



Rapport d'activité 2025-2026

1 Bilan général

1.1 Les groupes IREM

Trois groupes d'enseignants ont travaillé cette année à l'IREM : chacun de ces groupes était composé de 4 à 9 enseignants (du premier degré au supérieur) encadré par un ou plusieurs enseignant·e·s-chercheur·e·s (Philippe Grillot, Caroline Brosse, Myriam Clouet, Thi Bich Hanh Dao, Mathieu Liedloff, Nicolas Ollinger, Jolan Philippe, Sophie Robert, Wadoud Semmar et Vincent Beck) de l'université d'Orléans.

Les thématiques abordées par les groupes étaient les suivantes

- (i) Mathématiques au cycle 3
- (ii) Informatique
- (iii) La malle à maths

Les premier et deuxième groupes relèvent des priorités nationales choisies par la DGESCO en lien avec l'ADIREM (assemblée des directeurs d'IREM) et bénéficient d'une attribution d'heures sur le volet APN.

1.2 Rayonnement

L'IREM Centre Val de Loire dispose d'une page web, hébergée sur la page de l'institut Denis Poisson, le laboratoire de mathématiques des universités de Tours et d'Orléans (<https://www.idpoisson.fr/irem/>). Cette page accueille les ressources produites par l'IREM, en particulier la brochure « Algorithmique au cycle 3 ». Cette brochure est référencée sur la base de publications mathématiques : Publimath. La page de l'IREM pointe aussi vers la version numérique de la mallette CORMECOULI hébergée par Centre Sciences, L'IREM ayant participé à la conception de cette mallette pédagogique, lauréate du prix Jacqueline Ferrand de l'innovation pédagogique décerné par la Société Mathématique de France.

Le groupe « Malle à Maths » a publié un article intitulé Les fils d'Ariane dans la revue « Au Fil des Maths » de l'APMEP (association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public).

Le groupe « Informatique » a organisé un stage du 15 au 26 juin intitulé « Passe la Seconde » à destination de 16 élèves de Seconde dont les objectifs sont de développer la culture scientifique et les compétences des participants, ainsi que la découverte des métiers du numérique, des mathématiques et de la recherche.

1.3 Réseau national des IREM

Vincent Beck a participé au travail de l'ADIREM (assemblée des directeurs d'IREM qui regroupe l'ensemble des directeurs d'IREM en France) pour trois des quatre jours de réunion annuels.

1.4 Fonctionnement

Comme l'année précédente, la gestion des OM a été effectuée par Emmanuel Thomas de façon efficace. Toutes les informations pour l'émission des OM sont partagées sur le nuage.

2 Bilan par groupe

2.1 Groupe Mathématiques au cycle 3

Cette année, le groupe a pu se réunir quatre fois le 8 octobre, 7 janvier, 25 mars et 10 juin. Les réunions ont eu lieu sur le centre INSPE de Fondettes. La constitution du groupe a légèrement évolué par rapport à l'année dernière. Une collègue du second degré a rejoint le groupe, deux collègues du premier degré ont quitté le groupe. Le groupe est ainsi constitué de quatre personnes : une collègue du premier degré et trois du second degré.

Le travail de l'année a permis de poursuivre la construction de la progression sur les fractions au cycle 3. Cette année, nous avons travaillé sur la transition entre la représentation graphique donnée au "jeu des sixièmes" introduisant l'addition de fractions de même dénominateur avec la représentation des fractions sur la droite graduée. Nous avons aussi travaillé sur l'introduction du guide-âne avec pour objectif de faire le lien entre a b -ième et le quotient $a : b$. Et enfin nous avons produit deux séances sur les égalités de fractions $a/b = ca/cb$. Quelques-unes des séances ont été menées en classe ce qui a permis de les amender.

La conception des séances se fait via un document de travail partagé accessible ici.

Informatique au Collège et au Lycée groupe IREM, bilan 2025-2026

8 juillet 2026

Contexte

Le groupe *informatique au collège et au lycée* travaille à l'intégration de la discipline informatique dans l'enseignement secondaire (collège, lycée) tout en assurant une continuité avec le supérieur. Cette démarche s'inscrit dans la volonté de renforcer la culture scientifique et numérique des enseignants et des élèves. La science informatique est notamment présente dans les enseignements suivants :

- l'enseignement de spécialité *numérique et sciences informatiques* (NSI) en première et terminale (introduit en 2019 et faisant suite à l'option ISN) ;
- l'enseignement de tronc commun *sciences numériques et technologie* (SNT) en seconde ;
- l'enseignement de *l'algorithmique et programmation* dans le cadre du programme de mathématiques de seconde ainsi que l'enseignement de *l'algorithmique et de Scratch* au collège ;
- l'enseignement de l'option *informatique* dans certains collèges pilotes de l'académie.

Depuis une dizaine d'année, l'activité principale du groupe IREM était le montage et l'animation d'une *Journée Enseignement de la Discipline Informatique* (JEDI) destinée aux enseignants de l'académie d'Orléans-Tours. Aux dernières éditions de JEDI, nous recevions ainsi une centaine d'enseignants à qui nous proposons des conférences, des ateliers et des tables rondes variées.

Pour l'année 2025-2026, le groupe IREM recentre ses activités pour s'adresser directement aux lycéens. Dans ce cadre, les laboratoires LIFO¹ et IDP² s'associent pour organiser un stage d'immersion de deux semaines à destination de 16 élèves de seconde, prévu en juin 2026. Le groupe IREM, pleinement impliqué dans ce projet, participe activement à l'organisation et l'animation de ce stage, intitulé « Passe la 2^{de} ! ».

Objectifs du stage

Les élèves en classe de seconde réalisent un stage de deux semaines en fin d'année scolaire, qui combine une dimension professionnelle, pédagogique et d'orientation. Le stage « Passe la 2^{de} ! » a pour objectif d'accueillir 16 élèves à l'université d'Orléans du 15 au 26 juin 2026. Animé par une équipe d'une vingtaine d'enseignants-chercheurs en informatique et en mathématiques, des membres du groupe IREM, et quelques intervenants extérieurs à ces disciplines, ce stage propose aux participants un programme scientifique stimulant, leur donnant le goût des sciences. L'objectif est de développer la culture scientifique et les compétences des participants, ainsi que la découverte des métiers du numérique, des mathématiques et de la recherche.

1. Laboratoire d'Informatique Fondamentale d'Orléans

2. Institut Denis Poisson

Par des mises en situation, les participants découvrent comment se construit la recherche scientifique. La réalisation de projets, seuls et en groupe, leur permet de s'approprier des concepts fondamentaux. Ce stage favorise aussi la curiosité, la rigueur, la pensée critique, la compréhension scientifique, l'esprit d'analyse et l'éthique.

Les impacts visés sont donc multiples :

- le développement de la culture scientifique et des compétences des élèves, ainsi que la découverte des métiers de la recherche, du numérique et des mathématiques ;
- la promotion de la diversité dans les filières et métiers du numérique ;
- le renforcement des compétences des enseignants-chercheurs en matière de médiation scientifique ;
- le développement des liens entre lycées et université ;
- un éclairage plus précis des choix d'orientation pour les élèves.

Le stage est structuré autour de trois axes :

- **Découvrir** des concepts nouveaux et accessibles en mathématiques et en informatique ;
- **Comprendre** les notions fondamentales à travers des activités stimulantes ;
- **Créer** des projets concrets pour appliquer ses connaissances et développer son esprit d'innovation.

Ces axes se traduisent concrètement par des défis, des ateliers, des exposés, des sessions d'échanges et des moments de détente, qui rythment chacune des journées du stage. Ce nouvel événement, autour des mathématiques et de l'informatique, vient également fédérer les collègues autour d'un nouveau projet commun.

Finalement, ce stage constitue une opportunité de découvrir l'univers universitaire et ses formations, en particulier pour des jeunes se sentant parfois éloignés de l'enseignement supérieur et de la recherche. Pour promouvoir la mixité dans les filières scientifiques, une attention particulière est portée lors de la sélection des participants.

Activités du groupe IREM

Pour l'année 2025-2026, le groupe IREM est constitué d'universitaires, d'enseignants de collège, de lycée :

Caroline BROSSE	(université d'Orléans, Orléans)
Gwendal BRULAIS	(collège Condorcet, Fleury-les-Aubrais)
Myriam CLOUET	(université d'Orléans, Orléans)
Thi Bich Hanh DAO	(université d'Orléans, Orléans)
Fanny DUHAMEL	(collège Pergaud, Sainte-Sévère-sur-Indre)
Stefan EVEN	(lycée Pothier, Orléans)
Mathieu LIEDLOFF	(université d'Orléans, Orléans)
Pierre MAROT	(lycée Descartes, Tours)
Nicolas OLLINGER	(université d'Orléans, Orléans)
Jolan PHILIPPE	(université d'Orléans, Orléans)
Sophie ROBERT	(université d'Orléans, Orléans)
Wadoud SEMMAR	(université d'Orléans, Orléans)

Le groupe s'est réuni lors de 3 séances pour des réunions de 3 heures.

Implication dans le stage « Passe la 2^{de}! ». Au cours de l'année, le groupe a cerné les compétences habituellement maîtrisées par des élèves en fin de seconde. L'expérience d'enseignants de collège et lycée, partagée au sein du groupe, a permis de situer les activités pouvant être proposées aux stagiaires. Le groupe a servi de cobaye pour présenter des activités et des *proof of concepts*. Par ailleurs, de nombreux membres du groupe se sont directement impliqués dans l'animation et le montage d'activités variées autour de l'informatique et des mathématiques.

Pour cause de températures caniculaires, la semaine du 22 juin a malheureusement dû être annulée afin de préserver les participants et les intervenants.

Fort de cette nouvelle expérience réussie, nous envisageons la reconduction d'un stage destiné aux secondes, tout comme la réorganisation d'une journée JEDI qui s'adresse aux enseignants.

MATHIEU LIEDLOFF,
*Professeur des Universités, Université d'Orléans,
UFR Sciences et Techniques, Laboratoire d'Informatique Fondamentale d'Orléans*

2.3 Groupe « Malle à Maths »

Participants : Mathieu Vaidie, Hélène Gagneux (INSPE), Ilme Gruner (Université), Guy-Antoine Dufourd (Centre Sciences), Olivier Créchet, Véronique Roser, Xavier Girard (Centre Sciences), Philippe Grillot.

Lieux des réunions du groupe : 4 réunions dans les locaux de Centre Sciences (Orléans-Faubourg Bourgogne) et une au lycée Marguerite de Navarre.

Qu'est ce que la Malle à maths ? À l'initiative de l'Institut Denis Poisson, Centre Sciences a développé à destination des médiathèques et des enseignants une malle sur les mathématiques : tantôt cabinet de curiosités mathématiques, ou tantôt malle de voyage dans des univers géométriques. Cette ressource invite chacun à découvrir la diversité des domaines abordés : géométrie, chaos, probabilités, pavages, fractales, nombres figurés, surfaces minimales,...

