

Université d'Orléans

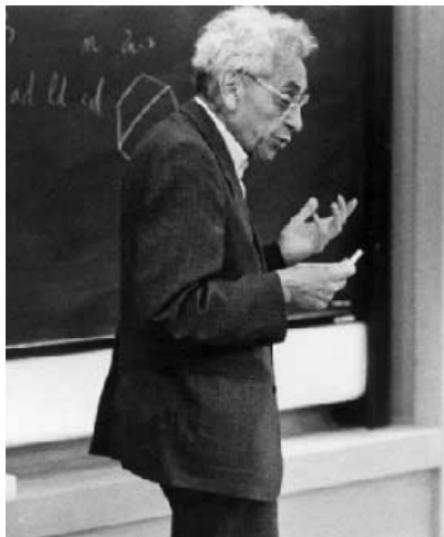
L2 informatique – Probabilités

Introduction : La méthode probabiliste

Nils Berglund

Année académique 2023–2024

Le mathématicien Paul Erdős



Paul Erdős (26 mars 1913 – 20 septembre 1996)

Auteur d'environ 1500 articles de recherche

Inventeur de la « méthode probabiliste »

Exemple : organisation d'un tournoi

Peu importe le type de jeu : foot, tennis, ping-pong, chifoumi (pierre-feuille-ciseaux), ...

Règles :

- ▷ On a un certain nombre de joueurs ou équipes
- ▷ Chacun affronte chacun
- ▷ Dans chaque match, il y a un gagnant et un perdant (pas d'ex-æquo)

Exemple : organisation d'un tournoi

Peu importe le type de jeu : foot, tennis, ping-pong, chifoumi (pierre-feuille-ciseaux), ...

Règles :

- ▷ On a un certain nombre de joueurs ou équipes
- ▷ Chacun affronte chacun
- ▷ Dans chaque match, il y a un gagnant et un perdant (pas d'ex-æquo)

Questions :

- ▷ Combien de parties sont jouées ?
- ▷ Combien d'issues (résultats) possibles y a-t-il ?
- ▷ Certains joueurs sont-ils meilleurs que d'autres ?

Compter les parties

Amélie

Bernard

Compter les parties

Amélie

Bernard

Amélie

Bernard

Célia

Compter les parties

Amélie

Bernard

Célia

David

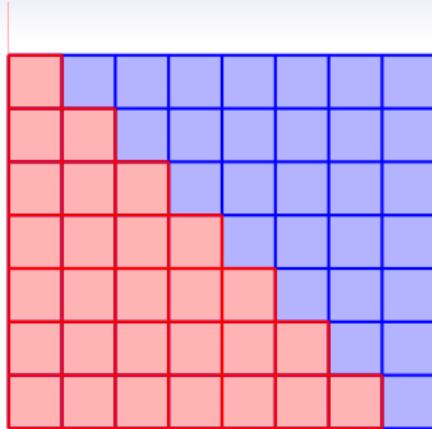
Et pour N joueurs ?

Carl Friedrich Gauß (Gauss)



Carl Friedrich Gauß (30 avril 1777 – 23 février 1855)

Et pour N joueurs ?

