

ENS, Séminaire «Des mathématiques»

# Quelques histoires d'équations de réaction–diffusion, sans bruit et avec bruit

Nils Berglund

Institut Denis Poisson, Université d'Orléans  
CNRS, UMR 7013  
<https://www.idpoisson.fr/berglund/>

ENS, Décembre 2022

# Les équations de réaction–diffusion

- ▷ Article fondateur d'Alan Turing: "The Chemical Basis of Morphogenesis" (1952)  
Notion d'**instabilité de Turing**
- ▷ Applications en chimie (réactions de Belousov–Zhabotinsky), dynamique de populations, pelage d'animaux, répartition spatiale de végétaux, ...



"Giant pufferfish"



Léopard

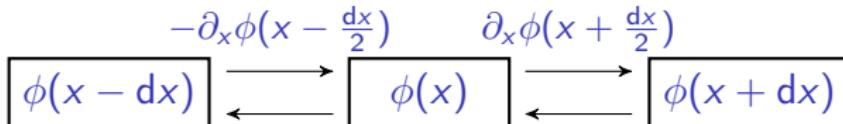


Végétation (Niger)

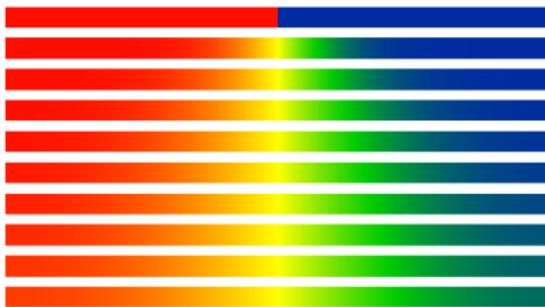
# L'équation de la chaleur

- ▷ Proposée par Joseph Fourier en 1822
- ▷  $\phi(t, x)$ : température au temps  $t$  et au point  $x$

$$\partial_t \phi(t, x) = \alpha \partial_{xx} \phi(t, x)$$



- ▷ Exemple de solution:



# Solutions dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\partial_t \phi(t, x) &= \partial_{xx} \phi(t, x) \\ \phi(0, x) &= \phi_0(x) \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{condition initiale}\end{aligned}$$

- ▷ **Principe de superposition:**

La somme de deux solutions est une solution  
(modulo cond initiale)

- ▷ **Solutions particulières** (**noyau de la chaleur** et ses translatés)

$$\phi_y(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-y)^2/(4t)}$$

Densité d'une **loi normale de moyenne  $y$  et variance  $2t$**

- ▷ **Solution de condition initiale**  $\phi(0, x) = \phi_0(x)$ :

$$\phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4t)} \phi_0(y) dy$$

**Propriété:**  $\phi(t, \cdot)$  est **plus régulière** que  $\phi_0$  si  $t > 0$

# Solutions sur $[0, L]$

$$\partial_t \phi(t, x) = \partial_{xx} \phi(t, x)$$

$$\phi(0, x) = \phi_0(x) \quad x \in [0, L] \quad \text{condition initiale}$$

$$\phi(t, 0) = \phi(t, L) = 0 \quad t \geq 0 \quad \text{conditions aux bords}$$

▷ Séparation des variables:  $\phi(t, x) = f(t)g(x)$

$$\Rightarrow f'(t)g(x) = f(t)g''(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} = -\lambda$$

▷ Solutions :  $g_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , avec  $\lambda_n = n^2 \frac{\pi^2}{L^2}$   
 $f_n(t) = f_n(0) e^{-\lambda_n t}$

▷ Solution générale : Série de Fourier

$$\phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) e^{-\lambda_n t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

avec  $f_n(0)$  donnés par  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \phi_0(x)$