Objectifs et productions du groupe IREM :

À partir d'un objet choisi dans la malle à maths, le groupe a pour objectif de relier l'intuition ou l'observation à la conceptualisation mathématiques. Des fiches d'activités (fiche de présentation d'un thème, d'une fiche pour le professeur et d'une fiche pour l'élève) ont été construites à destination des professeurs des écoles et des professeurs du second degré. Plusieurs films ont été réalisés notamment autour de la règle à calcul (voir présentation de la règle à calcul). Les thèmes étudiés durant l'année ont été : triangle de Pascal (publication d'un article dans le numéro 559 d'« au fil des maths », la revue de l'APMEP), puzzle, la planche de Galton, règle à calculs, problème de Steiner. Les fiches produites se trouvent en annexe.

Annexes

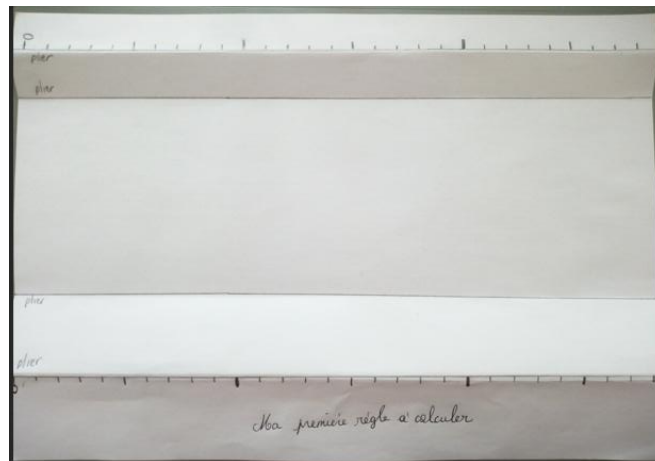
Groupe Malle à maths

Règle à calcul primaire

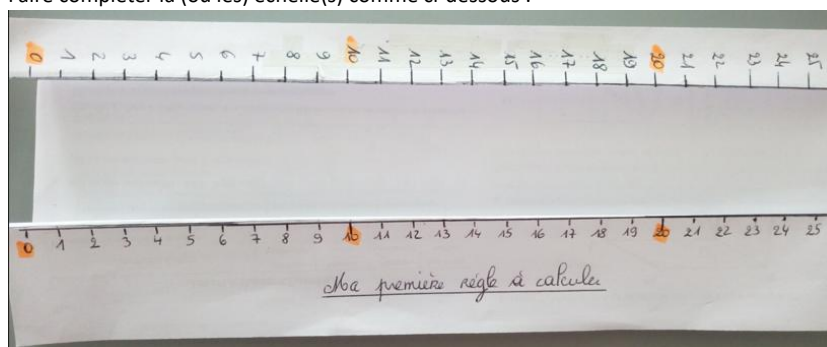
Irem : Malle à maths

« Ma première règle à calculer »

1. Distribuer aux élèves le modèle comme ci-dessous, où 1 graduation correspond à 1 centimètre qui permettra après pliage de réaliser « la règle à calculer ».



2. Faire compléter la (ou les) échelle(s) comme ci-dessous :

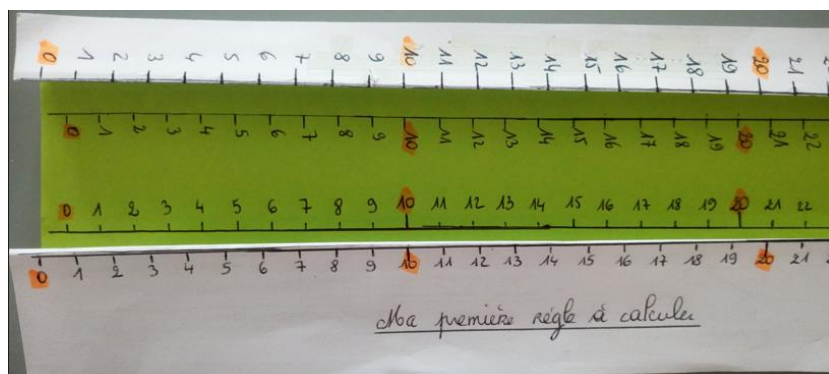


Objectifs d'apprentissages travaillés :

Connaitre la suite écrite et la suite orale des nombres jusqu'à cent. (jusqu'à 28, ici)

On pourra utiliser la deuxième échelle pour faire travailler le comptage de deux en deux en partant de 0 puis en partant de 1.

3. Donner aux élèves la règle mobile verte qu'il faudra insérer afin d'obtenir « leur règle à calculer » :



Expérience n°1 : Que se passe-t-il si on déplace la règle mobile ?

Par exemple, décalons la règle mobile afin de faire correspondre « le nombre 0 » de la règle mobile verte avec le « nombre 8 » de la règle fixe blanche.



Ainsi, à **0**, on associe le nombre **8**.

1. Compléter le tableau suivant :

Nombre de la ligne verte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Nombre de la ligne blanche	8	9												

2. Si on choisit le nombre 18 sur la règle mobile verte, quel est le nombre associé figurant sur la ligne blanche ?
Quel calcul la règle nous permet-elle de faire ?

Bilan : Lorsque l'on déplace la règle mobile afin d'associer à **0** le nombre **8**, quel calcul « la règle à calculer » nous permet-elle de réaliser ?

Ainsi , on écrira :

$8 + 0 = \dots\dots$	$8 + 1 = \dots\dots$	$8 + 2 = \dots\dots$	$8 + 3 = \dots\dots$	$8 + 4 = \dots\dots$	$8 + 5 = \dots\dots$
$8 + 6 = \dots\dots$	$8 + 7 = \dots\dots$	$8 + 8 = \dots\dots$	$8 + 9 = \dots\dots$	$8 + 10 = \dots\dots$	$8 + 11 = \dots\dots$
$8 + 12 = \dots\dots$	$8 + 13 = \dots\dots$	et $8 + 18 = \dots\dots$			

3. Je souhaiterais, à l'aide de « la règle à calculer », faire les additions suivantes :

$6 + 0 = \dots\dots$	$6 + 1 = \dots\dots$	$6 + 2 = \dots\dots$	$6 + 3 = \dots\dots$	$6 + 4 = \dots\dots$	$6 + 5 = \dots\dots$
$6 + 6 = \dots\dots$	$6 + 7 = \dots\dots$	$6 + 8 = \dots\dots$	$6 + 9 = \dots\dots$	$6 + 10 = \dots\dots$	$6 + 11 = \dots\dots$

Explique comment faire ?

Expérience n°2 : Qui pourrait se servir encore aujourd'hui de la règle à calcul ?

1. Réalise les calculs suivants :

$7 + 11 = \dots\dots$	$9 + 3 = \dots\dots$	$11 + 4 = \dots\dots$	$6 + 18 = \dots\dots$	$5 + 17 = \dots\dots$	$12 + 15 = \dots\dots$
$4 + 7 = \dots\dots$	$13 + 9 = \dots\dots$	$16 + 8 = \dots\dots$	$9 + 17 = \dots\dots$	$9 + 12 = \dots\dots$	$3 + 28 = \dots\dots$

2. Vérifie tes réponses à l'aide de la règle à calcul.

3. **Pour aller plus loin** : Complète les additions suivantes :

$11 + \dots = 15$	$\dots + 13 = 25$	$19 + 5 = \dots\dots$	$22 + 8 = \dots\dots$	$\dots + 8 = 21$	$\dots + 7 = \dots\dots$
-------------------	-------------------	-----------------------	-----------------------	------------------	--------------------------

Bilan : **Toi**, tu pourrais te servir encore de « la règle à calculer » pour t'aider à réaliser des additions et à **vérifier tes résultats** sans l'aide de ton professeur !

3^{ème}

Fiche professeur

Règle à calcul
(type collège)
Durée : 50 minutes



Dans la fiche « professeur », vous trouverez :

- les **objectifs principaux visés** pour remédier à des problèmes fréquemment rencontrés par nos élèves, comme ici la définition du mot « fonction » ;
- les **corrections** des différentes questions posées aux élèves ;
- des **remarques** sur les questions posées ou des propositions pour prolonger la séance

Expérience n°1 : Que se passe-t-il si on déplace la règle mobile ?

Objectifs principaux : - Donner du sens à la définition d'une fonction. La règle à calcul permet de visualiser un procédé qui permet d'associer à chaque nombre de la ligne B un unique nombre de la ligne A ;

- Apprendre à manipuler la règle à calcul pour faire des multiplications/divisions

1. Quels nombres sont alors associés à 2 ? à 3 ? à 5 ? à 7 ? à 10 ? à 0,8 ? à 1,5 ? à 2,3 ?

Remarques : Les objectifs de cette question sont les suivants :

- utiliser le vocabulaire : « à 2, on associe 6 » ;
- introduire la notation « $\mapsto$ » de manière implicite ;

Les premiers exemples sont volontairement simples afin de permettre à l'ensemble des élèves de s'impliquer et de comprendre le fonctionnement de la règle : ils arriveront facilement à deviner que la règle à calcul permet de multiplier par 3 ; les derniers exemples sont plus difficiles afin de comprendre l'utilité de l'usage de la règle.

Correction :

$$2 \mapsto 6$$

$$3 \mapsto 9$$

$$5 \mapsto 15$$

$$7 \mapsto 21$$

$$10 \mapsto 30$$

$$0,8 \mapsto 2,4$$

$$1,5 \mapsto 4,5$$

$$2,3 \mapsto 6,9$$

2. Si on choisit un nombre x au hasard. Quel nombre lui associe-t-on ? son triple $3x$.

Objectif principal : - Introduire l'expression d'une fonction

Conclusion : Lorsque l'on déplace la règle mobile afin d'associer à 1, le nombre 3, quel calcul, la règle à calcul nous permet-elle de réaliser facilement ?

Elle permet de réaliser la multiplication d'un nombre par 3

Remarques :

- on pourra utiliser la notion de **programme de calcul** pour aider les élèves à trouver l'expression algébrique **$3x$**
- on pourra définir les notations $f : x \mapsto 3x$ et $f(x) = 3x$
- on pourra introduire le vocabulaire « **L'image de par la fonction f est** »

3. Comment réaliser la multiplication par 4 à l'aide de la règle à calcul ? Expliquez votre démarche.

Objectif principal : - faire découvrir aux élèves que l'on peut, pour faciliter la visualisation des nombres et de leurs images, utiliser un tableau appelé tableau de valeurs d'une fonction.

Correction : à 1 (de la ligne verte de la règle mobile), on associe le nombre 4 de la ligne blanche.

En utilisant la règle à calcul, compléter le **tableau de valeurs** suivant :

Nombres de départ x	2	3	8	1,9	2,3	17
Nombres d'arrivée $4x$	8	24	32	7,6	9,2	68

4. Pour aller plus loin : Comment diviser un nombre par 3 grâce à la règle à calcul ?

Objectif principal : - Introduire la notion d'antécédents

Correction : On décale la règle mobile de telle manière à associer à 1 de la ligne verte, le nombre 3 de la ligne blanche (comme à la question 1). On repère sur la ligne blanche A le nombre par lequel on souhaite diviser par 3, puis on lit le nombre correspondant sur la ligne verte, qui est le résultat de la division du nombre choisi par 3.

Remarque : - on pourra faire l'analogie avec le fait de « remonter » un programme de calcul.

Expérience n°2 : Qui pourrait se servir encore aujourd'hui de la règle à calcul ?

Objectif principal : - montrer l'efficacité de la règle à calcul et qu'elle pourrait encore servir de nos jours. De plus, elle ne tombe jamais en panne de batterie !