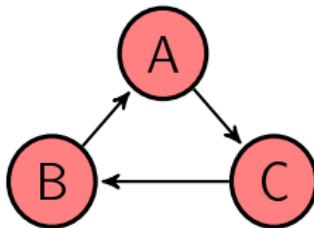
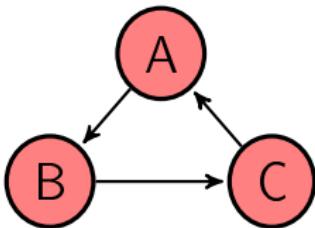
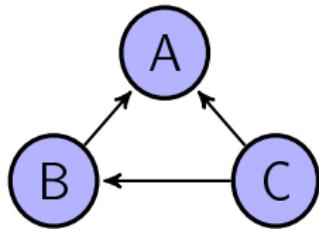
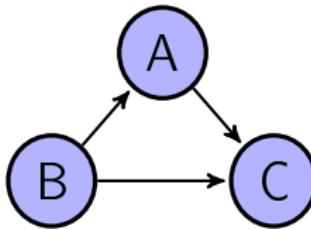
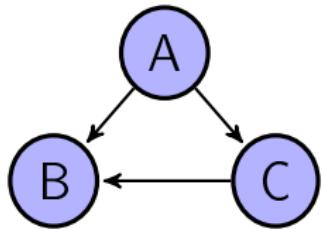
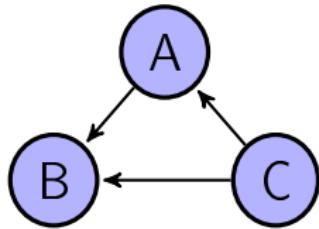
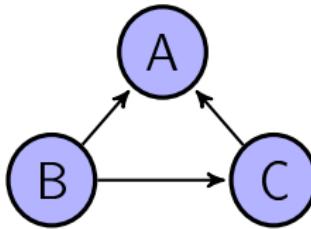
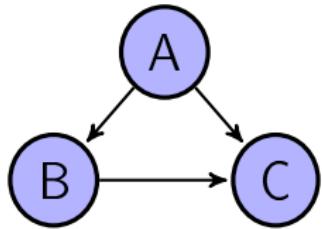


$$1 + 2 + 3 + \cdots + 7 =$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + N =$$

Nombre d'issues possibles du tournoi

Différents types d'issues



Tournois indécis

Définition

Nous dirons qu'un tournoi est *indécis* s'il existe des issues dans lesquelles chaque joueur a été battu par un autre joueur.

Tournois indécis

Définition

Nous dirons qu'un tournoi est *indécis* s'il existe des issues dans lesquelles chaque joueur a été battu par un autre joueur.

Théorème

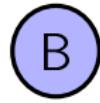
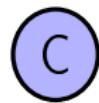
Tout tournoi avec au moins 3 joueurs est indécis.

Tournois 2-indécis

Définition

Nous dirons qu'un tournoi est *2-indécis* s'il existe des issues dans lesquelles chaque paire de joueurs a été battue par un troisième joueur.

Existe-t-il des tournois 2-indécis ?



La méthode probabiliste

Idée : Supposons que chaque match a une chance sur 2 d'être gagné par chaque joueur (indépendamment de tous les autres matchs)

La méthode probabiliste

Idée : Supposons que chaque match a une chance sur 2 d'être gagné par chaque joueur (indépendamment de tous les autres matchs)

Principe de la méthode probabiliste

Soit p la probabilité qu'un match soit 2-indécis.

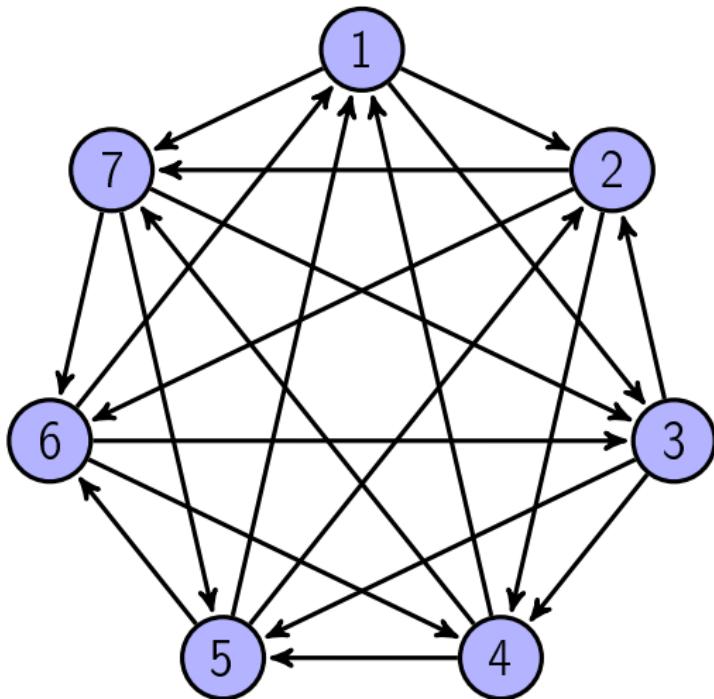
Si $p > 0$, alors il existe au moins une issue 2-indécise, donc le tournoi est 2-indécis.