# Décroissance de l'énergie

$$\partial_t \phi(t, x) = \partial_{xx} \phi(t, x)$$

▷ Énergie :  $E(\phi(t)) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\partial_x \phi(t, x)]^2 dx$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} E(\phi(t)) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t ([\partial_x \phi(t, x)]^2) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \phi(t, x) \partial_t \partial_x \phi(t, x) dx \\ &= 0 - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_{xx} \phi(t, x) \partial_t \phi(t, x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} [\partial_{xx} \phi(t, x)]^2 dx \leq 0\end{aligned}$$

▷ L'énergie décroît aux cours du temps

L'énergie est constante si et seulement si  $\phi(t, x)$  ne dépend pas de  $x$

# L'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$

$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) \quad \Delta = \partial_{x_1 x_1} + \cdots + \partial_{x_n x_n}$$

▷ Noyau de la chaleur:

$$\phi(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x-y\|^2/(4t)} \phi_0(y) dy$$

▷ Avec conditions aux bords de Dirichlet

$$\phi(t, x) = 0 \text{ pour } x \in \partial D, D \subset \mathbb{R}^n:$$

$$\phi(t, x) = \sum_n c_n e^{-\lambda_n t} \phi_n(x)$$

où

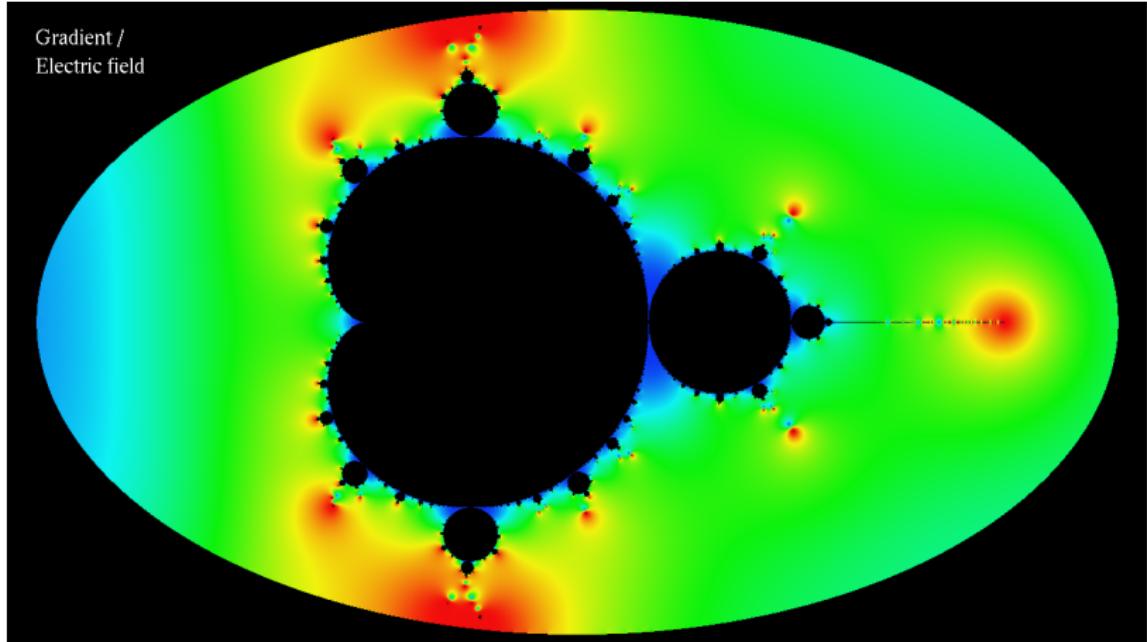
$$\Delta \phi_n(x) = -\lambda_n \phi_n(x) \quad x \in D$$