Correction :

Vêtements	T-shirt	Short	Pantalon	Chemise	Robe	Costume
Prix (en €)	3	4	7	10	12	30
Prix (en €) après la remise	2,4	3,2	5,6	8	9,6	24

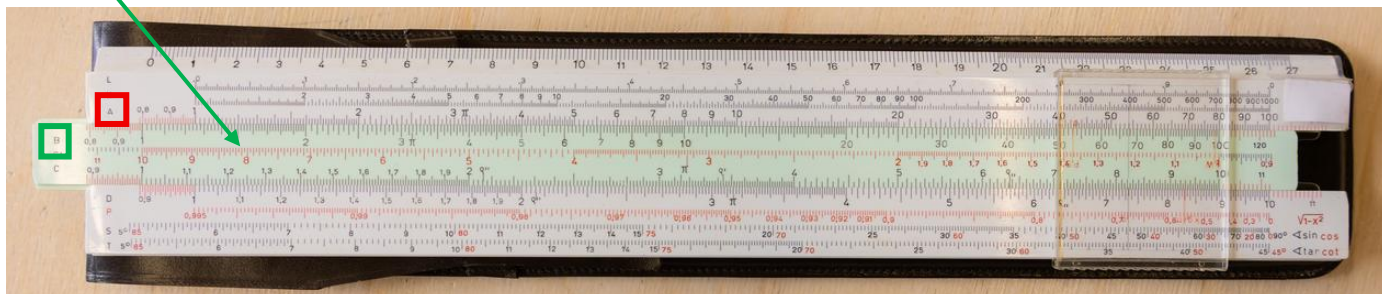
Expliquez votre démarche : Lorsque l'on effectue une remise de 20 %, cela signifie que l'on paiera seulement 80% du prix de l'article, cela revient donc à multiplier le prix de l'article par 0,8.

Ainsi, on décale la règle mobile de telle manière à associer à 1 de la ligne verte, le nombre 0,8 de la ligne blanche. Il n'y a plus qu'à lire les images des nombres 3 ;4 ;7 ;10 ;12 et 30

Remarques : Pour prolonger la séance : on pourra aussi demander aux élèves comment faire une augmentation de 20%, à l'aide de la règle à calcul (par exemple, comment passer du prix H.T. au prix T.T.C.)

Et en mathématiques, qu'ai-je appris ? J'ai découvert la définition d'une fonction. J'ai appris à employer des nouveaux mots « image », « antécédents » et « tableau de valeurs ». Je me suis remémoré(e) comment faire une réduction de t %.

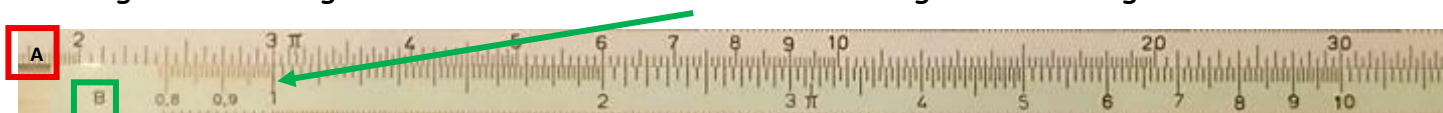
Voici une **règle à calculs**, ancêtre de la calculatrice. Elle est composée d'une règle fixe et d'une règle mobile de couleur verte, sur lesquelles sont inscrites plusieurs échelles.



Un peu d'histoire : La règle à calculs a été inventée au début du XVII^{ème} siècle, mais son usage s'est seulement répandu en France au XIX^{ème} siècle : elle était utilisée par les étudiants, les ingénieurs, les scientifiques, les architectes... et même par les astronautes de la mission Apollo 13 qui ont dû recalculer leur trajectoire de retour vers la Terre ! Son usage perdure encore dans certains domaines spécifiques, notamment dans la navigation aérienne. Elles sont encore autorisées dans certains concours d'entrée aux Grandes Ecoles, comme les Mines-Ponts ou l'école Polytechnique.

Expérience n°1 : Que se passe-t-il si on déplace la règle mobile ?

Par exemple, décalons la règle mobile de telle manière à faire correspondre « le nombre 1 » de la ligne B de la règle verte avec le « le nombre 3 » de la ligne A de la règle blanche.



Ainsi, à 1, on associe 3

1. Quels nombres sont alors associés à 2 ? à 3 ? à 5 ? à 7 ? à 10 ? à 0,8 ? à 1,5 ? à 2,3 ?

2 →

3 →

5 →

7 →

10 →

0,8 →

1,5 →

2,3 →

2. Si on choisit un nombre au hasard. Quel nombre lui associe-t-on ?

Conclusion : Lorsque l'on déplace la règle mobile afin d'associer à 1, le nombre 3, quel calcul, la règle à calcul nous permet-elle de réaliser facilement ?

.....

3. Comment réaliser la multiplication par 4 à l'aide de la règle à calculs ? Expliquez votre démarche.

En utilisant la règle à calculs, compléter le **tableau de valeurs** suivant :

Nombres de départ x	2	3	8	1,9	2,3	17
Nombres d'arrivée ...						

4. Pour aller plus loin : Comment diviser un nombre par 3 grâce à la règle à calculs ?

Expérience n°2 : Qui pourrait se servir encore aujourd'hui de la règle à calculs ?

La grand-mère d'Anna tient une petite friperie près de Centre Sciences à Orléans. Les prix des différents vêtements de sa boutique sont donnés dans le tableau suivant :

Vêtements	T-shirt	Short	Pantalon	Chemise	Robe	Costume
Prix (en €)	3	4	10	7	12	30

Pour fêter les 20 ans de sa boutique, la grand-mère d'Anna souhaite faire une remise exceptionnelle de 20 % à ses clients sur l'ensemble des articles de son magasin. En utilisant la règle à calcul, aider Anna et sa grand-mère à déterminer les nouveaux prix des vêtements.

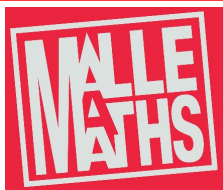
Vêtements	T-shirt	Short	Pantalon	Chemise	Robe	Costume
Prix (en €)	3	4	7	10	12	30
Prix (en €) après la remise						

Expliquez votre démarche :

Aide : Lorsque l'on effectue une remise de 20 %, cela signifie que l'on paiera seulement% du prix de l'article, cela revient donc à multiplier le prix de l'article par :

Conclusion : **Tout le monde** pourrait encore se servir de la règle à calculs **dans sa vie quotidienne** pour réaliser facilement des augmentations ou des remises de t% !

Et en mathématiques, qu'ai-je appris ?

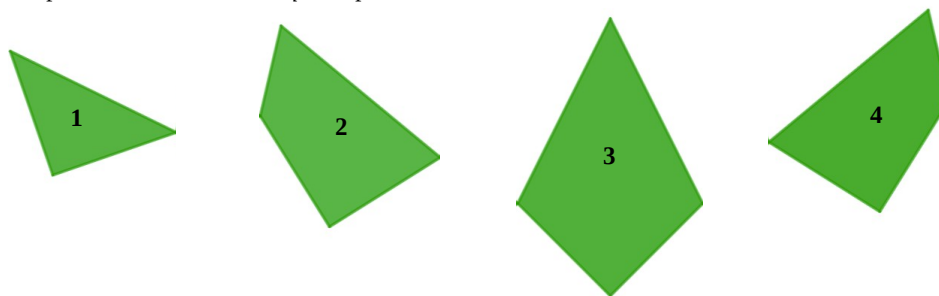


Activité
Un puzzle articulé
déclinée sur trois niveaux



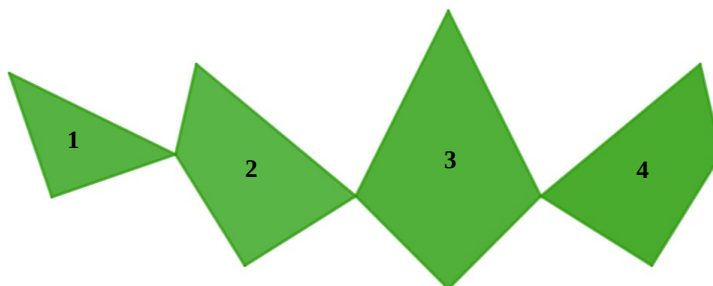
Matériel de la Malle à Maths utilisé : le puzzle en bois « Dudeney simplifié »

Le puzzle est constitué des quatre pièces suivantes :



- *La pièce 1 est un triangle à la fois rectangle et isocèle.*
- *Les pièces 2 et 4 sont des quadrilatères identiques mais, pour réaliser le puzzle, la pièce 4 devra être retournée par rapport à la pièce 2.*
- *La pièce 3 est un quadrilatère possédant la forme d'un cerf-volant.*

Les quatre pièces peuvent former un puzzle triangulaire (isocèle mais non équilatéral contrairement au véritable puzzle de Dudeney) et peuvent également former un puzzle quadrilatéral. Il est même possible d'articuler le puzzle (en imaginant des charnières) pour passer du puzzle triangulaire au puzzle quadrilatéral uniquement par des rotations des pièces, comme pour le puzzle de Dudeney :



Un fichier GeoGebra est disponible en ligne pour visualiser l'articulation des quatre pièces du puzzle et dévoile la construction des puzzles avec les quatre pièces :

<https://www.geogebra.org/m/yzheac2d>

L'activité proposée ici consiste, une fois faite la manipulation du puzzle, à répondre au problème suivant :

Quelle hauteur du puzzle triangulaire faut-il choisir pour faire en sorte que le puzzle quadrilatéral soit carré ?

La résolution du problème est proposée de trois façons différentes dans les pages suivantes.