Un résultat que nous obtiendrons dans ce cours

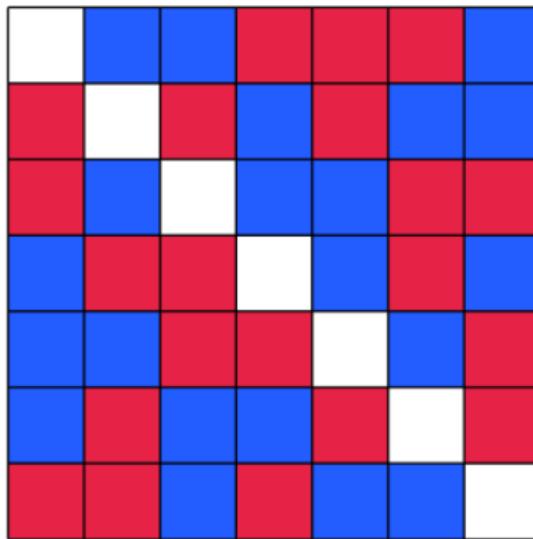
Théorème

Il existe des tournois 2-indécis dès que le nombre de joueurs est au moins égal à 21.

Le plus petit tournoi 2-indécis



Le plus petit tournoi 2-indécis



Tournois k -indécis

Définition

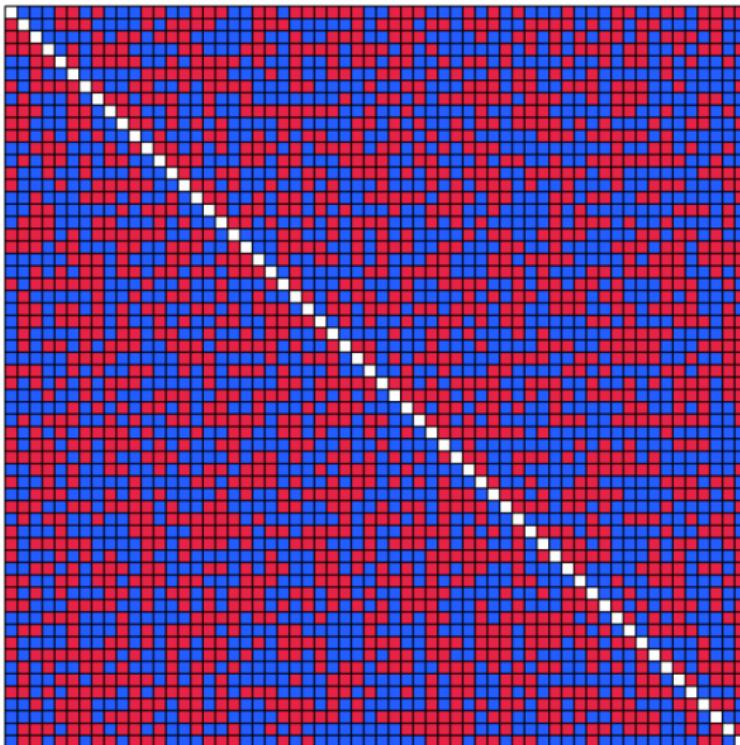
Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Nous dirons qu'un tournoi est *k -indécis* s'il existe des issues dans lesquelles *chaque groupe de k joueurs* a été battu par un autre joueur.

Tournois k -indécis

Théorème

Pour tout $k \geq 1$, il existe des tournois k -indécis dès que le nombre n de joueurs est assez grand.

Un tournoi 3-indécis à 60 joueurs



Un tournoi 3-indécis à 43 joueurs

