcal{A}$  admet des sommes directes dénombrables. Alors l'image essentielle de  $K^b(M)$  dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  est une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$ .

**Preuve.** D'après la proposition 1.3 de [RIC], il suffit de montrer qu'un facteur direct dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  d'un objet de  $K^b(M)$  est isomorphe à un objet de  $K^b(M)$ . Considérons donc  $X \in \mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  et  $Y \in K^b(M)$  tel que  $X$  soit facteur direct de  $Y$  dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  et donc dans  $\mathcal{D}_M^-(\mathcal{A})$ . D'après le théorème 5.3 de [GRI], on peut remplacer  $X$  par une M-résolution  $P$ . On obtient alors que  $P$  est facteur direct de  $Y$  dans  $\mathcal{D}_M^-(\mathcal{A})$ .

Par ailleurs, d'après le lemme 4.50 et la proposition 6.2 de [GRI], pour tout complexe  $Z$  borné à droite d'objets M-split, il existe  $N \in \mathbb{Z}$  tel que  $\text{Hom}_{\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})}(Y, Z[n]) = \text{Hom}_{\mathcal{D}_M^-(\mathcal{A})}(Y, Z[n]) = 0$  pour  $n > N$ . Comme  $P$  est facteur direct de  $Y$  dans  $\mathcal{D}_M^-(\mathcal{A})$ , on en déduit que  $\text{Hom}_{\mathcal{D}_M^-(\mathcal{A})}(P, Z[n]) = 0$  pour tout  $n > N$ . Comme  $X$  et  $P$  sont isomorphes dans  $\mathcal{D}_M^-(\mathcal{A})$ , on en déduit que  $\text{Hom}_{\mathcal{D}_M^-(\mathcal{A})}(X, Z[n]) = 0$  pour tout  $n > N$ . Comme le foncteur d'inclusion de  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  dans  $\mathcal{D}_M^-(\mathcal{A})$  est pleinement fidèle, on en déduit, grâce au lemme 4.50, que  $X$  est isomorphe dans  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A})$  à un complexe borné d'objets M-split. ■

**Remarque 4.52 – Catégorie épaisse, module de type fini et objet compact.** Considérons la situation suivante : on suppose que  $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$  est la catégorie des  $A$ -modules où  $A$  est un anneau noethérien. On note alors  $\mathcal{A}' = A\text{-mod}$  la catégorie abélienne des  $A$ -modules de type fini. On suppose qu'il existe une sous-catégorie pleine et abélienne  $\mathcal{B}'$  de  $\mathcal{B}$  (dans l'exemple 4.16, on prend respectivement  $\mathcal{B}'$  la catégorie des  $k$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $\mathcal{B}'$  la catégorie des  $\mathcal{O}H$ -modules de type fini) telle que les foncteurs  $M, L, R$  induisent des foncteurs  $M : \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{A}'$  et  $L, R : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{B}'$ . Le triplet  $(M, L, R)$  entre  $\mathcal{A}'$  et  $\mathcal{B}'$  est alors un triplet

adjoint avec  $L$  et  $R$  exacts et fidèles. De plus, toute suite exacte de  $\mathcal{A}'$  est  $L$ -scindée si et seulement si elle est  $R$ -scindée. En suivant les idées de [NEE1] et [RAV] (voir aussi [KEL1] ou [KRA]), on montre que la sous-catégorie des objets compacts de  $\mathcal{D}_M(\mathcal{A})$  est la sous-catégorie des complexes isomorphes à un complexe borné de modules  $M$ -split de type fini. On en déduit alors que la sous-catégorie de  $\mathcal{D}_M^b(\mathcal{A}')$  formée des complexes isomorphes à un complexe borné de modules  $M$ -split de type fini est épaisse. Ainsi le théorème 4.49 de Rickard s'applique à  $\mathcal{A}'$ .  $\blacksquare$

Annexe

Convention de signes

pour les

complexes de modules



## CHAPITRE 5

# CONVENTION DE SIGNE

Dans cet annexe, on propose une convention de signe adaptée de [SGA4] pour les complexes Hom et produit tensoriel. Cette convention présente l'avantage que les extensions aux complexes des isomorphismes classiques entre modules ne présentent pas de signe (voir la section 5.3). De façon plus précise, dans la section 5.1, on étudie le complexe Hom (voir aussi la sous-section 3.4.2). Dans la section 5.2, on étudie le complexe produit tensoriel de deux complexes. Enfin, dans la section 5.3, on étudie les liens entre produit tensoriel et Hom.

**Notation 5.1** Dans cette annexe, A et B désignent deux anneaux unitaires.

## 5.1 LE COMPLEXE HOM

### 5.1.1 LE FONCTEUR

**Définition 5.2 – Complexe Hom et complexe dual.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie R-linéaire et  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$ . On définit le complexe  $\text{Hom}^\bullet(X, Y)$  par

$$\text{Hom}^\bullet(X, Y)^n = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^{n+k})$$

et

$$d_{\text{Hom}^\bullet(X, Y)}^n : \begin{cases} \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^{n+k}) \longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^{n+k+1}) \\ (f_k)_{k \in \mathbb{Z}} \longmapsto (d_Y^{n+k} f_k + (-1)^{n+1} f_{k+1} d_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}. \end{cases}$$

Lorsque  $\mathcal{C} = \text{A-Mod}$ , on pose  $X^\vee = \text{Hom}^\bullet(X, A)$ .

De plus, soient  $(X', d_{X'})$ ,  $(Y', d_{Y'})$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : X' \rightarrow X$ ,  $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} : Y \rightarrow Y'$  deux morphismes de  $\mathcal{C}$ -complexes. On définit alors

$$\text{Hom}^\bullet(f, g) \in \text{Hom}_{\text{RCom}}(\text{Hom}^\bullet(X, Y), \text{Hom}^\bullet(X', Y'))$$

par

$$\text{Hom}^\bullet(f, g)^n : \begin{cases} \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^{n+k}) \longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X'^k, Y'^{n+k}) \\ (u^k)_{k \in \mathbb{Z}} \longmapsto (g^{n+k} u^k f^k)_{k \in \mathbb{Z}}. \end{cases}$$

On définit ainsi un bifoncteur R-linéaire

$$\text{Hom}^\bullet(\cdot, \cdot) : \begin{cases} \mathcal{C}\text{Com}^{\text{op}} \times \mathcal{C}\text{Com} \longrightarrow \text{RCom} \\ (X, Y) \longmapsto \text{Hom}^\bullet(X, Y) \\ (f, g) \longmapsto \text{Hom}^\bullet(f, g). \end{cases}$$

**Preuve.** Vérifions que  $\text{Hom}^\bullet(X, Y)$  est un complexe. Les axiomes des catégories R-linéaire assurent que la différentielle de  $\text{Hom}^\bullet(X, Y)$  est R-linéaire. Pour simplifier, on note  $d$  plutôt que  $d_{\text{Hom}^\bullet(X, Y)}$ . Pour  $u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ , on a

$$\begin{aligned} d^{n+1} d^n(u) &= d^{n+1}((d_Y^{n+k} u^k + (-1)^{n+1} u^{k+1} d_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}) \\ &= (d_Y^{n+k+1} d_Y^{n+k} u^k + (-1)^{n+1} d_Y^{n+k+1} u^{k+1} d_X^k + (-1)^{n+2} (d_Y^{n+k+1} u^{k+1} d_X^k + (-1)^{n+1} u^{k+2} d_X^{k+1} d_X^k))_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Le premier et le quatrième termes sont nuls car X et Y sont des complexes. Le deuxième et le troisième se simplifient. Ainsi  $\text{Hom}^\bullet(X, Y)$  est bien un complexe de R-modules.

Vérifions que  $\text{Hom}^\bullet(f, g)$  est bien un morphisme de complexes. Par construction,  $\text{Hom}^\bullet(f, g)^n$  est bien R-linéaire. De plus, on a

$$\begin{aligned} d_{\text{Hom}^\bullet(X', Y')}^n \text{Hom}^\bullet(f, g)^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) &= d_{\text{Hom}^\bullet(X', Y')}^n((g^{n+k} u^k f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) \\ &= (d_{Y'}^{n+k} g^{n+k} u^k f^k + (-1)^{n+1} g^{n+k+1} u^{k+1} f^{k+1} d_{X'}^k)_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Hom}^\bullet(f, g)^{n+1} d_{\text{Hom}^\bullet(X, Y)}^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) &= \text{Hom}^\bullet(f, g)^{n+1}((d_Y^{n+k} u^k + (-1)^{n+1} u^{k+1} d_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}) \\ &= (g^{n+k+1} d_Y^{n+k} u^k f^k + (-1)^{n+1} g^{n+k+1} u^{k+1} d_X^k f^k)_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Comme  $f$  et  $g$  sont des morphismes de complexes, on a  $g^{n+k+1} d_Y^{n+k} = d_{Y'}^{n+k} g^{n+k}$  et  $d_X^k f^k = f^{k+1} d_{X'}^k$ . Ainsi  $\text{Hom}^\bullet(f, g)$  est bien un morphisme de complexes.