Résolution du problème en quatrième

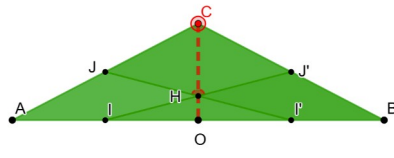
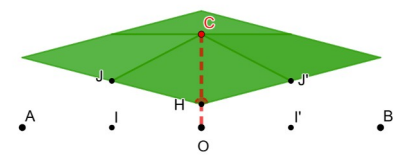
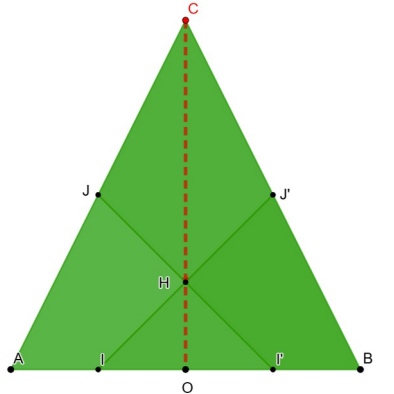
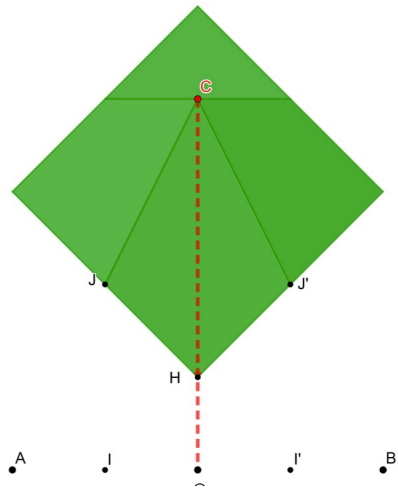
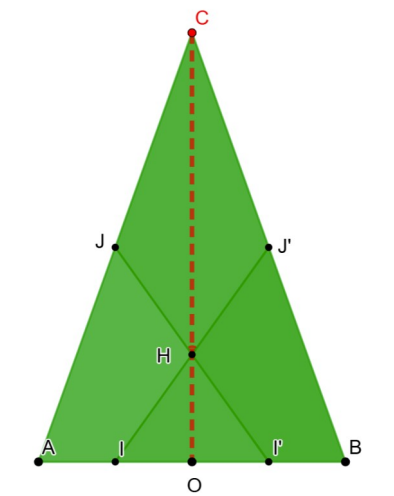
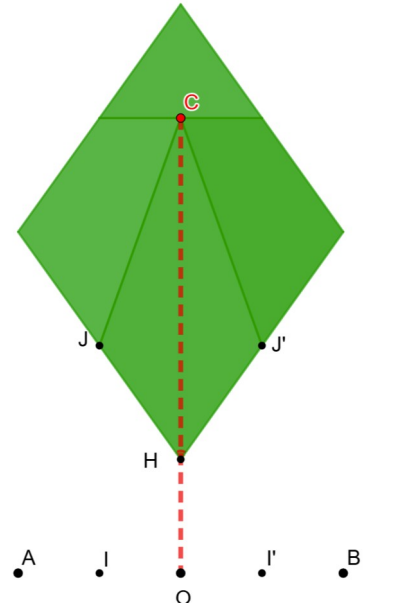
1ère étape : l'expérimentation

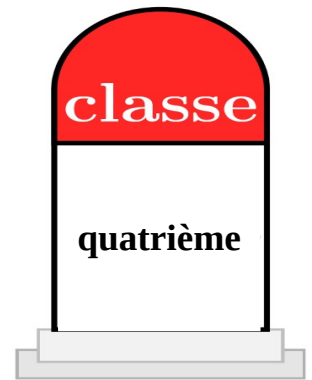
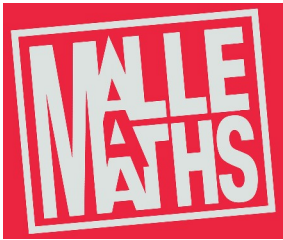
Sur le fichier GeoGebra fourni, on peut expérimenter plusieurs formes possibles pour le puzzle articulé étudié et essayer de régler la bonne hauteur OC du triangle afin d'obtenir un puzzle carré après articulation.

<https://www.geogebra.org/m/yzheac2d>



Concrètement, en déplaçant le point C sur le fichier en ligne, on peut choisir la hauteur du triangle OC du triangle ABC , puis en déplaçant le curseur on va pouvoir observer la forme du puzzle quadrilatéral obtenu. On obtient :

Hauteur OC choisie	Puzzle triangulaire	Puzzle quadrilatéral
Inférieure à la base AB		
Égale à la base AB		
Supérieure à la base AB		



L'expérimentation permet de conjecturer que :

- le puzzle quadrilatéral semble toujours être un losange, et ceci pour n'importe quelle hauteur OC choisie.
- Le quadrilatère $II'JJ'$ semble toujours être un rectangle.
- Une des diagonales du puzzle quadrilatéral semble toujours égale à la base AB, et l'autre diagonale semble égale à la hauteur OC.
- Le puzzle quadrilatéral semble être un carré lorsque la hauteur OC est égale à la base AB.

2ème étape : la démonstration

Pré-requis pour la démonstration :

Connaître les propriétés caractéristiques des quadrilatères particuliers par leurs diagonales.

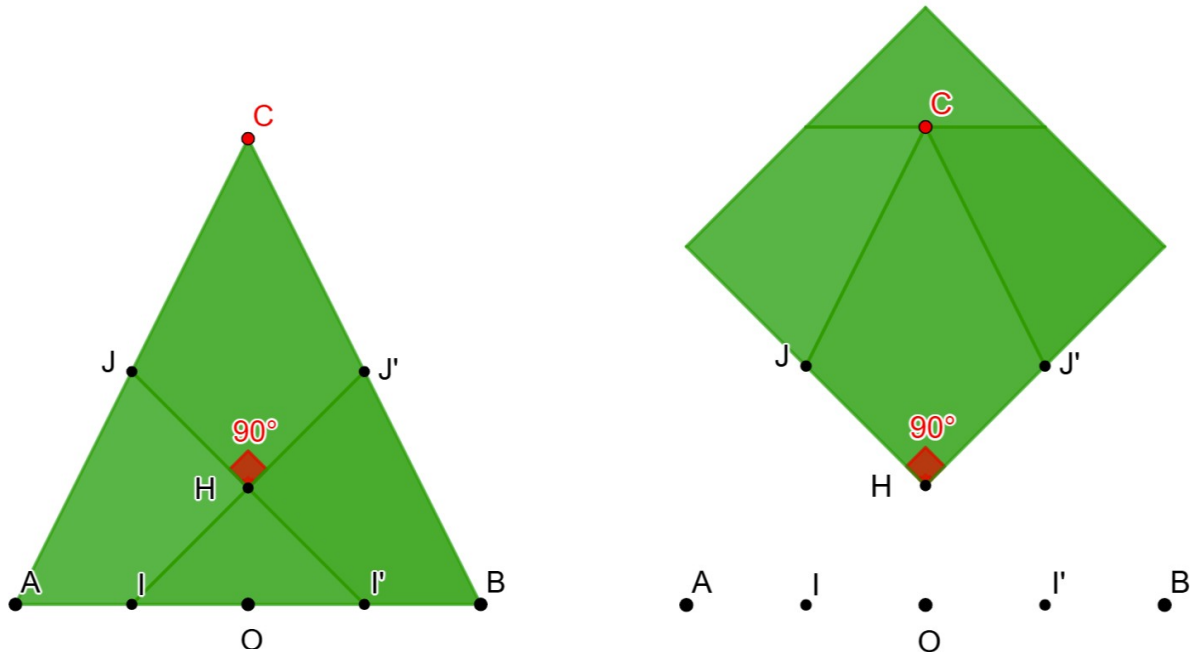
Connaître les théorèmes des milieux.

Les points I, I', J et J' sont les milieux respectivement des segments [OA], [OB], [AC] et [BC]. Le point H désigne l'intersection des droites (II') et (JJ'). A partir de la forme des pièces, on sait notamment que $IH = JH$.

- La droite (OC) est un axe de symétrie du puzzle quadrilatéral donc celui-ci possède des côtés deux à deux égaux. Si maintenant on étudie les deux côtés consécutifs du puzzle situé à gauche de l'axe de symétrie (OC), le premier côté est égal au double de JH et le second côté est égal au double de IH. Or $IH = JH$ donc les côtés sont tous égaux.
- On sait que $IH = JH = I'H = J'H$ donc les diagonales du quadrilatère $II'JJ'$ sont de même longueur et se coupent en leur milieu H. Le quadrilatère $II'JJ'$ est par conséquent un rectangle.
- La distance AB est égale à deux fois la distance II' . La diagonale horizontale du losange obtenu en articulant le puzzle triangulaire est quant à elle égale, d'après un théorème des milieux, à deux fois la distance JJ' (ou II' , $II' = JJ'$ puisque $II'JJ'$ est un rectangle). Par conséquent, la diagonale horizontale du puzzle quadrilatéral est égale à AB. L'autre diagonale du puzzle quadrilatéral s'obtient en ajoutant à la longueur HC la hauteur de la pièce triangulaire du puzzle, or cette dernière est égale à OH, donc finalement la diagonale verticale du puzzle quadrilatéral est égale à la longueur $OC = OH + HC$ qui correspond à la hauteur du puzzle triangulaire.
- Un losange est un carré lorsque ces deux diagonales sont de même longueur. Or, on sait désormais que puzzle quadrilatéral est un losange et que ces diagonales sont égales à AB (pour la diagonale horizontale) et OC (pour la diagonale verticale). On en déduit que le puzzle articulé sera un carré lorsque $OC = AB$.

Pré-requis :

- Connaître les formules de trigonométrie dans un triangle rectangle
- Connaître les théorèmes des milieux.



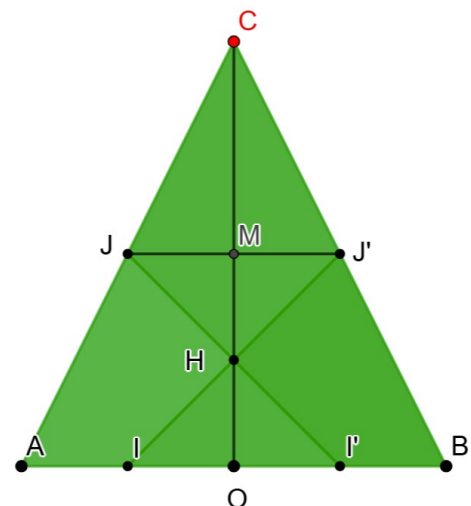
On cherche à montrer que pour obtenir un puzzle quadrilatéral formant un carré, il convient de choisir la hauteur OC du puzzle triangulaire égale à sa base AB :

On demande à ce que la pièce triangulaire (déjà isocèle) I'HI du puzzle soit rectangle en H pour que le puzzle articulé puisse former un carré. Par symétrie axiale par rapport à la droite (OH), cela revient à demander que $\widehat{IHO} = 45^\circ$. Or, dans le triangle IHO rectangle en O, on a $\tan(\widehat{IHO}) = \frac{OH}{IO}$

$$\text{d'où } \tan(45^\circ) = \frac{OH}{\frac{1}{4}AB}, \text{ soit } 1 = \frac{OH}{\frac{1}{4}AB} \text{ et ainsi } OH = \frac{1}{4}AB.$$

On note ensuite M le milieu de la hauteur [OC]. M est donc aussi le milieu du segment [JJ'] et $MH = OH = \frac{1}{4}AB$.