$$\phi_n(x) = 0 \quad x \in \partial D$$

et  $c_n$  donnés par  $\sum_n c_n \phi_n(x) = \phi(0, x)$

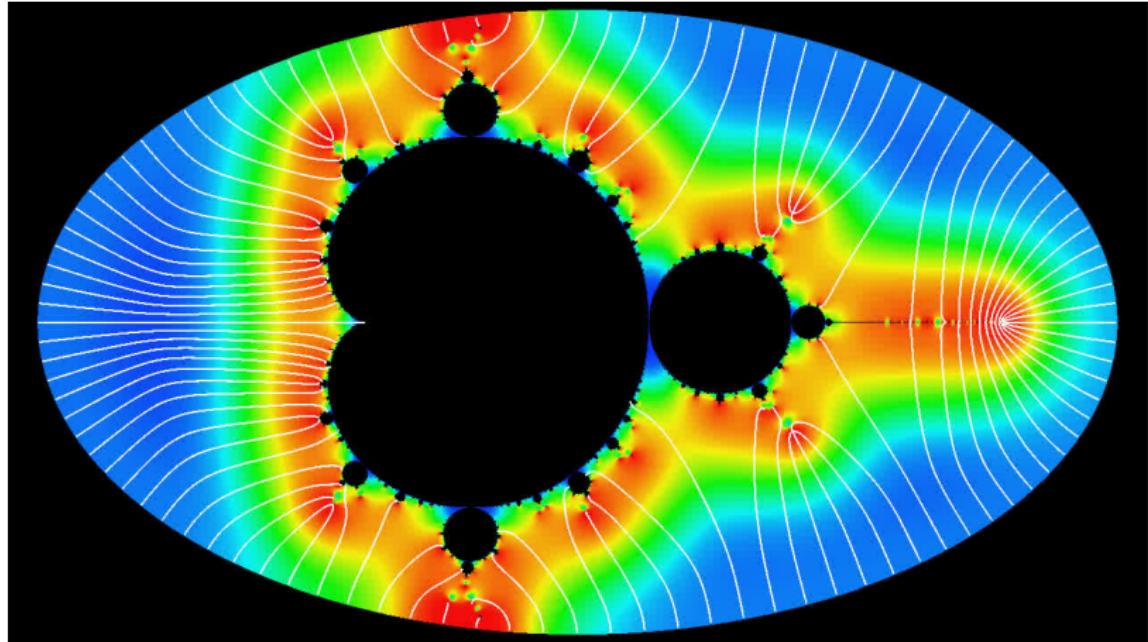
▷ Autres conditions aux bords: périodiques, Neumann, Robin, ...

# Équation de la chaleur avec bord fractal



(En ligne: <https://youtu.be/8ygylNhf0n4>)

# Équation de la chaleur avec bord fractal



(En ligne: <https://youtu.be/Yr040XeN14c>)

# Équations de réaction–diffusion

$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) + f(\phi(t, x))$$

Existence d'une solution: **formule de Duhamel**

▷ Équation homogène :  $\partial_t \phi = \Delta \phi$ ,  $\phi(0, x) = \phi_0(x)$

$$\phi(t, x) = \int \underbrace{K(t, x - y)}_{\text{noyau de la chaleur}} \phi_0(y) dy =: (K(t, \cdot) * \phi_0)(x)$$

▷ Variation de la constante :  $\phi(t, x) = \int K(t, x - y) \psi(t, y) dy$

$$\phi(t) = K(t, \cdot) * \phi_0 + \int_0^t K(t - s, \cdot) * f(\phi(s)) ds$$

$$\phi(t, x) = \int \left[ K(t, x - y) \phi_0(y) + \int_0^t K(t - s, x - y) f(\phi(s, y)) ds \right] dy$$

⇒ Théorème du point fixe de Banach.