Montrons que  $\text{Hom}^\bullet(\cdot, \cdot)$  est bien un foncteur. On a clairement  $\text{Hom}^\bullet(\text{id}_X, \text{id}_Y) = \text{id}_{\text{Hom}^\bullet(X, Y)}$ . De plus, si  $(X'', d_{X''})$  et  $(Y'', d_{Y''})$  sont deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $f' : X'' \rightarrow X'$  et  $g' : Y'' \rightarrow Y'$  deux morphismes de  $\mathcal{C}$ -complexes, on a, par associativité de la composition,  $\text{Hom}^\bullet(f' f, g' g) = \text{Hom}^\bullet(f', g') \text{Hom}^\bullet(f, g)$ .

Enfin, la bilinéarité de la composition dans  $\mathcal{C}$  assure que l'application  $(f, g) \mapsto \text{Hom}^\bullet(f, g)$  est bilinéaire. ■

### 5.1.2 TRANSFORMATIONS NATURELLES

**Notation 5.3 — Isomorphisme canonique.** Soit  $X$  un  $A$ -module, on note  $\Phi_X$  l'isomorphisme canonique de  $A$ -modules

$$\Phi_X : \begin{cases} \text{Hom}_A(A, X) \longrightarrow X \\ f \longmapsto f(1). \end{cases}$$

**Proposition 5.4 — Transformation naturelle et complexe  $\text{Hom}$ .** Soit  $(X, d_X)$  un complexe de  $A$ -modules. La famille  $\Phi_X = (\Phi_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$  réalise un isomorphisme naturel de complexes entre  $\text{Hom}^\bullet(A, X)$  et  $X$ .

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux complexes de  $\mathcal{C}$  et  $\ell, m \in \mathbb{Z}$ . Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit

$$\gamma^n : \begin{cases} \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{k+\ell}, Y^{n+k+m}) \longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^{n+k+m-\ell}) \\ (f^k)_{k \in \mathbb{Z}} \longmapsto (-1)^{\ell n} (f^{k-\ell})_{k \in \mathbb{Z}}. \end{cases}$$

La famille  $\gamma_{X, Y, \ell, m} = (\gamma^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  réalise un isomorphisme naturel entre  $\text{Hom}^\bullet(X[\ell], Y[m])$  et  $\text{Hom}^\bullet(X, Y)[m - \ell]$ .

**Preuve.** Comme  $A$  est concentré en degré 0, on a  $\text{Hom}^\bullet(A, X)^n = \text{Hom}_A(A, X^n)$  et la différentielle  $d_{\text{Hom}^\bullet(A, X)}^n$  se résume à

$$d_{\text{Hom}^\bullet(A, X)}^n : \begin{cases} \text{Hom}_A(A, X^n) \longrightarrow \text{Hom}_A(A, X^{n+1}) \\ u \longmapsto d_X^n u. \end{cases}$$

Montrons que  $(\Phi_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes. Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , l'application  $\Phi_{X^n} : \text{Hom}^\bullet(A, X)^n \rightarrow X^n$  est bien  $A$ -linéaire. De plus, pour  $u \in \text{Hom}_A(A, X^n)$ , on a

$$\Phi_{X^{n+1}} d_{\text{Hom}^\bullet(A, X)}^n(u) = \Phi_{X^{n+1}} d_X^n u = d_X^n(u(1)) = d_X^n \Phi_{X^n}(u).$$

Ainsi  $(\Phi_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes. De plus, chacun des  $\Phi_{X^n}$  est un isomorphisme. Ainsi  $(\Phi_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$  est un isomorphisme de complexes.

Montrons la naturalité. Soient  $(X', d_{X'})$  un complexe de  $A$ -modules et  $f : X \rightarrow X'$  un morphisme de complexe de  $A$ -modules. Comme  $\text{Hom}^\bullet(A, X)^n = \text{Hom}_A(A, X^n)$ ,  $\text{Hom}^\bullet(A, X')^n = \text{Hom}_A(A, X'^n)$  et  $\text{Hom}^\bullet(\text{id}_A, f)^n$  est la composition à gauche par  $f$ , on en déduit que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}^\bullet(A, X)^n & \xrightarrow{\Phi_{X^n}} & X^n \\ \text{Hom}^\bullet(\text{id}_A, f)^n \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Hom}^\bullet(A, X')^n & \xrightarrow{\Phi_{X'^n}} & X'^n \end{array}$$

Intéressons-nous à présent au lien entre le décalage et le foncteur  $\text{Hom}$ . Par définition, on a

$$\text{Hom}^\bullet(X[\ell], Y[m])^n = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X[\ell]^k, Y[m]^{n+k}) = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{k+\ell}, Y^{n+k+m})$$

et

$$\text{Hom}^\bullet(X, Y)[m - \ell]^n = \text{Hom}^\bullet(X, Y)^{n+m-\ell} = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^{k+n+m-\ell}).$$

Ainsi  $\gamma^n$  définit bien une application R-linéaire de  $\text{Hom}^\bullet(X[\ell], Y[m])^n$  dans  $\text{Hom}^\bullet(X, Y)[m - \ell]^n$ . Montrons que la famille  $(\gamma^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes. Pour  $(f^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}^\bullet(X[\ell], Y[m])^n$ , on a

$$\begin{aligned}
\gamma^{n+1} d_{\text{Hom}^{\bullet}(X[\ell], Y[m])}^n((f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) &= \gamma^{n+1}((d_{Y[m]}^{n+k} f^k + (-1)^{n+1} f^{k+1} d_{X[\ell]}^k)_{k \in \mathbb{Z}}) \\
&= \gamma^{n+1}((-1)^m d_Y^{n+k+m} f^k + (-1)^{n+1+\ell} f^{k+1} d_X^{k+\ell})_{k \in \mathbb{Z}} \\
&= (-1)^{\ell(n+1)}((-1)^m d_Y^{n+k+m-\ell} f^{k-\ell} + (-1)^{n+1+\ell} f^{k+1-\ell} d_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et } d_{\text{Hom}^{\bullet}(X, Y)[m-\ell]}^n \gamma^n((f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) &= (-1)^{m-\ell} d_{\text{Hom}^{\bullet}(X, Y)}^{n+m-\ell}((-1)^{\ell n} (f^{k-\ell})_{k \in \mathbb{Z}}) \\
&= (-1)^{m+\ell(n-1)} (d_Y^{n+m-\ell+k} f^{k-\ell} + (-1)^{n+m-\ell+1} f^{k+1-\ell} d_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}.
\end{aligned}$$

Ainsi  $\gamma_{X, Y, \ell, m}$  est un morphisme de complexe de  $\mathcal{C}$ . De plus, chacun des  $\gamma^n$  est un isomorphisme. Ainsi  $\gamma_{X, Y}$  est un isomorphisme de complexes.

Montrons la naturalité. Considérons  $(X', d_{X'})$ ,  $(Y', d_{Y'})$  deux complexes de  $\mathcal{C}$ ,  $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} : X' \rightarrow X$  et  $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} : Y \rightarrow Y'$  deux morphismes de complexes de  $\mathcal{C}$ . Pour  $(u^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}^{\bullet}(X[\ell], Y[m])^n$ , on a

$$\text{Hom}^{\bullet}(f, g)[m-\ell]^n \gamma^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = \text{Hom}^{\bullet}(f, g)^{n+m-\ell}((-1)^{\ell n} (u^{k-\ell})_{k \in \mathbb{Z}}) = (-1)^{\ell n} (g^{n+m-\ell+k} u^{k-\ell} f^k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

$$\text{et } \gamma^n \text{Hom}^{\bullet}(f[\ell], g[m])^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = \gamma^n (g^{n+k+m} u^k f^{k+\ell})_{k \in \mathbb{Z}} = (-1)^{\ell n} (g^{n+k+m-\ell} u^{k-\ell} f^k)_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif et on a la naturalité cherchée.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}^{\bullet}(X[\ell], Y[m])^n & \xrightarrow{\gamma^n} & \text{Hom}^{\bullet}(X, Y)[m-\ell]^n \\
\text{Hom}^{\bullet}(f[\ell], g[m])^n \downarrow & & \downarrow \text{Hom}^{\bullet}(f, g)[m-\ell]^n \\
\text{Hom}^{\bullet}(X'[\ell], Y'[m])^n & \xrightarrow{\gamma^n} & \text{Hom}^{\bullet}(X', Y')[m-\ell]^n
\end{array}$$

**Remarque 5.5 — Transformation naturelle et décalage.** On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}^{\bullet}(A, X[1]) & \xrightarrow{\delta_{A, X}} & \text{Hom}^{\bullet}(A, X)[1] \\
\Phi_{X[1]} \downarrow & & \downarrow \Phi_X[1] \\
X[1] & \xrightarrow{\text{id}_{X[1]}} & X[1]
\end{array}$$

En effet, en degré  $n$ , on a pour  $f \in \text{Hom}_A(A, X^{n+1})$ ,

$$\Phi_X[1]^n \delta_{A, X}^n(f) = \Phi_X^{n+1}(f) = f(1) \quad \text{et} \quad \text{id}_{X[1]}^n \Phi_{X[1]}^n(f) = f(1). \quad \blacksquare$$

**Remarque 5.6 — Double décalage.** Soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux complexes  $\mathcal{C}$ . Le diagramme suivant est  $(-1)^{\ell m}$ -commutatif : on a  $\gamma_{X, Y, \ell, 0}[m] \circ \gamma_{X[\ell], Y, 0, m} = (-1)^{\ell m} \gamma_{X, Y, 0, m}[-\ell] \circ \gamma_{X, Y[m], \ell, 0}$ .