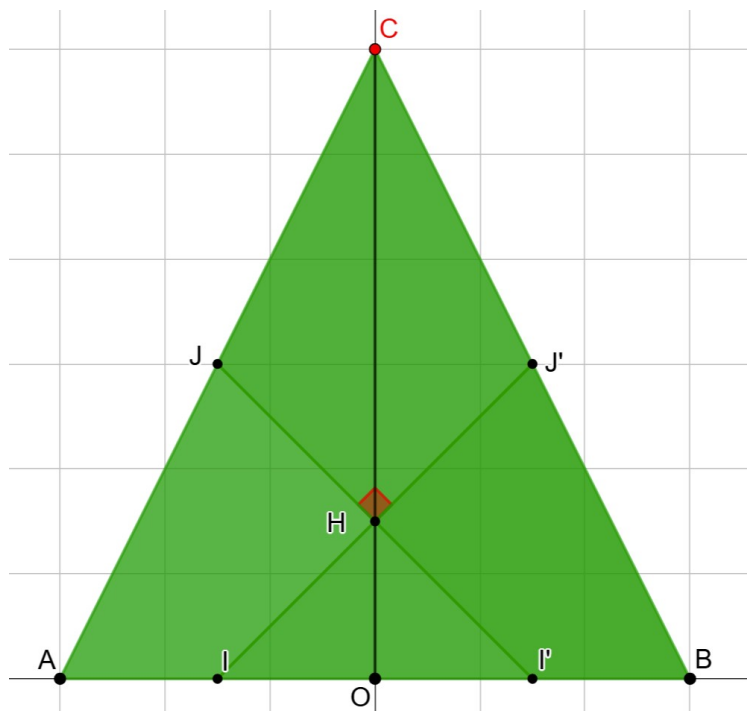
$$\text{Par conséquent, } OC = 2 \times OM = \frac{2 \times 2 \times 1}{4}AB = AB.$$



Pé-requis :

- Connaître le produit scalaire de deux vecteurs dans le plan et la caractérisation de l'orthogonalité des vecteurs par leur produit scalaire nul
- Connaître les coordonnées d'un milieu dans un repère du plan

On cherche à démontrer que le puzzle quadrilatéral est un carré si, et seulement si, la hauteur h du puzzle triangulaire est égale à la base b de ce même puzzle triangulaire. On se place dans un repère orthonormé d'origine O le milieu de $[AB]$ et on exprime h et b dans l'unité du repère:



Dans ce repère, $A\left(-\frac{b}{2}; 0\right)$, $B\left(\frac{b}{2}; 0\right)$ de sorte que $AB=b$, et $C(0; h)$ de sorte que $OC=h$.

Les milieux des segments $[OA]$ et $[OB]$ sont respectivement $I\left(-\frac{b}{4}; 0\right)$ et $I'\left(\frac{b}{4}; 0\right)$.

Les milieux des segments $[AC]$ et $[BC]$ sont respectivement $J\left(-\frac{b}{4}; \frac{h}{2}\right)$ et $J'\left(\frac{b}{4}; \frac{h}{2}\right)$.

Le milieu du segment $[IJ']$ est donc $H\left(0; \frac{h}{4}\right)$. Ainsi, $\vec{HI} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{4} \\ -\frac{h}{4} \end{pmatrix}$ et $\vec{HI'} = \begin{pmatrix} \frac{b}{4} \\ -\frac{h}{4} \end{pmatrix}$ et ces deux vecteurs

sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{HI} \cdot \vec{HI'} = 0$, ce qui s'écrit avec les coordonnées :

$$\left(-\frac{b}{4}\right) \times \frac{b}{4} + \left(-\frac{h}{4}\right) \times \left(-\frac{h}{4}\right) = 0 \text{ d'où } \frac{-b^2}{4} + \frac{h^2}{4} = 0 \text{ et ainsi } h^2 = b^2. \text{ Mais comme } b \text{ et } h \text{ sont des}$$

nombre positifs, on en déduit que $\vec{HI} \cdot \vec{HI'} = 0$ si, et seulement si, $h=b$.

3ème-2nd

e Tale

Problème de Steiner Mathématiques savonneuses



Matériel

- **Module surfaces minimales** : biplaques, bassine, eau, liquide vaisselle.

Compétence visée

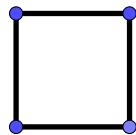
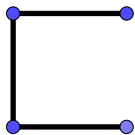
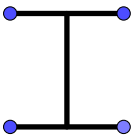
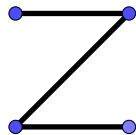
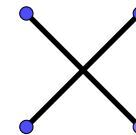
- Chercher, modéliser, calculer, conjecturer,
- Fonctions, géométrie (Pythagore, trigonométrie)
- En Terminale : dérivées de composées, dérivées des fonctions trigonométriques

Déroulement

- **Durée** : expérimentation 30 minutes + prévoir du temps supplémentaire pour poursuivre la recherche.
- En savoir plus : voir la fiche professeur

- Distribution de la fiche élève (1 fiche par élève).
- Laisser 5 minutes de réflexion individuelle.
- Restitution des pistes explorées par les élèves (5-10 minutes).

Quelques exemples souvent proposés (en général personne ne propose la solution optimale) :

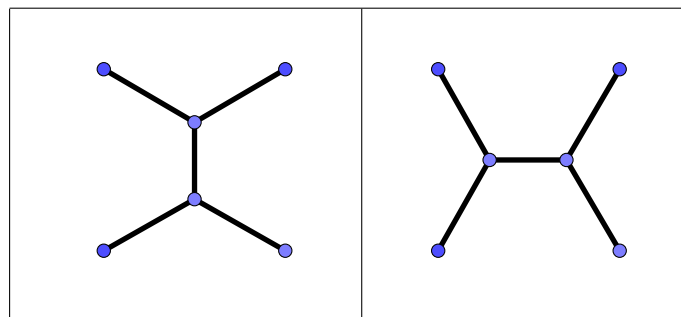
				
Longueur 32 km	Longueur 24 km	Longueur 24 km	Longueur $16 + 8\sqrt{2} \approx 27,31$ km	Longueur $16\sqrt{2} \approx 22,63$ km

- **Présentation de l'expérience à l'aide des films de savon**

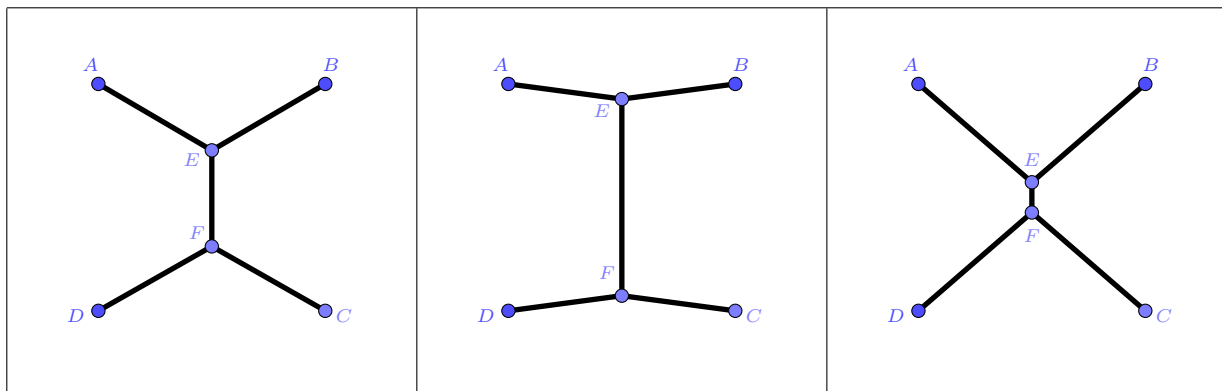
Le professeur commence par présenter le matériel constitué des bi-plaques de plexiglas avec les 4 plots et de la bassine d'eau savonneuse.

Avant de faire l'expérience, le professeur explique qu'une propriété des films de savon est que les films prennent une forme telle que leur aire soit minimale. Le professeur interroge les élèves sur la forme que va prendre le film lorsqu'on va plonger les bi-plaques dans l'eau savonneuse.

Le professeur fait la manipulation. On peut la faire plusieurs fois afin de constater que la forme prise par le film de savon est toujours la même. On obtient une des deux figures ci-dessous (identiques à une rotation près) :



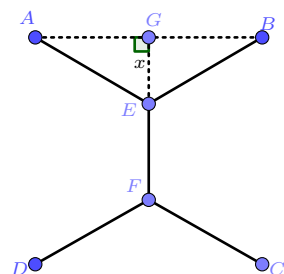
- **Le professeur relance l'activité :** En admettant que la forme du film de savon est symétrique, le professeur demande de calculer la longueur du chemin le plus court obtenu lorsqu'on trace un chemin symétrique en utilisant 2 points supplémentaires E et F tels que $AE = EB = DF = FC$ comme sur les figures ci-après.



- **En troisième ou seconde**

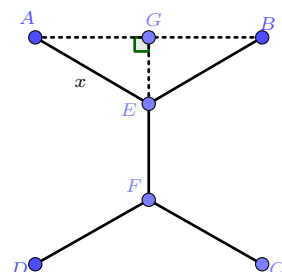
On exprime la longueur $L = AE + EB + EF + DF + FC = 4AE + EF$ (grâce aux symétries de la figure) en fonction d'une variable. Plusieurs choix de variable sont possibles, par exemple :

- **En prenant** $x = EG$, avec $x \in [0; 4]$.



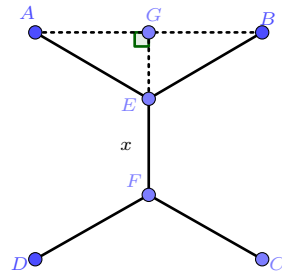
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AEG rectangle en G , avec $AG = 4$, on obtient :
 $AE = \sqrt{16 + x^2}$.
 On a $EF = 8 - 2x$.
 D'où $L(x) = 4\sqrt{16 + x^2} + 8 - 2x$

- En prenant $x = AE$, avec $x \in [4; 4\sqrt{2}]$.



En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AEG rectangle en G , on obtient $GE = \sqrt{x^2 - 16}$.
 On a $EF = 8 - 2\sqrt{x^2 - 16}$.
 D'où $L(x) = 4x + 8 - 2\sqrt{x^2 - 16}$.

- En prenant $x = EF$, avec $x \in [0; 8]$



On a $GR = \frac{8-x}{2} = 4 - \frac{x}{2}$.

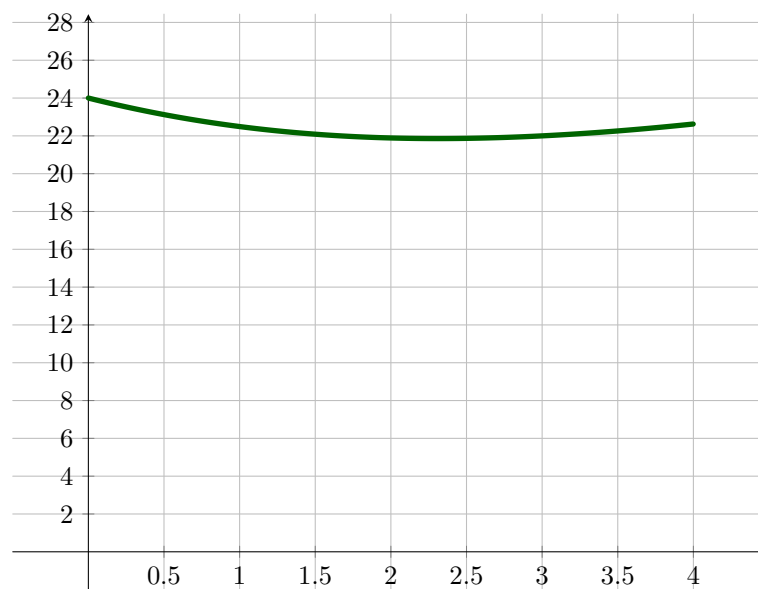
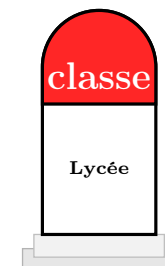
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AEF rectangle en G , on obtient : $AE = \sqrt{16 + \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2}$.

D'où $L(x) = x + 4\sqrt{16 + \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2}$.