# L'équation d'Allen–Cahn

$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) + \phi(t, x) - \phi(t, x)^3$$

## Applications :

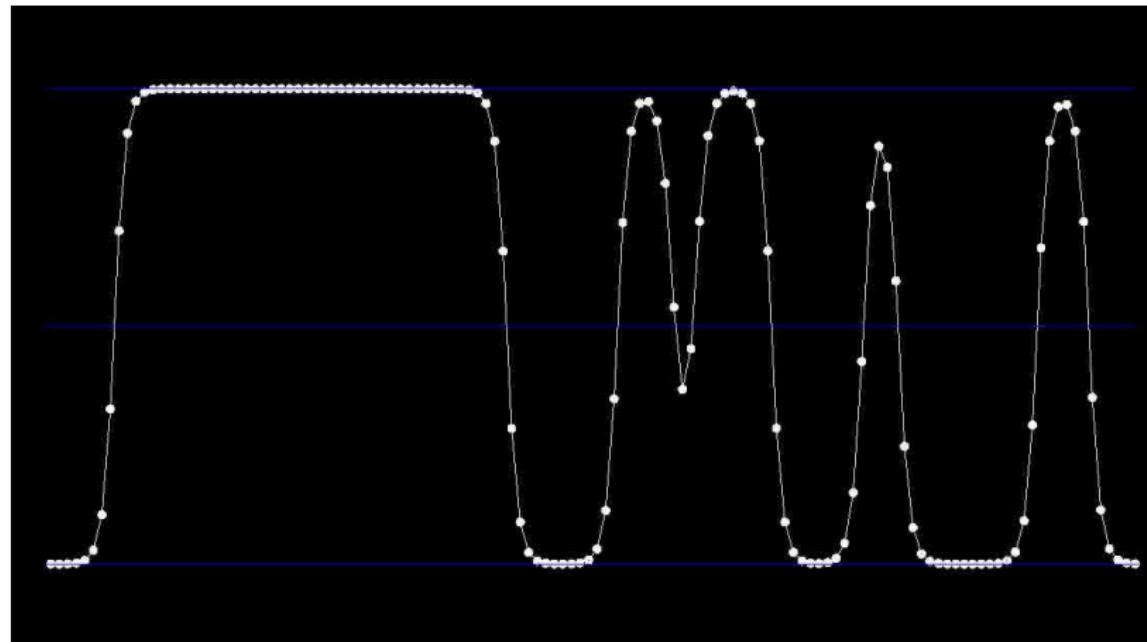
- ▷ Séparation de phases dans un alliage
- ▷ Évolution de l'aimantation dans un matériau ferromagnétique
- ▷ Mayonnaise ratée (approximatif)

## Solutions stationnaires ( $\partial_t \phi = 0$ ) :

- ▷  $\phi(x) = 0 \quad \forall x$  : instable
- ▷  $\phi(x) = 1 \quad \forall x$  : stable
- ▷  $\phi(x) = -1 \quad \forall x$  : stable
- ▷ Autres solutions non-constantes de  $\Delta \phi(x) = -\phi(x) + \phi(x)^3$  (instables)