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}^{\bullet}(X[\ell], Y[m]) & \xrightarrow{\gamma_{X[\ell], Y, 0, m}} & \text{Hom}^{\bullet}(X[\ell], Y)[m] \\
\gamma_{X, Y[m], \ell, 0} \downarrow & & \downarrow \gamma_{X, Y, \ell, 0}[m] \\
\text{Hom}^{\bullet}(X, Y[m])[-\ell] & \xrightarrow{\gamma_{X, Y, 0, m}[-\ell]} & \text{Hom}^{\bullet}(X, Y)[m-\ell]
\end{array}$$

En effet, pour  $n \in \mathbb{Z}$  et  $(u^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}^{\bullet}(X[\ell], Y[m])^n$ , on a

$$\gamma_{X, Y, \ell, 0}[m]^n \circ \gamma_{X[\ell], Y, 0, m}^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = \gamma_{X, Y, \ell, 0}^{n+m}((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (-1)^{\ell(n+m)}((u^{k-\ell})_{k \in \mathbb{Z}})$$

$$\text{et } \gamma_{X, Y, 0, m}[-\ell]^n \circ \gamma_{X, Y[m], \ell, 0}^n((u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = \gamma_{X, Y, 0, m}^{n-\ell}((-1)^{\ell n} (u^{k-\ell})_{k \in \mathbb{Z}}) = (-1)^{\ell n}((u^{k-\ell})_{k \in \mathbb{Z}}). \quad \blacksquare$$

## 5.2 LE FONCTEUR PRODUIT TENSORIEL

On s'intéresse ici au cas où  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modules et on étudie comment le produit tensoriel s'étend aux complexes.

### 5.2.1 LE FONCTEUR

**Définition 5.7 — Foncteur produit tensoriel.** Soient  $(X, d_X)$  un complexe de modules-A et  $(Y, d_Y)$  un complexe de A-modules. On définit le complexe  $X \otimes_A Y$  par

$$(X \otimes Y)^n = \bigoplus_{\substack{(i, j) \in \mathbb{Z}^2, \\ i + j = n}} (X^i \otimes_A Y^j)$$

et

$$d_{X \otimes_A Y}^n: \begin{cases} X^i \otimes_A Y^j \longrightarrow (X^{i+1} \otimes_A Y^j) \oplus (X^i \otimes_A Y^{j+1}) \\ x \otimes y \longmapsto (-1)^j d_X^i(x) \otimes y + x \otimes d_Y^j(y). \end{cases}$$

De plus, soient  $(X, d_X), (X', d_{X'})$  deux complexes de modules-A,  $(Y, d_Y), (Y', d_{Y'})$  deux complexes de A-modules et  $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Hom}_{\text{ComA}}(X, X')$ ,  $g = (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Hom}_{\text{ACom}}(Y, Y')$  alors on peut définir

$$f \otimes g \in \text{Hom}_{\text{RCom}}(X \otimes_A Y, X' \otimes_A Y')$$

par

$$(f \otimes g)^n = \bigoplus_{\substack{(i, j) \in \mathbb{Z}^2, \\ i + j = n}} (f^i \otimes g^j)$$

On définit ainsi un bifoncteur R-linéaire

$$\bullet \otimes \bullet: \begin{cases} \text{ComA} \times \text{ACom} \longrightarrow \text{RCom} \\ (X, Y) \longmapsto X \otimes_A Y \\ (f, g) \longmapsto f \otimes g. \end{cases}$$

**Preuve.** Vérifions que  $X \otimes Y$  est bien un complexe. La différentielle de  $X \otimes_A Y$  est R-linéaire par construction. De plus, pour  $x \in X^i$  et  $y \in Y^j$ , on a

$$d_{X \otimes_A Y}^{n+1} d_{X \otimes_A Y}^n (x \otimes y) = (-1)^j ((-1)^j d_X^{i+1} d_X^i(x) \otimes y + d_X^i(x) \otimes d_Y^j(y)) + ((-1)^{j+1} d_X^i(x) \otimes d_Y^j(y) + x \otimes d_Y^{j+1} d_Y^j(y)).$$

Comme  $X$  et  $Y$  sont des complexes, le premier et le quatrième termes sont nuls. De plus, le deuxième et le troisième termes se simplifient. Ainsi  $X \otimes_A Y$  est bien un complexe de R-modules.

Vérifions que  $f \otimes g$  est bien un morphisme de complexes. Par construction,  $(f \otimes g)^n$  est R-linéaire. De plus, pour  $x \in X^i$  et  $y \in Y^j$ , on a

$$d_{X' \otimes_A Y'}^n (f \otimes g)^n (x \otimes y) = (-1)^j d_{X'}^i f^i(x) \otimes g^j(y) + f^i(x) \otimes d_{Y'}^j g^j(y)$$

$$\text{et} \quad (f \otimes g)^{n+1} d_{X \otimes_A Y}^n (x \otimes y) = f^{i+1} ((-1)^j d_X^i(x)) \otimes g^j(y) + f^i(x) \otimes g^{j+1} d_Y^j(y).$$

Les deux expressions sont égales car  $f$  et  $g$  sont des morphismes de complexes.

Montrons que  $\bullet \otimes \bullet$  est un foncteur. Les propriétés des applications linéaires « produit tensoriel » assurent que  $\text{id}_X \otimes \text{id}_Y = \text{id}_{X \otimes_A Y}$  et que si  $(X'', d_{X''})$  est un complexe de modules-A,  $(Y'', d_{Y''})$  est un complexe de A-modules,  $f' \in \text{Hom}_{\text{ComA}}(X', X'')$  et  $g' \in \text{Hom}_{\text{ACom}}(Y', Y'')$  alors  $(f' f \otimes g' g) = (f' \otimes g')(f \otimes g)$ .

Enfin, la R-bilinéarité de l'application  $(f, g) \mapsto f \otimes g$  résulte de celle de cette même application au niveau des modules. ■

### 5.2.2 LES TRANSFORMATIONS NATURELLES

**Notation 5.8 — Isomorphisme canonique entre modules.** Pour  $X$  un module-A,  $Y$  un A-module-B et  $Z$  un B-module. On note  $f_{XYZ}$  l'isomorphisme canonique

$$f_{XYZ}: \begin{cases} X \otimes_A (Y \otimes_B Z) \longrightarrow (X \otimes_A Y) \otimes_B Z \\ x \otimes (y \otimes z) \longmapsto (x \otimes y) \otimes z \end{cases}$$

et  $\Delta_X$  l'isomorphisme canonique

$$\Delta_X: \begin{cases} X \otimes_A A \longrightarrow X \\ x \otimes a \longmapsto xa. \end{cases}$$

Pour  $X$  un A-module, on note  $\Delta_X$  l'isomorphisme canonique

$$\Delta_X: \begin{cases} A \otimes_A X \longrightarrow X \\ a \otimes x \longmapsto ax. \end{cases}$$

**Proposition 5.9 – Transformation naturelle et produit tensoriel.** Soient  $(X, d_X)$  un complexe de modules-A,  $(Y, d_Y)$  un complexe de A-modules-B et  $(Z, d_Z)$  un complexe de B-modules. Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit

$$\delta^n = \bigoplus_{(i,j,k) \in \mathbb{Z}^3, i+j+k=n} f_{X^i Y^j Z^k}.$$

La famille  $(\delta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un isomorphisme naturel de complexes entre  $X \otimes_A (Y \otimes_B Z)$  et  $(X \otimes_A Y) \otimes_B Z$ .

La famille  $\Delta_X = (\Delta_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$  réalise un isomorphisme naturel de complexes entre  $X \otimes_A A$  et  $X$ .

Soient  $(X, d_X)$  un complexe de A-modules. La famille  $\Delta_X = (\Delta_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$  réalise un isomorphisme naturel de complexes entre  $A \otimes_A X$  et  $X$ .

Soient  $(X, d_X)$  un complexe de modules-A,  $(Y, d_Y)$  un complexe de A-modules. Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit

$$\delta^n = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2, i+j=n} (-1)^{j\ell} \text{id}_{X^{i+\ell} \otimes Y^{j+m}}.$$

La famille  $\delta_{X,Y,\ell,m} = (\delta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  réalise un isomorphisme naturel entre  $X[\ell] \otimes_A (Y[m])$  et  $(X \otimes_A Y)[\ell+m]$ .

**Preuve.** Montrons que  $(\delta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes. Par construction, les  $\delta^n$  sont linéaires. De plus, pour  $x \in X^i$ ,  $y \in Y^j$  et  $z \in Z^k$ , on a

$$\begin{aligned} d_{X \otimes_A (Y \otimes_B Z)}^{i+j+k}(x \otimes (y \otimes z)) &= (-1)^{j+k} d_X^i(x) \otimes (y \otimes z) + x \otimes d_{Y \otimes_B Z}^{j+k}(y \otimes z) \\ &= (-1)^{j+k} d_X^i(x) \otimes (y \otimes z) + (-1)^k x \otimes (d_Y^j(y) \otimes z) + x \otimes (y \otimes d_Z^k(z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } d_{(X \otimes_A Y) \otimes_B Z}^{i+j+k}((x \otimes y) \otimes z) &= (-1)^k d_{X \otimes_A Y}^{i+j}(x \otimes y) \otimes z + (x \otimes y) \otimes d_Z^k(z) \\ &= (-1)^k (((-1)^j d_X^i(x) \otimes y) \otimes z + (x \otimes d_Y^j(y)) \otimes z) + (x \otimes y) \otimes d_Z^k(z) \\ &= (-1)^{j+k} (d_X^i(x) \otimes y) \otimes z + (-1)^k (x \otimes d_Y^j(y)) \otimes z + (x \otimes y) \otimes d_Z^k(z). \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat souhaité. De plus, chacun des  $\delta^n$  est un isomorphisme. Ainsi  $(\delta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un isomorphisme de complexes.