On poursuit la recherche en réalisant un tableau de valeurs et en traçant la représentation graphique de la fonction L .
Par exemple avec $L(x) = 4\sqrt{16 + x^2} + 8 - 2x$, $x \in [0; 4]$ on obtient :

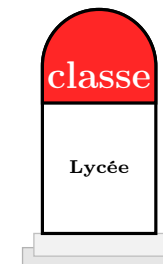


Fiche professeur





Fiche professeur



x	$L(x)$	x	$L(x)$
0	24	2, 3	21, 8564352
0, 5	23, 1245155	2, 31	21, 8564066
1	22, 4924225	2, 32	21, 8564429
1, 5	22, 0880075	2, 33	21, 856544
2	21, 8885438	2, 34	21, 8567095
2, 5	21, 86796230	2, 35	21, 8569394
3	22	2, 36	21, 8572334
3, 5	22, 2602916	2, 37	21, 8575912
4	22, 627417	2, 38	21, 8580128
		2, 39	21, 8584978
		2, 4	21, 8590431

D'où une valeur approchée de la longueur minimale d'environ 21, 8756 km lorsque GE vaut environ 2, 31km. On pourra faire remarquer qu'on obtient bien une longueur plus courte que celle obtenue avec les deux diagonales du carré qui mesurait $16\sqrt{2} \approx 22, 63$ km.

En terminale (spécialité maths ou maths complémentaires)

- En utilisant $L(x) = 4\sqrt{16 + x^2} + 8 - 2x$, avec $x \in [0; 4]$.

La fonction L est dérivable sur $[0; 4]$.

En utilisant les dérivées de fonctions composées on obtient :

$$L'(x) = 4 \frac{2x}{2\sqrt{16 + x^2}} - 2 = \frac{4x - 2\sqrt{16 + x^2}}{\sqrt{16 + x^2}}, \text{ pour tout } x \in [0; 4].$$

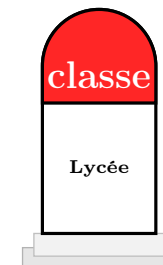
On en déduit que $L'(x)$ s'annule en $\frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2, 31$, que $L'(x)$ est négatif sur $\left[0; \frac{4}{\sqrt{3}}\right]$ et positif sur $\left[\frac{4}{\sqrt{3}}; 4\right]$.

Par conséquent le minimum de L est égal à $L\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{24}{\sqrt{3}} + 8 \approx 21, 856$ km.

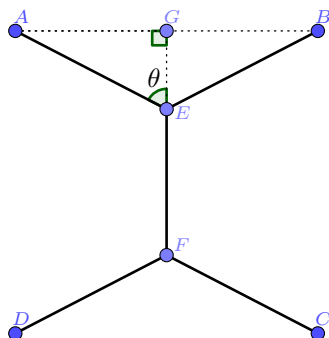
Il sera intéressant de faire calculer les mesures des angles dans le triangle AGE afin de mettre en évidence que $\widehat{AEG}$ mesure 60° et que par conséquent les trois angles $\widehat{AEB}$, $\widehat{AEF}$ et $\widehat{FEB}$ sont égaux à 120° .



Fiche professeur



- Il est également possible d'utiliser un angle comme variable, ce qui fait apparaître des fonctions trigonométriques dans la formule de la longueur L à la place des racines carrées. À nouveau, plusieurs choix de variable sont possibles :
— **En prenant** $\theta = \widehat{AEG}$, avec $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

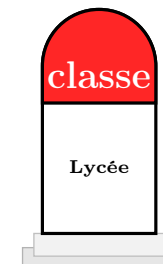


En utilisant les formules de trigonométrie dans le triangle AGE rectangle en G , avec $AG = 4$, on obtient :

$$GE = \frac{4}{\tan \theta} \quad \text{et} \quad AE = \frac{4}{\sin \theta}$$



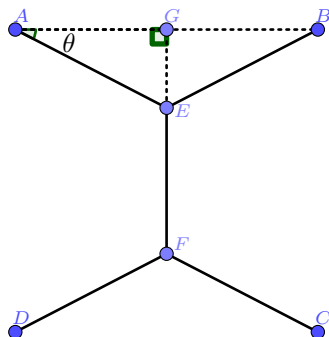
Fiche professeur



D'où l'expression de la longueur :

$$L(\theta) = 8 - \frac{8}{\tan \theta} + \frac{16}{\sin \theta}$$

— **Option B : En prenant $\theta = \widehat{EAG}$, avec $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.**



En utilisant les formules de trigonométrie dans le triangle AGE rectangle en G , avec $AG = 4$, on obtient :

$$GE = 4 \tan \theta \quad \text{et} \quad AE = \frac{4}{\cos \theta}$$

D'où l'expression de la longueur :

$$L(\theta) = 8 - 8 \tan \theta + \frac{16}{\cos \theta}$$

Étude de la fonction L

En utilisant l'expression :

$$L(\theta) = 8 - 8 \tan \theta + \frac{16}{\cos \theta}, \quad \theta \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

La fonction L est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Pour tout $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, on a :

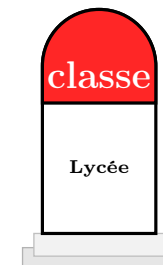
$$L'(\theta) = -\frac{-8 \cos^2 \theta - (-8 \sin \theta + 16)(-\sin \theta)}{\cos^2 \theta} = \frac{8(2 \sin \theta - 1)}{\cos^2 \theta}$$

La dérivée L' s'annule en $\theta = \frac{\pi}{6}$, est négative sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ et positive sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$.

On en déduit que L admet un minimum égal à $L\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8 - 8 \tan \frac{\pi}{6} + \frac{16}{\cos \frac{\pi}{6}} = 8 + \frac{24}{\sqrt{3}}$.



Fiche professeur



On retrouve bien les mêmes résultats qu'avec les formules utilisant les racines carrées mais on voit de façon plus évidente que la longueur minimale est obtenue lorsque l'angle $\widehat{AEB}$ mesure $\frac{\pi}{3}$ radians autrement dit 120° . Les points E et F réalisant ce minimum sont appelés points de Steiner, ou point de Fermat ou encore point de Torricelli.

ÉTAPE 1 : Existence du point de Steiner dans un triangle.

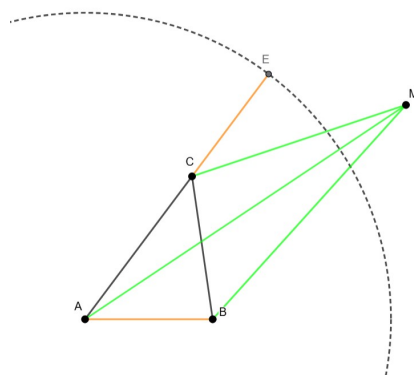
Soient A , B et C trois points deux à deux distincts et non alignés.

Soit $f : M \mapsto MA + MB + MC$.

Soit D le disque fermé de centre A et de rayon $AB + AC = AE$.

Si $M \notin D$, alors

$$f(M) = MA + MB + MC \geq AB + AC + MB \geq AB + AC = f(A).$$

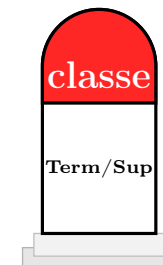


f est continue et positive, donc

$$\inf_{M \in \mathbb{R}^2} f(M) = \inf \left(\inf_{M \in D} f(M), \inf_{M \notin D} f(M) \right) \geq \min \left(\inf_{M \in D} f(M), f(A) \right) = \min_{M \in D} f(M) = f(P) \quad \text{où } P \in D.$$



Fiche professeur



ÉTAPE 2 : Propriété de P.

Si $P \neq A$ et $P \neq B$ et $P \neq C$, alors f est différentiable en P et sa différentielle est nulle, car il réalise le minimum de f .
Donc, pour tout $M \in \mathbb{R}^2$:

$$df_P(M) = 0 = \frac{\overrightarrow{AP}}{AP} \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{\overrightarrow{BP}}{BP} \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{\overrightarrow{CP}}{CP} \cdot \overrightarrow{OM} = \left(\frac{\overrightarrow{AP}}{AP} + \frac{\overrightarrow{BP}}{BP} + \frac{\overrightarrow{CP}}{CP} \right) \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Ainsi on a :

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{PA} + \frac{\overrightarrow{PB}}{PB} + \frac{\overrightarrow{PC}}{PC} = \vec{0}.$$

De plus :

$$\left\| \frac{\overrightarrow{PA}}{PA} \right\| = \left\| \frac{\overrightarrow{PB}}{PB} \right\| = \left\| \frac{\overrightarrow{PC}}{PC} \right\| = 1.$$

Donc :

$$\left\langle \frac{\overrightarrow{AP}}{AP}, \frac{\overrightarrow{BP}}{BP} \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{\overrightarrow{AP}}{AP} + \frac{\overrightarrow{BP}}{BP} \right\|^2 - \left\| \frac{\overrightarrow{AP}}{AP} \right\|^2 - \left\| \frac{\overrightarrow{BP}}{BP} \right\|^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\left\| -\frac{\overrightarrow{CP}}{CP} \right\|^2 - \left\| \frac{\overrightarrow{AP}}{AP} \right\|^2 - \left\| \frac{\overrightarrow{BP}}{BP} \right\|^2 \right) = -\frac{1}{2}$$

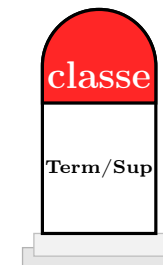
par conséquent :

$$\left\langle \frac{\overrightarrow{AP}}{AP}, \frac{\overrightarrow{BP}}{BP} \right\rangle = (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}) = (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } 120^\circ$$

De la même manière on montre que $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}) = \frac{2\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}) = \frac{2\pi}{3}$ ou : 120°



Fiche professeur

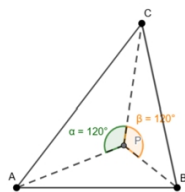


Si $P \neq A$, alors $\hat{A} < \frac{2\pi}{3}$

Si $P \neq A$ et $P \neq B$ et $P \neq C$, alors $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = (\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PB}) = (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}) = \frac{2\pi}{3}$

On a :

$$\widehat{PAC} + \widehat{ACP} + \widehat{PCB} + \widehat{CBP} + \widehat{PBA} + \widehat{BAP} = 180^\circ.$$



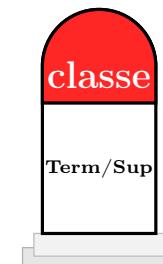
Supposons $\widehat{BAC} \geq 120^\circ$, c'est-à-dire $\widehat{PAC} + \widehat{BAP} \geq 120^\circ$, alors :

$$\widehat{ACP} + \widehat{PCB} + \widehat{CBP} + \widehat{PBA} = 180^\circ - (\widehat{PAC} + \widehat{BPA}) \leq 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Dans le triangle PBC : $\widehat{CBP} + \widehat{PCB} + 120^\circ = 180^\circ$, soit $\widehat{CBP} + \widehat{PCB} = 60^\circ$.



Fiche professeur



Et donc $\widehat{ACP} + 60^\circ + \widehat{PBA} \leq 60^\circ$, soit $\widehat{ACP} + \widehat{PBA} \leq 0$, et donc $\widehat{ACP} + \widehat{PBA} = 0$ ce qui implique $\widehat{ACP} = \widehat{PBA} = 0$, ce qui n'est pas possible, **donc** $\widehat{BAC} < 120^\circ$.

Si $P = A$, alors $\widehat{A} \geq \frac{2\pi}{3}$.

On a pour tout $M \in \mathbb{R}^2$, $f(M) \geq f(A)$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire et P_ε un point tel que : $\overrightarrow{AP_\varepsilon} = \varepsilon \vec{u}$.

On a $f(P_\varepsilon) = P_\varepsilon A + P_\varepsilon B + P_\varepsilon C \geq f(A) = AB + AC$.

Calculons $P_\varepsilon B - AB$ et $P_\varepsilon C - AC$:

$$\begin{aligned} P_\varepsilon B - AB &= \|\overrightarrow{P_\varepsilon B}\| - AB = \|\overrightarrow{P_\varepsilon A} + \overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB} - \varepsilon \vec{u}\| - AB \\ &= \sqrt{\langle -\varepsilon \vec{u} + \overrightarrow{AB}, -\varepsilon \vec{u} + \overrightarrow{AB} \rangle} - AB \\ &= \left[\langle -\varepsilon \vec{u}, -\varepsilon \vec{u} \rangle - 2 \langle \varepsilon \vec{u}, \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle \right]^{\frac{1}{2}} - AB \\ &= (AB^2 - 2\varepsilon \langle \vec{u}, \overrightarrow{AB} \rangle + \|\varepsilon \vec{u}\|^2)^{\frac{1}{2}} - AB \\ &= AB \left[\left(1 - 2\varepsilon \langle \vec{u}, \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \rangle + \frac{\varepsilon^2}{AB^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \end{aligned}$$

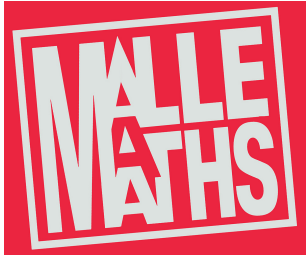
Puisque $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0$, en posant $x = -2\varepsilon \langle \vec{u}, \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \rangle + \frac{\varepsilon^2}{AB^2} = \varepsilon \left(-2\vec{u} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\varepsilon}{AB^2} \right)$

Donc

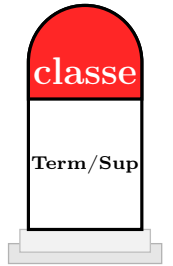
$$P_\varepsilon B - AB = AB \left[1 - \varepsilon \langle \vec{u}, \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \rangle + \frac{\varepsilon^2}{2AB^2} + o(x) - 1 \right]$$

On peut remplacer $o(x)$ par $o(\varepsilon)$, donc :

$$P_\varepsilon B - AB = AB \left[-\varepsilon \langle \vec{u}, \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \rangle + \frac{\varepsilon^2}{2AB^2} + o(\varepsilon) \right] = AB \left[-\varepsilon \langle \vec{u}, \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \rangle + o(\varepsilon) \right]$$



Fiche professeur



Enfin,

$$P_\varepsilon B - AB = -\varepsilon < \vec{u}, \frac{\vec{AB}}{AB} > + o_1(\varepsilon)$$

De même,

$$P_\varepsilon C - AC = -\varepsilon < \vec{u}, \frac{\vec{AC}}{AC} > + o_2(\varepsilon)$$

Comme $P_\varepsilon A = \varepsilon$ et $P_\varepsilon A + P_\varepsilon B + P_\varepsilon C \geq PA + PB + PC$ puisque P réalise le minimum, et comme $P = A$ on :

$$P_\varepsilon A = \varepsilon \text{ et } P_\varepsilon A + P_\varepsilon B + P_\varepsilon C \geq AB + AC$$

On a : $-\varepsilon < \vec{u}, \frac{\vec{AB}}{AB} > + o_1(\varepsilon) - \varepsilon < \vec{u}, \frac{\vec{AC}}{AC} > + o_2(\varepsilon) \geq 0$, soit $\varepsilon \left[1 - \left(< \vec{u}, \frac{\vec{AB}}{AB} > + < \vec{u}, \frac{\vec{AC}}{AC} > + \frac{o_3(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \right] \geq 0$.

Et donc $< \vec{u}, \frac{\vec{AB}}{AB} > + < \vec{u}, \frac{\vec{AC}}{AC} > + \frac{o_3(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq 1$ pour tout $\varepsilon > 0$ et comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o_3(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$, on a :

$$< \vec{u}, \frac{\vec{AB}}{AB} > + < \vec{u}, \frac{\vec{AC}}{AC} > \leq 1$$

Prenons $\vec{u} = \frac{\frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC}}{\left\| \frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} \right\|}$, alors :

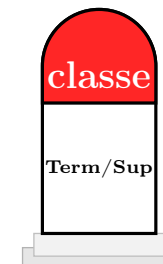
$$< \vec{u}, \frac{\vec{AB}}{AB} > + < \vec{u}, \frac{\vec{AC}}{AC} > = < \vec{u}, \left(\frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} \right) > = \left\| \frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} \right\|$$

Donc,

$$\left\| \frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} \right\| \leq 1$$



Fiche professeur



Alors :

$$\left\langle \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}, \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right\|^2 - \left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \right\|^2 - \left\| \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right\|^2 \right) \leq \frac{1}{2}(1 - 1 - 1) = -\frac{1}{2}$$

Donc

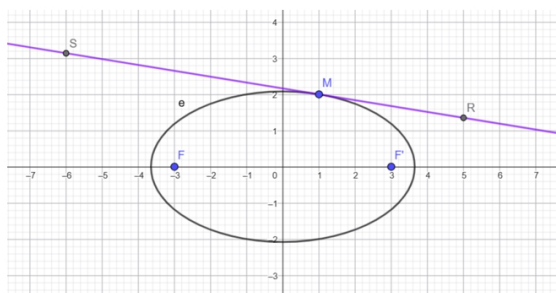
$$\widehat{BAC} \geq 120^\circ$$

Ce qui signifie aussi : Si $\hat{A} < \frac{2\pi}{3}$ alors $P \neq A$. Donc

$$P \neq A \iff \hat{A} < \frac{2\pi}{3} \text{ ou encore } P = A \iff \hat{A} \geq \frac{2\pi}{3}$$

REMARQUE : preuve utilisant l'ellipse.

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse de foyers F et F' et M un point de $\mathcal{E}$. On note (T) la tangente à $\mathcal{E}$ au point M . Soient R et S deux points de (T) de part et d'autre de M .



Montrons que $\widehat{FMR} = \widehat{F'MS}$:

Soit B un point extérieur à $\mathcal{E}$ tel que les points F , M et B soient alignés et $F'M = MB$.

Soit (Δ) la bissectrice de l'angle $\widehat{F'MB}$.

Montrons que (Δ) est la tangente à $\mathcal{E}$ au point M , c'est-à-dire la droite (T) .

Soit $P \in (\Delta)$, $P \neq M$. Montrons que $P \notin \mathcal{E}$ (ou : cette droite n'a pas d'autre point d'intersection avec l'ellipse que M).

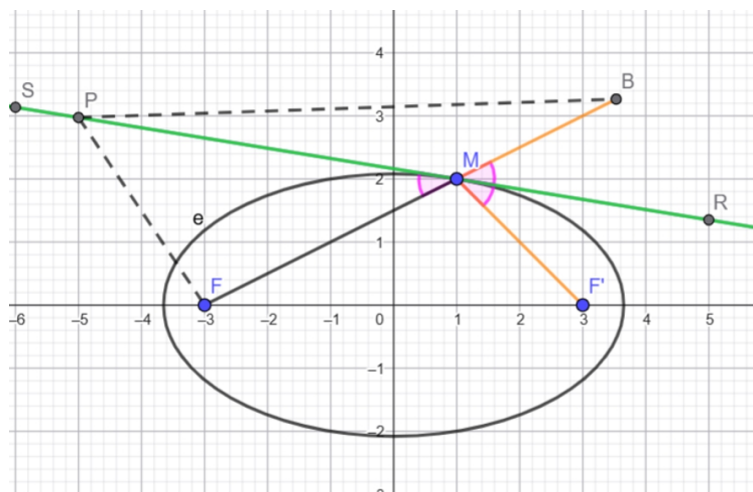
$F'M = MB$, donc le triangle BMF' est isocèle en M . Donc la bissectrice de l'angle $\widehat{F'MB}$ est aussi la médiatrice du segment $[BF']$. Comme P est sur cette droite on a $PF' = PB$.

$$PF + PF' = PF + PB > MF + MB = MF + MF',$$

donc $PF + PF' > MF + MF'$, donc $P \notin \mathcal{E}$.

Donc la droite (Δ) n'a pas d'autre point d'intersection avec l'ellipse que M . Donc $(\Delta) = (T)$.

Donc $\widehat{FMR} = \widehat{F'MS}$.



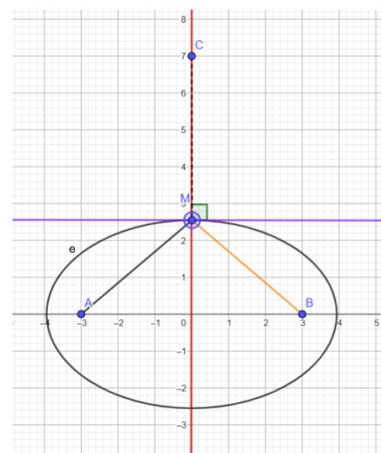
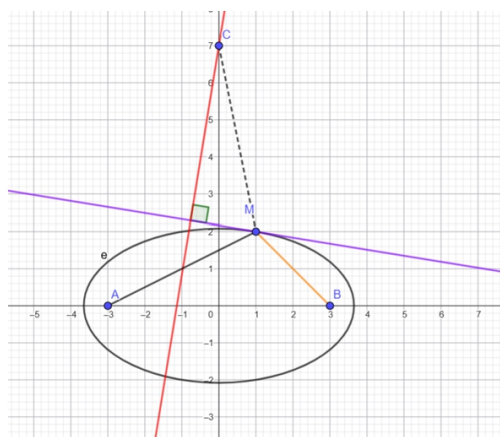
Supposons maintenant que le point de Steiner M existe et est intérieur au triangle : $MA + MB > 0$.

L'ensemble des points P tels que $PA + PB = MA + MB$ est l'ellipse de foyers A et B .

Le point C est fixé. $MA + MB + MC$ est minimum et M est sur l'ellipse.

$MA + MB$ étant fixe, il faut minimiser MC .

Sur cette ellipse, le point M cherché est le point qui minimise la distance entre C et M' avec M' sur l'ellipse.



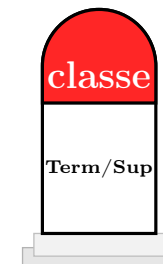
La tangente (T) en M est perpendiculaire à (MC) , donc $\widehat{BMC} = \widehat{AMC'}$.

Par un argument analogue on montre que $\widehat{AMC} = \widehat{AMB}$. Donc :

$$\widehat{AMC} = \widehat{AMB} = \widehat{BMC} = 120^\circ.$$



Fiche professeur



ÉTAPE 3 : Unicité de P.

Soit M un point du plan muni d'un repère orthonormé, et soit la fonction f définie sur le plan à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(M) = MA + MB + MC.$$

Pour tout $N \in \{A, B, C\}$, $N = (\alpha, \beta)$, on introduit la fonction $g_N : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} \end{cases}$
Si P est un point de coordonnées (x, y) , alors $g_N(x, y) = g_N(P) = PM$.