Montrons la naturalité. Soient  $(X', d_{X'})$  un complexe de modules-A,  $(Y', d_{Y'})$  un complexe de A-modules-B,  $(Z', d_{Z'})$  un complexe de B-modules et  $f : X \rightarrow X'$  un morphisme de complexes-A,  $g : Y \rightarrow Y'$  un morphisme de A-complexes-B et  $h : Z \rightarrow Z'$  un morphisme de B-complexes. Comme la restriction de  $(f \otimes (g \otimes h))^{i+j+k}$  à  $X^i \otimes (Y^j \otimes Z^k)$  est  $f^i \otimes (g^j \otimes h^k)$  et que la restriction de  $((f \otimes g) \otimes h)^{i+j+k}$  à  $(X^i \otimes Y^j) \otimes Z^k$  est  $(f^i \otimes g^j) \otimes h^k$ , le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} X^i \otimes (Y^j \otimes Z^k) & \xrightarrow{\quad} & (X^i \otimes Y^j) \otimes Z^k \\ \downarrow (f \otimes (g \otimes h))^{i+j+k} & & \downarrow ((f \otimes g) \otimes h)^{i+j+k} \\ X'^i \otimes (Y'^j \otimes Z'^k) & \xrightarrow{\quad} & (X'^i \otimes Y'^j) \otimes Z'^k \end{array}$$

Étudions à présent le complexe  $X \otimes_A A$ . Comme A est concentré en degré 0, on a  $(X \otimes_A A)^n = X^n \otimes_A A$ . Montrons que  $(\Delta_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes. Les  $\Delta_{X^n}$  sont linéaires. De plus, pour  $a \in A$  et  $x \in X^n$ , on a

$$\Delta_{X^{n+1}} d_{X \otimes_A A}^n(x \otimes a) = \Delta_{X^{n+1}}((-1)^0 d_X^n(x) \otimes a + x \otimes d_A(a)) = \Delta_{X^{n+1}}(d_X^n(x) \otimes a) = d_X^n(x)a$$

$$\text{et } d_X^n \Delta_{X^n}(x \otimes a) = d_X^n(xa).$$

On obtient que  $(\Delta_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes grâce à la linéarité de  $d_X^n$ . De plus, chacun des  $\Delta_{X^n}$  est un isomorphisme. Ainsi  $(\Delta_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$  est un isomorphisme de complexes.

Montrons la naturalité de  $\Delta$ . Soient  $(X', d_{X'})$  un complexe de modules-A et  $f \in \text{Hom}_{\text{ComA}}(X, X')$ . Comme  $(f \otimes \text{id}_A)^n = f^n \otimes \text{id}_A$ , le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} X^n \otimes_A A & \xrightarrow{\Delta_{X^n}} & X^n \\ \downarrow (f \otimes \text{id}_A)^n & & \downarrow f^n \\ X'^n \otimes_A A & \xrightarrow{\Delta_{X'^n}} & X'^n \end{array}$$

Étudions à présent le complexe  $A \otimes_A X$ . Comme A est concentré en degré 0, on a  $(A \otimes_A X)^n = A \otimes_A X^n$ . Montrons que  $(\Delta_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes. Les  $\Delta_{X^n}$  sont linéaires. De plus, pour  $a \in A$  et  $x \in X^n$ , on a

$$\Delta_{X^{n+1}} d_{A \otimes_A X}^n(a \otimes x) = \Delta_{X^{n+1}}((-1)^n d_A(a) \otimes x + a \otimes d_X^n(x)) = \Delta_{X^{n+1}}(a \otimes d_X^n(x)) = ad_X^n(x)$$

$$\text{et } d_X^n \Delta_{X^n}(a \otimes x) = d_X^n(ax).$$

On obtient que  $(\Delta_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes grâce à la linéarité de  $d_X^n$ . De plus, chacun des  $\Delta_{X^n}$  est un isomorphisme. Ainsi  $(\Delta_{X^n})_{n \in \mathbb{Z}}$  est un isomorphisme de complexes.

Montrons la naturalité de  $\Delta$ . Soient  $(X', d_{X'})$  un complexe de  $A$ -modules et  $f \in \text{Hom}_{A\text{Com}}(X, X')$ . Comme  $(\text{id}_A \otimes f)^n = \text{id}_A \otimes f^n$ , le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_A X^n & \xrightarrow{\Delta_{X^n}} & X^n \\ (\text{id}_A \otimes f)^n \downarrow & & \downarrow f^n \\ A \otimes_A X'^n & \xrightarrow{\Delta_{X'^n}} & X'^n \end{array}$$

Étudions le lien entre produit tensoriel et décalage. Par définition, on a

$$(X[\ell] \otimes_A Y[m])^n = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2, i+j=n} X[\ell]^i \otimes_A Y[m]^j = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2, i+j=n} X^{i+\ell} \otimes_A Y^{j+m}$$

$$\text{et } ((X \otimes_A Y)[m+\ell])^n = (X \otimes_A Y)^{n+m+\ell} = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2, i+j=n+m+\ell} X^i \otimes_A Y^j = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2, i+j=n} X^{i+\ell} \otimes_A Y^{j+m}.$$

Ainsi  $\delta^n$  est une application linéaire de  $(X[\ell] \otimes_A Y[m])^n$  dans  $((X \otimes_A Y)[m+\ell])^n$ . De plus, pour  $x \in X^{i+\ell}$  et  $y \in Y^{j+m}$ , on a

$$d_{X[\ell] \otimes_A (Y[m])}^n(x \otimes y) = (-1)^j d_{X[\ell]}^i(x) \otimes y + x \otimes d_{Y[m]}^j(y) = (-1)^{j+\ell} d_X^{i+\ell}(x) \otimes y + (-1)^m x \otimes d_Y^{j+m}(y)$$

$$\text{et } d_{(X \otimes_A Y)[m+\ell]}^n(x \otimes y) = (-1)^{m+\ell} d_{X \otimes_A Y}^{n+m+\ell}(x \otimes y) = (-1)^{\ell+m}((-1)^{j+m} d_X^{i+\ell}(x) \otimes y + x \otimes d_Y^{j+m}(y)).$$

Ainsi  $(\delta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est bien un morphisme de complexe. De plus, chacun des  $\delta^n$  est un isomorphisme, on en déduit que  $(\delta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un isomorphisme de complexes.

Montrons la naturalité. Soient  $(X', d_{X'})$  un complexe de modules- $A$ ,  $(Y', d_{Y'})$  un complexe de  $A$ -modules,  $f \in \text{Hom}_{A\text{Com}}(X, X')$  et  $g \in \text{Hom}_{A\text{Com}}(Y, Y')$ . Comme la restriction de  $(f[\ell] \otimes g[m])^n$  à  $X^{i+\ell} \otimes Y^{j+m}$  est  $f^{i+\ell} \otimes g^{j+m}$  et que la restriction de  $((f \otimes g)[\ell+m])^n$  à  $X'^{i+\ell} \otimes Y'^{j+m}$  est  $f'^{i+\ell} \otimes g'^{j+m}$ , le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} X^{i+\ell} \otimes Y^{j+m} & \xrightarrow{\delta^n} & X'^{i+\ell} \otimes Y'^{j+m} \\ (f[\ell] \otimes g[m])^n \downarrow & & \downarrow ((f \otimes g)[\ell+m])^n \\ X'^{i+\ell} \otimes Y'^{j+m} & \xrightarrow{\delta^n} & X'^{i+\ell} \otimes Y'^{j+m} \end{array}$$

**Remarque 5.10 — Décalage et produit tensoriel par  $A$ .** On a les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_A (X[\ell]) & \xrightarrow{\delta_{A,X,0,\ell}} & (A \otimes_A X)[\ell] \\ \Delta_{X[\ell]} \downarrow & & \downarrow \Delta_{X[\ell]} \\ X[\ell] & \xrightarrow{\text{id}_{X[\ell]}} & X[\ell] \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X[\ell] \otimes_A A & \xrightarrow{\delta_{X,A,\ell,0}} & (X \otimes_A A)[\ell] \\ \Delta_{X[\ell]} \downarrow & & \downarrow \Delta_{X[\ell]} \\ X[\ell] & \xrightarrow{\text{id}_{X[\ell]}} & X[\ell] \end{array}$$

En effet, en degré  $n$ , on a pour  $a \in A$  et  $x \in X^{n+\ell}$ ,

$$\Delta_{X[\ell]}^n \delta_{A,X,0,\ell}^n(a \otimes x) = ax \quad \text{et} \quad \text{id}_{X[\ell]}^n \Delta_{X[\ell]}^n(a \otimes x) = ax.$$

Et comme  $A$  est concentré en degré 0, on a

$$\Delta_{X[\ell]}^n \delta_{X,A,\ell,0}^n(x \otimes a) = xa \quad \text{et} \quad \text{id}_{X[\ell]}^n \Delta_{X[\ell]}^n(x \otimes a) = xa.$$