Montrons que φ_X est convexe.

Première étape :

Soient (x_1, x_2) et (y_1, y_2) dans $\mathbb{R}^2$, posons $a = \frac{x_k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$ et $b = \frac{y_k}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$ pour $k = 1$ ou $k = 2$.

On a : $(a - b)^2 \geq 0 \implies a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \implies a^2 + b^2 \geq 2ab$

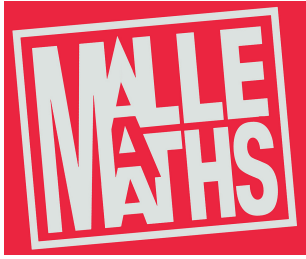
Donc :

$$2 \frac{x_k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \frac{y_k}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq \left(\frac{x_k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)^2 + \left(\frac{y_k}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right)^2$$

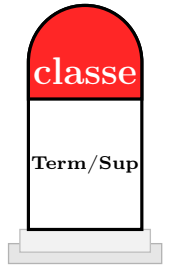
Soit,

$$\frac{x_k y_k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x_k^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{y_k^2}{y_1^2 + y_2^2} \right)$$

En sommant sur $k = 1, 2$, on obtient :



Fiche professeur



$$\begin{aligned}\frac{x_1 y_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}} + \frac{x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{y_1^2}{y_1^2 + y_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{y_2^2}{y_1^2 + y_2^2} \right) \\ &\leq \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{y_1^2 + y_2^2}{y_1^2 + y_2^2} \right) \leq \frac{1}{2} (1 + 1) = 1\end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq 1$$

Et enfin :

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

Remarque : cette inégalité reste vraie si $(x_1, x_2) = (0, 0)$ ou $(y_1, y_2) = (0, 0)$.

Deuxième étape :

Soit $t \in [0; 1]$, $(x; y)$ et $(x'; y') \in \mathbb{R}^2$:

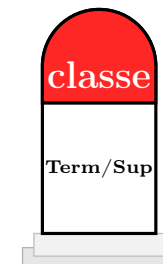
$$\begin{aligned}(g_N)2[t(x; y) + (1 - t)(x'; y')] &= (g_N)^2[tx + (1 - t)x', ty + (1 - t)y'] = [tx + (1 - t)x' - \alpha]^2 + [ty + (1 - t)y' - \beta]^2 \\ &= [tx + (1 - t)x' - (t + 1 - t)\alpha]^2 + [ty + (1 - t)y' - (t + 1 - t)\beta]^2 \\ &= [t(x - \alpha) + (1 - t)(x' - \alpha)]^2 + [t(y - \beta) + (1 - t)(y' - \beta)]^2 \\ &= t^2(x - \alpha)^2 + t^2(y - \beta)^2 + (1 - t)^2(x' - \alpha)^2 + (1 - t)^2(y' - \beta)^2 + 2t(1 - t)[(x - \alpha)(x' - \alpha) + (y - \beta)(y' - \beta)] \\ &\leq t^2(x - \alpha)^2 + t^2(y - \beta)^2 + (1 - t)^2(x' - \alpha)^2 + (1 - t)^2(y' - \beta)^2 + 2t(1 - t)\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}\sqrt{(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2} \\ &\leq t^2(g_N)^2(x, y) + (1 - t)^2(g_N)^2(x', y') + 2t(1 - t)g_N(x, y)g_N(x', y') = [tg_N(x, y) + (1 - t)g_N(x', y')]^2\end{aligned}$$

Donc,

$$g_N((t(x, y) + (1 - t)(x', y'))) \leq tg_N(x, y) + (1 - t)g_N(x', y') \text{ donc } g_N \text{ est convexe}$$



Fiche professeur



Troisième étape :

Pour $N = A$ on obtient : $g_A(t(x; y) + (1 - t)(x'; y')) \leq t g_A(x, y) + (1 - t) g_A(x', y')$.

Si on note P et Q les deux points de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') , et $R_t = t(x, y) + (1 - t)(x', y')$ un point du segment $[PQ]$, l'inégalité précédente donne : $R_t A \leq t PA + (1 - t) QA$.

De même on a, en prenant $N = B$ puis $N = C$: $R_t B \leq t PB + (1 - t) QB$ et $R_t C \leq t PC + (1 - t) QC$.

En ajoutant membre à membre :

$$f(R_t) = R_t A + R_t B + R_t C \leq t(PA + PB + PC) + (1 - t)(QA + QB + QC) = t f(P) + (1 - t) f(Q),$$

donc f est convexe.

Quatrième étape :

Supposons que P et Q soient deux points qui minimisent f , alors $f(P) = f(Q) = m = \min_{M \in \text{plan}} f(M)$.

Ainsi : pour tout $t \in [0, 1]$, $f(R_t) \leq t f(P) + (1 - t) f(Q) = t m + (1 - t) m = m$ donc $f(R_t) = m$. Et par conséquent tout point du segment $[PQ]$ minimise f .

Supposons $P \neq Q$, alors pour $t = \frac{1}{2}$ le point $R_t = R_{\frac{1}{2}}$ est le milieu de $[PQ]$.

Alors, $R_{\frac{1}{2}}$ minimise f et on a $f(R_{\frac{1}{2}}) = m$.

Ainsi, si on suppose de plus : $R_{\frac{1}{2}} A < \frac{1}{2} PA + \frac{1}{2} QA$ ou $R_{\frac{1}{2}} B < \frac{1}{2} PB + \frac{1}{2} QB$ et $R_{\frac{1}{2}} C < \frac{1}{2} PC + \frac{1}{2} QC$, c'est à dire : si une au moins de ces inégalités est stricte).

On aurait en ajoutant membre à membre :

$$R_{\frac{1}{2}} A + R_{\frac{1}{2}} B + R_{\frac{1}{2}} C < \frac{1}{2} PA + \frac{1}{2} PB + \frac{1}{2} PC + \frac{1}{2} QA + \frac{1}{2} QB + \frac{1}{2} QC$$

Soit,

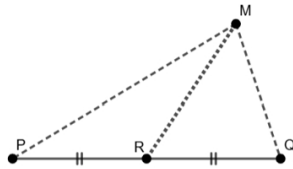
$$f(R_{\frac{1}{2}}) < \frac{1}{2} PA + \frac{1}{2} PB + \frac{1}{2} PC + \frac{1}{2} QA + \frac{1}{2} QB + \frac{1}{2} QC = \frac{1}{2} f(P) + \frac{1}{2} f(Q) = \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} m = m$$

Et donc $f(R_{\frac{1}{2}}) < m$.

Cela signifie donc que $R_{\frac{1}{2}} A = \frac{1}{2} PA + \frac{1}{2} QA$ et $R_{\frac{1}{2}} B = \frac{1}{2} PB + \frac{1}{2} QB$ et $R_{\frac{1}{2}} C = \frac{1}{2} PC + \frac{1}{2} QC$, soit $2R_{\frac{1}{2}} A = PA + QA$ et $2R_{\frac{1}{2}} B = PB + QB$ et $2R_{\frac{1}{2}} C = PC + QC$.

On applique alors la propriété ci-dessous, et on conclut que A est sur la droite (PQ) et B est sur la droite (PQ) et C est sur la droite (PQ) ; les trois points A, B et C sont donc alignés, d'où une contradiction.

Propriété. Soit M un point quelconque du plan. Si $2MR = PM + QM$, alors M est sur la droite (PQ) .



Soit $R_{\frac{1}{2}} = (0, 0)$, $P = (-a, 0)$ et $Q = (a, 0)$, $M = (x, y)$.

$$2R_{\frac{1}{2}}M = PM + QM$$

$$\iff 2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

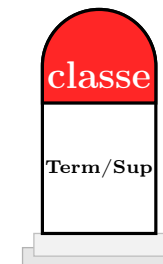
$$\iff 2\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \geq 0$$

Donc :

$$4(x^2 + y^2) - 4\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2 + y^2$$



Fiche professeur



Soit

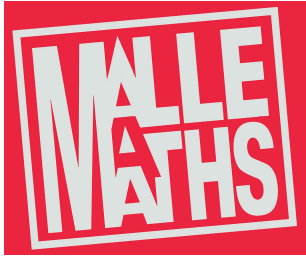
$$\begin{aligned}4\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{(x-a)^2 + y^2} &= 4(x^2 + y^2) + (x-a)^2 + y^2 - (x+a)^2 - y^2 \\&= 4x^2 + 4y^2 + x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - x^2 - 2ax - a^2 - y^2 \\&= 4x^2 + 4y^2 - 4ax\end{aligned}$$

Soit

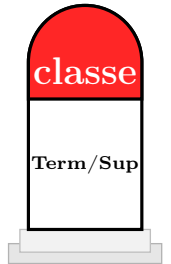
$$\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = x^2 + y^2 - ax$$

En élève au carré :

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)[(x-a)^2 + y^2] &= [x^2 + y^2 - ax]^2 \\ \iff (x^2 + y^2)[x^2 - 2ax + a^2 + y^2] &= [x^4 + y^4 + a^2x^2 + 2x^2y^2 - 2axy^2 - 2ax^3] \\ \iff x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 + y^2x^2 + x^2y^2 - 2axy^2 + a^2y^2 + y^4 &= x^4 + y^4 + a^2x^2 + 2x^2y^2 - 2axy^2 - 2ax^3 \\ \iff a^2y^2 = 0 \iff y^2 = 0 \iff y = 0 &\text{ et donc M est sur la droite (PQ)}\end{aligned}$$



Fiche professeur



Utilisation des nombres complexes pour démontrer qu'un point P vérifiant

$(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = (\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PB}) = (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}) = \frac{2\pi}{3}$, minimise la somme $MA + MB + MC$:

Supposons $\hat{A} < 120^\circ$ et $\hat{B} < 120^\circ$ et $\hat{C} < 120^\circ$.

Soit P le point vérifiant $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{APC} = 120^\circ$ (P est le point de Steiner). Alors $P \neq A$, $P \neq B$ et $P \neq C$.

Posons $\vec{u} = \overrightarrow{PA}/PA$, et $(P, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan complexe.

Posons a , b et c les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{PC}$. Donc $\overrightarrow{PA} = a\vec{u}$ avec $a > 0$.

Alors $a = |a| = PA$, $|b| = PB$, $|c| = PC$, $b = |b|j$ et $c = |c|j^2$ (où $j = e^{2i\pi/3}$), alors $bj^2 = |b|$ et $cj = |c|$.

Donc, $PA + PB + PC = |a| + |b| + |c| = a + bj^2 + cj$ et $1 + j + j^2 = 0$.

Soit M un point d'affixe z , on a :

$$\begin{aligned} PA + PB + PC &= a + bj^2 + cj = a + bj^2 + cj - (1 + j + j^2)z \\ &= (a - z) + (c - z)j + (b - z)j^2 \end{aligned}$$

Comme $PA + PB + PC \geq 0$, alors $PA + PB + PC = |PA + PB + PC| = |(a - z) + (c - z)j + (b - z)j^2|$

Donc,

$$PA + PB + PC \leq |(a - z)| + |(c - z)| + |(b - z)| = MA + MB + MC$$

Cela assure que P réalise bien le minimum.