**Remarque 5.11 — Double décalage.** Soient  $(X, d_X)$  un complexe de modules- $A$  et  $(Y, d_Y)$  un complexe de  $A$ -modules et  $\ell, m \in \mathbb{Z}$ . Le diagramme suivant est  $(-1)^{\ell m}$ -commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X[\ell] \otimes_A Y[m] & \xrightarrow{\delta_{X[\ell],Y,0,m}} & (X[\ell] \otimes Y)[m] \\ \delta_{X,Y[m],\ell,0} \downarrow & & \downarrow \delta_{X,Y,\ell,0}[m] \\ (X \otimes Y[m])[\ell] & \xrightarrow{\delta_{X,Y,0,m}[\ell]} & (X \otimes Y)[m+\ell] \end{array}$$

En effet, pour  $i, j \in \mathbb{Z}$  tels que  $i + j = n$  et  $x \in X^{i+\ell} = X[\ell]^i$ ,  $y \in Y^{j+m} = Y[m]^j$ , on a

$$\delta_{X,Y,0,m}[\ell]^n \circ \delta_{X,Y[m],\ell,0}^n(x \otimes y) = \delta_{X,Y,0,m}^{\ell+n}((-1)^{\ell j} x \otimes y) = (-1)^{\ell j} (x \otimes y)$$

$$\text{et } \delta_{X,Y,\ell,0}[m]^n \circ \delta_{X[\ell],Y,0,m}^n(x \otimes y) = \delta_{X,Y,\ell,0}^{n+m}(x \otimes y) = (-1)^{\ell(j+m)} (x \otimes y).$$

### 5.3 LIENS ENTRE PRODUIT TENSORIEL ET COMPLEXE HOM

#### 5.3.1 COMPOSITION ET ÉVALUATION

**Notation 5.12 – Morphisme canonique.** Soient  $X, Y$  deux  $A$ -modules. On note  $\tau_{X,Y}$  le morphisme naturel

$$\tau_{X,Y}: \begin{cases} X^\vee \otimes_A Y \longrightarrow \text{Hom}_A(X, Y) \\ \varphi \otimes y \mapsto (x \mapsto \varphi(x)y). \end{cases}$$

**Proposition 5.13 – Liens entre produit tensoriel et complexe Hom.** Soient  $(X, d_X)$  un complexe de  $A$ -modules,  $(Y, d_Y)$  un complexe de  $A$ -modules-B et  $(Z, d_Z)$  un complexe de  $A$ -modules.

Soient  $i, j \in \mathbb{Z}$ , on définit

$$\delta^{i,j}: \begin{cases} \text{Hom}^\bullet(X, Y)^i \otimes_B \text{Hom}^\bullet(Y, Z)^j \longrightarrow \text{Hom}^\bullet(X, Z)^{i+j} \\ (f_k)_{k \in \mathbb{Z}} \otimes (g_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (g_{k+i} \circ f_k)_{k \in \mathbb{Z}}. \end{cases}$$

Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit alors  $\delta^n = (\delta^{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2, i+j=n}: (\text{Hom}^\bullet(X, Y) \otimes_B \text{Hom}^\bullet(Y, Z))^n \rightarrow \text{Hom}^\bullet(X, Z)^n$ . La famille  $\delta_{X,Y,Z} = (\delta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme naturel de complexes entre  $\text{Hom}^\bullet(X, Y) \otimes_B \text{Hom}^\bullet(Y, Z)$  et  $\text{Hom}^\bullet(X, Z)$ .

Soient  $k, n \in \mathbb{Z}$ , pour simplifier les notations, on pose  $\tau_{k,n} = \tau_{X^k, Z^{k+n}}$  et  $\alpha_n$  l'inclusion canonique

$$\alpha_n: \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(X^k, Z^{k+n}) \longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(X^k, Z^{k+n}).$$

Enfin, on définit

$$\tau^n = \alpha_n \circ \left( \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{k,n} \right): (X^\vee \otimes_A Z)^n = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (X^k)^\vee \otimes_A Z^{k+n} \longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(X^k, Z^{k+n}) = \text{Hom}^\bullet(X, Z).$$

La famille  $\tau_{X,Z} = (\tau^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme naturel de complexes entre  $X^\vee \otimes_A Z$  et  $\text{Hom}^\bullet(X, Z)$ .

Pour  $i, j \in \mathbb{Z}^2$ , on définit

$$\gamma^{i,j}: \begin{cases} Y^i \otimes_B \text{Hom}^\bullet(Y, Z)^j \longrightarrow Z^{i+j} \\ y \otimes (g_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto g_i(y). \end{cases}$$

Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit alors  $\gamma^n = (\gamma^{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2, i+j=n}: (Y \otimes_B \text{Hom}^\bullet(Y, Z))^n \rightarrow Z^n$ . La famille  $\gamma_{Y,Z} = (\gamma^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme naturel de complexes de  $Y \otimes_B \text{Hom}^\bullet(Y, Z)$  dans  $Z$ .

**Preuve.** Commençons par montrer que l'application  $\delta^{i,j}$  est bien définie. Si  $U, W$  sont des  $A$ -modules,  $V$  un  $A$ -module-B alors l'application

$$\Delta: \begin{cases} \text{Hom}_A(U, V) \times \text{Hom}_A(V, W) \longrightarrow \text{Hom}_A(U, W) \\ (u, v) \mapsto v \circ u \end{cases}$$

est  $R$ -bilinéaire. De plus, elle vérifie  $\Delta(ub, v) = \Delta(u, bv)$  pour tout  $u \in \text{Hom}_A(U, V)$ ,  $v \in \text{Hom}_A(V, W)$  et  $b \in B$ . En effet, pour  $x \in U$ , on a

$$(v \circ ub)(x) = v(u(x)b) = (bv)(u(x)) = (bv \circ u)(x).$$

On en déduit immédiatement que l'application  $\delta^{i,j}$  est bien définie. La propriété universelle de la somme directe permet alors de définir  $\delta^n$ .

Montrons à présent que  $(\delta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes. Pour  $f = (f_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}^\bullet(X, Y)^i$  et  $g = (g_k) \in \mathbb{Z} \in \text{Hom}^\bullet(Y, Z)^j$ , on a

$$\begin{aligned} d_{\text{Hom}^\bullet(X, Y) \otimes_B \text{Hom}^\bullet(Y, Z)}^n(f \otimes g) &= (-1)^j d_{\text{Hom}^\bullet(X, Y)}^i(f) \otimes g + f \otimes d_{\text{Hom}^\bullet(Y, Z)}(g) \\ &= (-1)^j ((d_Y^{i+k} f_k + (-1)^{i+1} f_{k+1} d_X^k) \otimes g) + (f \otimes (d_Z^{j+k} g_k + (-1)^{j+1} g_{k+1} d_Y^k)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \delta^{n+1} d_{\text{Hom}^\bullet(X, Y) \otimes_B \text{Hom}^\bullet(Y, Z)}^n(f \otimes g) &= ((-1)^j g_{k+i+1} d_Y^{k+i} f_k + (-1)^{j+i+1} g_{k+i+1} f_{k+1} d_X^k + \\ &\quad d_Z^{j+k+i} g_{k+i} f_k + (-1)^{j+1} g_{k+i+1} d_Y^{k+i} f_k)_{k \in \mathbb{Z}} \\ &= ((-1)^{n+1} g_{k+i+1} f_{k+1} d_X^k + d_Z^{n+k} g_{k+i} f_k)_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

En notant  $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}} = \delta^n(f \otimes g) = (g_{i+k} f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ , on obtient

$$d_{\text{Hom}^\bullet(X, Z)}^n \delta^n(f \otimes g) = (-1)^{n+1} u_{k+1} d_X^k + d_Z^{n+k} u_k = d_{\text{Hom}^\bullet(X, Z)}^n(\delta^n(f \otimes g)).$$

Ainsi  $(\delta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est bien un morphisme de complexes.

Montrons la naturalité. Soient  $(X', d_{X'})$ ,  $(Z', d_{Z'})$  deux complexes de  $A$ -modules et  $f : X' \rightarrow X$ ,  $g : Z \rightarrow Z'$  deux morphismes de complexes de  $A$ -modules. Vérifions que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}^*(X, Y)^i \otimes_B \text{Hom}^*(Y, Z)^j & \xrightarrow{\delta^{i+j}} & \text{Hom}^*(X, Z)^{i+j} \\ \text{Hom}^*(f, \text{id}_Y)^i \otimes \text{Hom}^*(\text{id}_Y, g)^j \downarrow & & \downarrow \text{Hom}^*(f, g)^{i+j} \\ \text{Hom}^*(X', Y)^i \otimes_B \text{Hom}^*(Y, Z')^j & \xrightarrow{\delta^{i+j}} & \text{Hom}^*(X', Z')^{i+j} \end{array}$$

Pour  $u = (u^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}^*(X, Y)^i$  et  $v = (v^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}^*(Y, Z)^j$ , on a

$$\text{Hom}^*(f, g)^{i+j} \delta^{i+j}(u \otimes v) = \text{Hom}^*(f, g)^{i+j}((v^{k+i} u^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (g^{k+i+j} v^{k+i} u^k f^k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

et  $\delta^{i+j}(\text{Hom}^*(f, \text{id}_Y)^i \otimes \text{Hom}^*(\text{id}_Y, g)^j)(u \otimes v) = \delta^{i+j}((u^k f^k)_{k \in \mathbb{Z}} \otimes (g^{k+j} v^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (g^{k+j+i} v^{k+i} u^k f^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ .

Ainsi le diagramme est bien commutatif et on obtient la naturalité du morphisme de  $\delta_{X, Y, Z}$ .

En appliquant ce qui précède avec  $B = A$  et  $Y = A$ , on obtient un morphisme naturel de  $X^\vee \otimes \text{Hom}^*(A, Z)$  dans  $\text{Hom}^*(X, Z)$ . En composant avec  $(\text{id}_{X^\vee} \otimes \Phi_Z)^{-1}$ , on obtient un morphisme naturel de  $X^\vee \otimes Z$  dans  $\text{Hom}^*(X, Z)$ . Vérifions que ce morphisme n'est autre que  $\tau_{X, Z}$ . Pour  $\varphi \in (X^\vee)^{-k} = (X^k)^\vee$  et  $z \in Z^{k+n}$ , on a

$$((\text{id}_{X^\vee} \otimes \Phi_Z)^{-1})^n(\varphi \otimes z) = \varphi \otimes (a \mapsto az).$$

où  $\varphi$  est en fait la famille indexée par  $\mathbb{Z}$  dont le seul terme non nul est  $\varphi$  à la place  $k$  et où  $(a \mapsto az)$  est la famille indexée par  $\mathbb{Z}$  dont le seul terme non nul est  $(a \mapsto az)$  à la place  $k+n$ . On obtient ainsi que

$$\delta^n(\varphi \otimes (a \mapsto az)) = (x \mapsto \varphi(x)z)$$

est la famille indexée par  $\mathbb{Z}$  dont le seul terme non nul est  $(x \mapsto \varphi(x)z)$  à la place  $k$  ce qui n'est autre que  $\tau_{X, Z}^n(\varphi \otimes z)$ .

En appliquant ce qui précède avec  $X = A$ , on obtient un morphisme naturel de  $\text{Hom}^*(A, Y) \otimes_B \text{Hom}^*(Y, Z)$  dans  $\text{Hom}^*(A, Z)$ . En composant à droite avec  $(\Phi_Y \otimes_B \text{id}_{\text{Hom}^*(Y, Z)})^{-1}$  et à gauche avec  $\Phi_Z$ , on obtient un morphisme naturel de  $Y \otimes \text{Hom}^*(Y, Z)$  dans  $Z$ . Vérifions que ce morphisme n'est autre que  $\gamma_{Y, Z}$ . Pour  $y \in Y^i$  et  $f = (f_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}^*(Y, Z)^j$ , on a  $(\Phi_Y \otimes_B \text{id}_{\text{Hom}^*(Y, Z)})^{-1}(y \otimes f) = (a \mapsto ay) \otimes f$  où  $(a \mapsto ay)$  est la famille indexée par  $\mathbb{Z}$  dont le seul terme non nul est  $a \mapsto ay$  à la place 0. On en déduit que

$$\delta^{i+j}((a \mapsto ay) \otimes f) = (a \mapsto f_i(ay) = af_i(y))$$

où  $(a \mapsto af_i(y))$  est la famille indexée par  $\mathbb{Z}$  dont le seul terme non nul est  $a \mapsto af_i(y)$  à la place 0. Or  $\Phi_Z(a \mapsto af_i(y)) = f_i(y) \in Z^{i+j}$  et  $\gamma^{i,j}(y \otimes f) = f_i(y)$ . On obtient ainsi l'égalité souhaitée. ■

### 5.3.2 L'ISOMORPHISME CHER À CARTAN

**Notation 5.14 — Isomorphisme cher à Cartan.** Soit  $X$  un  $A$ -module,  $M$  un  $A$ -module- $B$  et  $Y$  un  $B$ -module. On note  $\kappa$  l'isomorphisme cher à Cartan donné par

$$\kappa_{M, X, Y} : \begin{cases} \text{Hom}_A(M \otimes_B Y, X) \longrightarrow \text{Hom}_B(Y, \text{Hom}_A(M, X)) \\ f \longmapsto (y \mapsto (m \mapsto f(m \otimes y))). \end{cases}$$

**Proposition 5.15 — L'isomorphisme cher à Cartan.** Soient  $(X, d_X)$  un complexe de  $A$ -modules,  $(M, d_M)$  un complexe de  $A$ -modules- $B$  et  $(Y, d_Y)$  un complexe de  $B$ -modules.

Pour  $j, k, n \in \mathbb{Z}$ , on pose  $\kappa_{j, k, n} = \kappa_{M^{j-k}, Y^k, X^{j+n}}$  et

$$\kappa^n = \prod_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2} \kappa_{j, k, n}.$$

La famille  $\kappa_{M, X, Y} = (\kappa^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  définit un isomorphisme naturel de complexes de  $R$ -modules de  $\text{Hom}^*(M \otimes_B Y, X)$  dans  $\text{Hom}^*(Y, \text{Hom}^*(M, X))$ .

**Preuve.** Par définition et grâce à la propriété universelle de la somme directe, on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}^*(M \otimes_B Y, X)^n &= \prod_{j \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A((M \otimes_B Y)^j, X^{j+n}) = \prod_{j \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (M^{j-k} \otimes_B Y^k), X^{j+n}) \\ &= \prod_{j \in \mathbb{Z}} \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(M^{j-k} \otimes_B Y^k, X^{j+n}) = \prod_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2} \text{Hom}_A(M^{j-k} \otimes_B Y^k, X^{j+n}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, grâce à la propriété universelle du produit, on a

$$\begin{aligned}\text{Hom}^\bullet(Y, \text{Hom}^\bullet(M, X))^n &= \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_B(Y^k, \text{Hom}^\bullet(M, X)^{k+n}) = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_B(Y^k, \prod_{j \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(M^{j-k}, X^{j-k+k+n})) \\ &= \prod_{k \in \mathbb{Z}} \prod_{j \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_B(Y^k, \text{Hom}_A(M^{j-k}, X^{j+n})) = \prod_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2} \text{Hom}_B(Y^k, \text{Hom}_A(M^{j-k}, X^{j+n})).\end{aligned}$$

On obtient ainsi que  $\kappa^n$  est un isomorphisme de  $R$ -modules de  $\text{Hom}^\bullet(M \otimes_B Y, X)^n$  dans  $\text{Hom}^\bullet(Y, \text{Hom}^\bullet(M, X))^n$ .

Montrons à présent que  $(\kappa^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes. Soit

$$(f_{j, k})_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2} \in \prod_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2} \text{Hom}_A(M^{j-k} \otimes_B Y^k, X^{j+n}).$$

On pose alors

$$\kappa^{n+1} d_{\text{Hom}^\bullet(M \otimes_B Y, X)}^n((f_{j, k})_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2}) = (g_{j, k})_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2} \in \prod_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2} \text{Hom}_A(Y^k, \text{Hom}_A(M^{j-k}, X^{j+n+1}))$$

$$\text{et } d_{\text{Hom}^\bullet(Y, \text{Hom}^\bullet(M, X))}^n \kappa^n((f_{j, k})_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2}) = (h_{j, k})_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2} \in \prod_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2} \text{Hom}_A(Y^k, \text{Hom}_A(M^{j-k}, X^{j+n+1})).$$

Calculons  $g_{j, k}$ . Par définition, on a

$$d_{\text{Hom}^\bullet(M \otimes_B Y, X)}^n((f_{j, k})_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2}) = (d_X^{n+j}(f_{j, k})_{k \in \mathbb{Z}} + (-1)^{n+1}(f_{j+1, k})_{k \in \mathbb{Z}} d_{M \otimes_B Y}^j)_{j \in \mathbb{Z}}$$

où la famille  $(f_{j, k})_{k \in \mathbb{Z}}$  (resp.  $(f_{j+1, k})_{k \in \mathbb{Z}}$ ) est vue comme un élément de

$$\text{Hom}_A(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M^{j-k} \otimes_B Y^k, X^{j+n}) \quad (\text{resp. de } \text{Hom}_A(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M^{j+1-k} \otimes_B Y^k, X^{j+1+n})).$$

La restriction de  $d_X^{n+j}(f_{j, k})_{k \in \mathbb{Z}} + (-1)^{n+1}(f_{j+1, k})_{k \in \mathbb{Z}} d_{M \otimes_B Y}^j$  à  $M^{j-k} \otimes Y^k$  est donnée par

$$d_X^{n+j} f_{j, k} + (-1)^{n+1}(-1)^k f_{j+1, k} (d_M^{j-k} \otimes \text{id}_{Y^k}) + (-1)^{n+1} f_{j+1, k+1} (\text{id}_{M^{j-k}} \otimes d_Y^k) \in \text{Hom}_A(M^{j-k} \otimes Y^k, X^{j+n+1}).$$

On en déduit que pour  $y \in Y^k$  et  $m \in M^{j-k}$ , on a

$$g_{j, k}(y)(m) = d_X^{n+j} f_{j, k}(m \otimes y) + (-1)^{n+k+1} f_{j+1, k}(d_M^{j-k}(m) \otimes y) + (-1)^{n+1} f_{j+1, k+1}(m \otimes d_Y^k(y)).$$

Calculons à présent  $h_{j, k}$ . Par définition, on a

$$d_{\text{Hom}^\bullet(Y, \text{Hom}^\bullet(M, X))}^n((\kappa_{j, k, n}(f_{j, k}))_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2}) = (d_{\text{Hom}^\bullet(M, X)}^{k+n} \circ (\kappa_{j, k, n}(f_{j, k}))_{j \in \mathbb{Z}} + (-1)^{n+1} (\kappa_{j, k+1, n}(f_{j, k+1}))_{j \in \mathbb{Z}} d_Y^k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

où la famille  $(\kappa_{j, k, n}(f_{j, k}))_{j \in \mathbb{Z}}$  (resp.  $(\kappa_{j, k+1, n}(f_{j, k+1}))_{j \in \mathbb{Z}}$ ) est vue comme un élément de

$$\text{Hom}_A(Y^k, \prod_{j \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(M^{j-k}, X^{j+n})) \quad (\text{resp. de } \text{Hom}_A(Y^{k+1}, \prod_{j \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(M^{j-k-1}, X^{j+1+n}))).$$

Or pour  $y \in Y^k$ , on a

$$\begin{aligned}d_{\text{Hom}^\bullet(M, X)}^{k+n} \circ (\kappa_{j, k, n}(f_{j, k}))_{j \in \mathbb{Z}}(y) &= d_{\text{Hom}^\bullet(M, X)}^{k+n}((\kappa_{j, k, n}(f_{j, k})(y))_{j \in \mathbb{Z}}) \in \prod_{j \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(M^{j-k}, X^{j+1+n}) \\ &= (d_X^{n+k+j-k} \circ (\kappa_{j, k, n}(f_{j, k})(y)) + (-1)^{n+k+1} (\kappa_{j+1, k, n}(f_{j+1, k})(y)) \circ d_M^{j-k})_{j \in \mathbb{Z}}.\end{aligned}$$

On en déduit que, pour  $y \in Y^k$  et  $m \in M^{j-k}$ , on a

$$h_{j, k}(y)(m) = d_X^{n+j} f_{j, k}(m \otimes y) + (-1)^{n+k+1} f_{j+1, k}(d_M^{j-k}(m) \otimes y) + (-1)^{n+1} f_{j+1, k+1}(m \otimes d_Y^k(y)).$$

Finalement,  $h_{j, k} = g_{j, k}$  pour tous  $j, k \in \mathbb{Z}$  et donc  $\kappa_{M, X, Y}$  est bien un morphisme de complexes. Comme, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\kappa^n$  est un isomorphisme, on en déduit que  $\kappa_{M, X, Y}$  est un isomorphisme de complexes.

Montrons à présent la naturalité. Soient  $X'$  un complexe de  $A$ -modules,  $M'$  un complexe de  $A$ -modules- $B$ ,  $Y'$  un complexe de  $B$ -modules,  $f : X \rightarrow X'$  un morphisme de complexe de  $A$ -module,  $g : M' \rightarrow M$  un morphisme de complexes de  $A$ -modules- $B$  et  $h : Y' \rightarrow Y$  un morphisme de complexes de  $B$ -modules. Or on a

$$\text{Hom}^\bullet(g \otimes h, f)^n : \begin{cases} \text{Hom}^\bullet(M \otimes_B Y, X)^n \longrightarrow \text{Hom}^\bullet(M' \otimes_B Y', X')^n \\ (u_{j, k})_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2} \longmapsto (f^{j+n} u_{j, k} (g^{j-k} \otimes h^k))_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2}. \end{cases}$$

$$\text{et } \text{Hom}^\bullet(h, \text{Hom}^\bullet(g, f))^n : \begin{cases} \text{Hom}^\bullet(Y, \text{Hom}^\bullet(M, X))^n \longrightarrow \text{Hom}^\bullet(Y', \text{Hom}^\bullet(M', X'))^n \\ (u_{j, k})_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2} \longmapsto (f^{j+n} \circ u_{j, k} \circ h^k(\cdot) (g^{j-k}(\cdot)))_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2}. \end{cases}$$

Soit  $(u_{j, k})_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2} \in \text{Hom}^\bullet(g \otimes h, f)^n$ , le calcul précédent montre que la composante d'indice  $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$  de

$$\text{Hom}^\bullet(h, \text{Hom}^\bullet(g, f))^n \kappa^n(u_{j, k})_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2}$$

est donnée par  $f^{j+n} \circ \kappa_{j, k, n} u_{j, k} \circ h^k(\cdot) (g^{j-k}(\cdot))$  c'est-à-dire que pour  $y \in Y^k$ ,  $m \in M^{j, k}$ , on a

$$f^{j+n} \circ \kappa_{j,k,n} u_{j,k}(h^k(y))(g^{j-k}(m)) = f^{j+n} u_{j,k}(g^{j-k}(m) \otimes h^k(y)) = \kappa_{M'j-k, Y'^k, X'^{j+n}}(f^{j+n} u_{j,k}(g^{j-k} \otimes h^k))(y)(m).$$

On en déduit la commutativité du diagramme suivant c'est-à-dire la naturalité souhaitée

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}^{\bullet}(M \otimes_B Y, X)^n & \xrightarrow{\kappa^n} & \text{Hom}^{\bullet}(Y, \text{Hom}^{\bullet}(M, X))^n \\ \text{Hom}^{\bullet}(g \otimes h, f)^n \downarrow & & \downarrow \text{Hom}^{\bullet}(h, \text{Hom}^{\bullet}(g, f))^n \\ \text{Hom}^{\bullet}(M' \otimes_B Y', X')^n & \xrightarrow{\kappa^n} & \text{Hom}^{\bullet}(Y', \text{Hom}^{\bullet}(M', X'))^n \end{array}$$

**Corollaire 5.16 — Foncteurs adjoints et isomorphisme cher à Cartan.** Soient  $M$  un complexe de  $A$ -modules- $B$ ,  $X$  un complexe de  $A$ -modules et  $Y$  un complexe de  $B$ -modules. L'exemple 3.75 et la proposition 5.15 montrent que  $Z^0 \kappa_{M,X,Y}$  réalise un isomorphisme naturel entre

$$\text{Hom}_{A\text{Com}}(M \otimes_B Y, X) \quad \text{et} \quad \text{Hom}_{B\text{Com}}(Y, \text{Hom}^{\bullet}(M, X)).$$

Autrement dit, les foncteurs,  $M \otimes_B \bullet : B\text{Com} \rightarrow A\text{Com}$  et  $\text{Hom}^{\bullet}(M, \bullet) : A\text{Com} \rightarrow B\text{Com}$  sont adjoints l'un de l'autre. De même,  $H^0 \kappa_{M,X,Y}$  réalise un isomorphisme naturel entre

$$\text{Hom}_{A\text{Com}^{\text{ht}}}(M \otimes_B Y, X) \quad \text{et} \quad \text{Hom}_{B\text{Com}^{\text{ht}}}(Y, \text{Hom}^{\bullet}(M, X)).$$

Autrement dit, les foncteurs,  $M \otimes_B \bullet : B\text{Com}^{\text{ht}} \rightarrow A\text{Com}^{\text{ht}}$  et  $\text{Hom}^{\bullet}(M, \bullet) : A\text{Com}^{\text{ht}} \rightarrow B\text{Com}^{\text{ht}}$  sont adjoints l'un de l'autre.

Calculons les morphismes d'adjonction :  $\varepsilon_{M,X} : M \otimes_B \text{Hom}^{\bullet}(M, X) \rightarrow X$  et  $\eta_{M,Y} : Y \rightarrow \text{Hom}^{\bullet}(M, M \otimes_B Y)$ . Par définition, on a  $\eta_{M,Y} = Z^0 \kappa_{M,M \otimes_B Y,Y}(\text{id}_{M \otimes_B Y}) = \kappa_{M,M \otimes_B Y,Y}(\text{id}_{M \otimes_B Y})$ . Or  $\text{id}_{M \otimes_B Y}$  vu comme élément de

$$\prod_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2} \text{Hom}_A(M^{j-k} \otimes_B Y^k, (M \otimes_B Y)^j)$$

n'est autre que la famille des inclusions canoniques. Ainsi

$$\eta_{M,Y}^j : \begin{cases} Y^j \longrightarrow \text{Hom}^{\bullet}(M, M \otimes_B Y)^j = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(M^k, (M \otimes_B Y)^{k+j}) \\ y \longmapsto (m \in M^k \mapsto m \otimes y \in M^k \otimes Y^j)_{k \in \mathbb{Z}}. \end{cases}$$

En particulier, lorsque  $M = B$  et en identifiant  $M \otimes_B B$  à  $M$ , on obtient (puisque  $B$  est concentré en degré 0)

$$\eta_{M,B} : \begin{cases} B \longrightarrow \text{Hom}^{\bullet}(M, M)^0 = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(M^k, M^k) \\ y \longmapsto (m \in M^k \mapsto mb \in M^k)_{k \in \mathbb{Z}}. \end{cases}$$

Calculons à présent  $\varepsilon_{M,X}$ . Par définition,  $\varepsilon_{M,X} = (Z^0 \kappa_{M,X,\text{Hom}^{\bullet}(M,X)})^{-1}(\text{id}_{\text{Hom}^{\bullet}(M,X)})$ . Mais l'élément  $\text{id}_{\text{Hom}^{\bullet}(M,X)}$  vu comme élément de

$$\prod_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2} \text{Hom}_B(\text{Hom}^{\bullet}(M, X)^k, \text{Hom}_A(M^{j-k}, X^j))$$

n'est autre que la famille des surjections canoniques. On obtient que la restriction de  $\varepsilon_{M,X}^k$  à  $M^{j-k} \otimes \text{Hom}^{\bullet}(M, X)^k$  n'est autre que l'application

$$\begin{cases} M^{j-k} \otimes \left( \prod_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(M^i, X^{k+i}) \right) \longrightarrow X^j \\ m \otimes (g_i)_{i \in \mathbb{Z}} \longmapsto g_{j-k}(m). \end{cases}$$

Autrement dit, avec les notations de la proposition 5.13, on a  $\varepsilon_{M,X} = \gamma_{M,X}$ . ■

**Proposition 5.17 — Complexe borné de modules projectifs.** Soit  $(M, d_M)$  un complexe de  $A$ -modules. Les propositions suivantes sont équivalentes

- (i) Pour tout complexe  $Y$  de  $A$ -modules,  $\tau_{M,Y} : M^{\vee} \otimes_A Y \rightarrow \text{Hom}^{\bullet}(M, Y)$  est un isomorphisme ;
- (ii) Pour tout complexe  $X$  de  $A$ -modules,  $\tau_{X,M} : X^{\vee} \otimes_A M \rightarrow \text{Hom}^{\bullet}(X, M)$  est un isomorphisme ;
- (iii)  $\tau_{M,M} : M^{\vee} \otimes_A M \rightarrow \text{Hom}^{\bullet}(M, M)$  est un isomorphisme ;
- (iv) Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , l'application  $\tau_{M,M}^n : (M^{\vee} \otimes_A M)^n \rightarrow \text{Hom}^{\bullet}(M, M)^n$  est surjective ;
- (v)  $M$  est un complexe borné dont toutes les composantes homogènes sont des modules projectifs de type fini.

**Preuve.** On a bien sûr (i)  $\Rightarrow$  (iii), (ii)  $\Rightarrow$  (iii) et (iii)  $\Rightarrow$  (iv). Montrons que (iv)  $\Rightarrow$  (v). Par définition,  $\tau_{M,M}^0$  est la composée des applications

$$S = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{M^k, M^k} \quad \text{et} \quad i : \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(M^k, M^k) \rightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(M^k, M^k)$$

l'inclusion canonique. La surjectivité de  $\tau_{M, M}^0$  assure celle de  $i$  et donc le fait qu'il n'y ait qu'un nombre fini de  $\text{Hom}_A(M^k, M^k)$  non nuls c'est-à-dire un nombre fini de  $M^k$  non nuls. Ainsi  $M$  est un complexe borné, de plus  $i$  est un isomorphisme et donc  $S$  est surjective. On en déduit que chacune des applications  $\tau_{M^k, M^k}$  est surjective ce qui assure que chacun des  $M^k$  est projectif de type fini.

Montrons que  $(v) \Rightarrow (i)$  et  $(v) \Rightarrow (ii)$ . Comme  $M$  est un complexe borné, la somme directe et le produit définissant les composantes homogènes des complexes  $M^\vee \otimes_A Y$ ,  $X^\vee \otimes_A M$ ,  $\text{Hom}^\bullet(M, Y)$  et  $\text{Hom}^\bullet(X, M)$  sont finies. Les inclusions canoniques des sommes directes dans les produits sont donc des isomorphismes. De plus, tous les  $M^k$  sont projectifs de type fini, ce qui assure que les  $\tau_{M^k, Y^j}$  et  $\tau_{X^k, M^j}$  sont des isomorphismes. ■



# BIBLIOGRAPHIE

- [SGA4] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, et J-L. VERDIER. *SGA 4, Exposé XVII*, volume 305 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1973.
- [BEC] V. BECK. Invariant relatifs : une algèbre extérieure. *C. R. Acad. Sc. Paris, Scr. I* 342 :p.727–732, 2006.
- [BLM] C. BONNAFÉ, G.I. LEHRER, et J. MICHEL. Twisted invariant theory for reflection groups. *Nagoya Math. J.*, 182 :p.135–170, 2006.
- [BPM] V. BECK, J. MALICK, et G. PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005.
- [BBK] N. BOURBAKI. *Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 4, 5 et 6*. Masson, 1981.
- [BBKA] N. BOURBAKI. *Algèbre, Chapitre 1 à 3*. Springer, 2007.
- [BRO] M. BROUE. Higman criterion revisited. *Michigan Journal of Mathematics*, 2008.
- [CHE] C. CHEVALLEY. Invariant of finite groups generated by reflections. *Amer. J. Math.*, 77 :p.778–782, 1955.
- [FUL] W. FULTON et J. HARRIS. *Representation Theory, A First Course*, volume 129 of *GTM*. Springer, 1991.
- [GRI] M. GRIME. Adjoint functors and triangulated categories. *arXiv :math/0601575v3*, 2007.
- [GUT] E.A. GUTKIN. Matrices connected with groups generated by mappings. *Funct Anal and Appl*, 7 :p.153–154, 1973.
- [HAP] D. HAPPEL. *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*, volume 119 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, 1988.
- [H-S] J. HARTMANN et A.V. SHEPLER. Reflection groups and differential forms. *arXiv :math/0710.3232v1*, 2007.
- [K-J] G. JAMES et A. KERBER. *The Representation Theory of the Symmetric Group*, volume 16 of *Encyclopedia of Mathematics*. Addison-Wesley, 1981.
- [KEL] B. KELLER. Chain complexes and stable categories. *Manuscripta Math.*, 67 :p.379–417, 1990.
- [KEL1] B. KELLER. Deriving dg-categories. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 27 :p.63–102, 1994.
- [KRA] H. KRAUSE. Derived categories, resolutions, and brown representability. *arXiv :math/0511047v3*, 2006.
- [K-S] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA. *Categories and Sheaves*, volume 332 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 2006.
- [MCL] S. MAC LANE. *Categories for the Working Mathematician*, volume 5 of *GTM*. Springer, 1971.
- [LEH2] G.I. LEHRER. A new proof of steinberg’s fixed point theorem. *Int. Math. Res. Not.*, 28 :p.1407–1411, 2004.
- [LEH1] G.I. LEHRER. Remarks concerning linear characters of reflection groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133 :p.3163–3169, 2005.
- [LIN] M. LINCKELMANN. La catégorie stable d’une algèbre auto-injective est triangulée. *C.R. Acad. Sc. Paris, Sér. I Math.* 305 :p.403–406, 1987.
- [L-M] G.I. LEHRER et J. MICHEL. Invariant theory and eigenspaces for unitary reflection. *C.R. Acad. Sc. Paris, Scr. I* 336 :p.795–800, 2003.
- [MAL] M.-P. MALLIAVIN. *Les groupes finis et leurs représentations complexes*. Maîtrise de mathématiques pures. Masson, 1981.
- [MAY] J.-P. MAY. The additivity of traces in triangulated categories. *Advances in Mathematics*, 163 :p.34–73, 2001.
- [NEE1] A. NEEMAN. The connection between the k-theory localization theorem of thomason, trobaugh and yao and the smashing subcategories of bousfield and ravenel. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 25 :p.547–566, 1992.
- [NEE] A. NEEMAN. *Triangulated Categories*, volume 148 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, 2001.
- [OPD] E. OPDAM. Complex reflection groups and fake degree. *Preprint*, 1998.
- [O-S] P. ORLIK et L. SOLOMON. Unitary reflection groups and cohomology. *Invent. Math.*, 59 :p.77–94, 1980.
- [O-T] P. ORLIK et H. TERAO. *Arrangements of Hyperplanes*, volume 300 of *Grundlehren der mathematischen wissenschaften*. Springer-Verlag, 1992.

- 
- [O-V] A. Y. OKOUNKOV et A. M. VERSHIK. A new approach to representation theory of symmetric groups. *Selecta Math., New Series*, 2 :p.581–605, 1996.
- [QUI] D. QUILEN. *Higher Algebraic K-theory. I*, volume 341 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1972.
- [RAV] D. RAVENEL. Localization with respect to certain periodic homology theories. *American Journal of Mathematics*, 106 :p.351–414, 1984.
- [RIC] J. RICKARD. Derived categories and stable equivalence. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 61 :p.303–317, 1989.
- [RIC1] J. RICKARD. Morita theory for derived categories. *J. London Math. Soc.*, (2) 39 :p.436–456, 1989.
- [SER] J.P. SERRE. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, 1966.
- [SHE] A.V. SHEPLER. Semi-invariants of finite reflection groups. *Journal of Algebra*, 220 :p.314–326, 1999.
- [SPR1] T.A. SPRINGER. Regular elements of finite reflection groups. *Invent. Math.*, 25 :p.159–198, 1974.
- [SPR2] T.A. SPRINGER. *Invariant Theory*, volume 585 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1977.
- [S-T] G. C. SHEPHARD et J. A. TODD. Finite unitary reflection groups. *Canad. J. of Maths.*, VI :p.274–304, 1954.
- [STA] R. STANLEY. Relative invariants of finite groups generated by pseudoreflections. *J. of Algebra*, 49 :p.134–148, 1977.
- [STE] R. STEINBERG. Differential equations invariant under finite reflection groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 112 :p.392–400, 1964.
- [VER] J.-L. VERDIER. *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, volume 239 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, 1996.