# L'équation d'Allen–Cahn sur le tore $\mathbb{T}^1$

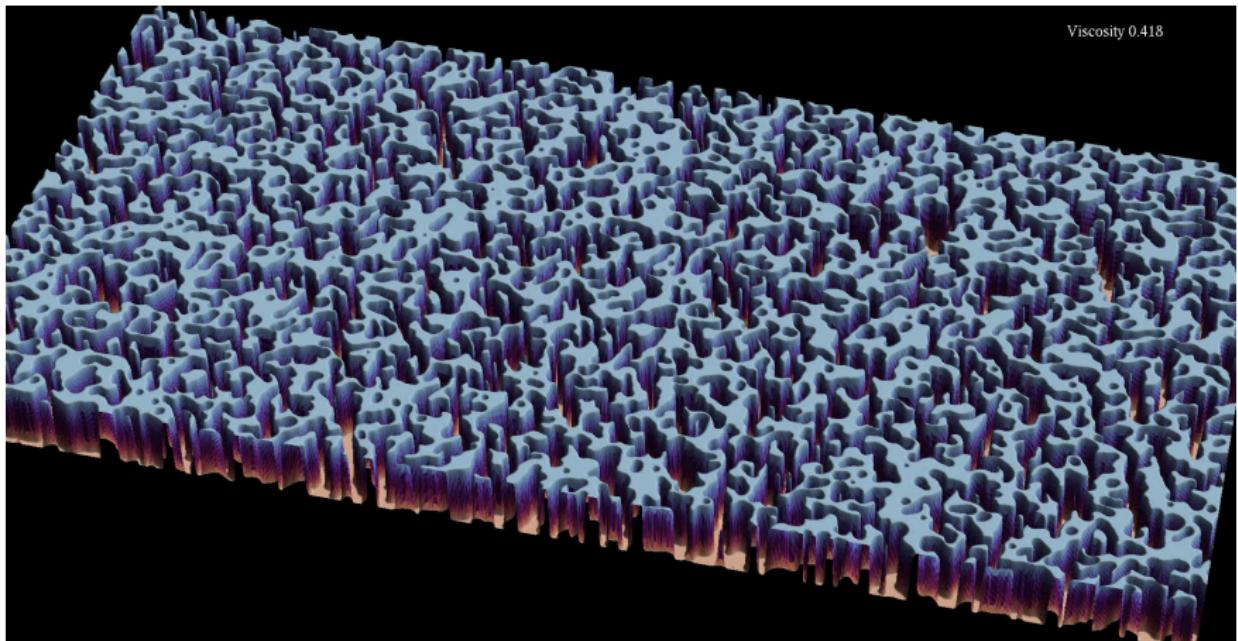
$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) + \phi(t, x) - \phi(t, x)^3$$



(En ligne: <https://youtu.be/NDQHepkSeS8>)

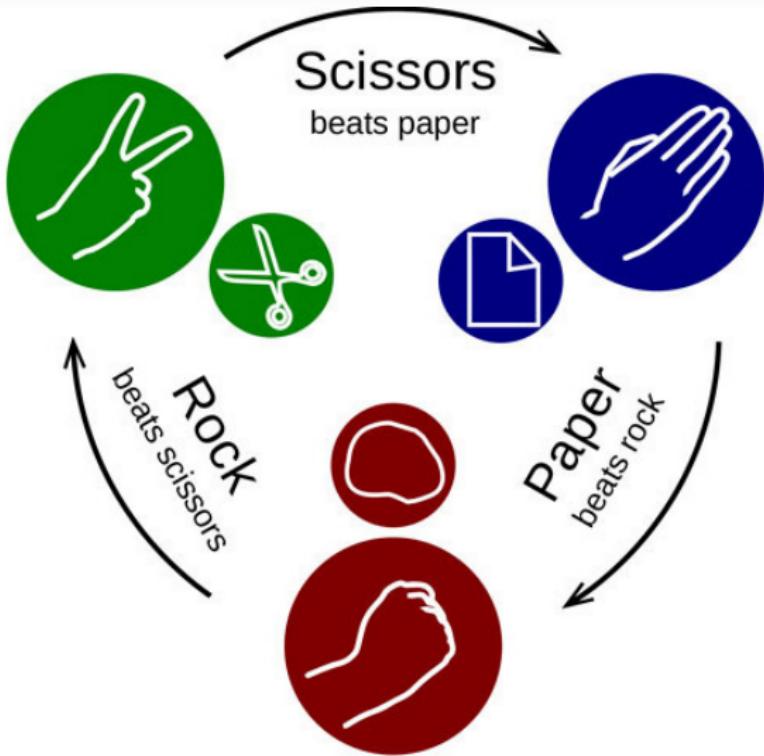
# L'équation d'Allen–Cahn sur le tore $\mathbb{T}^2$

$$\partial_t \phi(t, x) = \alpha(t) \Delta \phi(t, x) + \phi(t, x) - \phi(t, x)^3$$



(En ligne: <https://youtu.be/yX0EAxZHNcQ>)

# Pierre–Papier–Ciseaux



# Pierre–Papier–Ciseaux

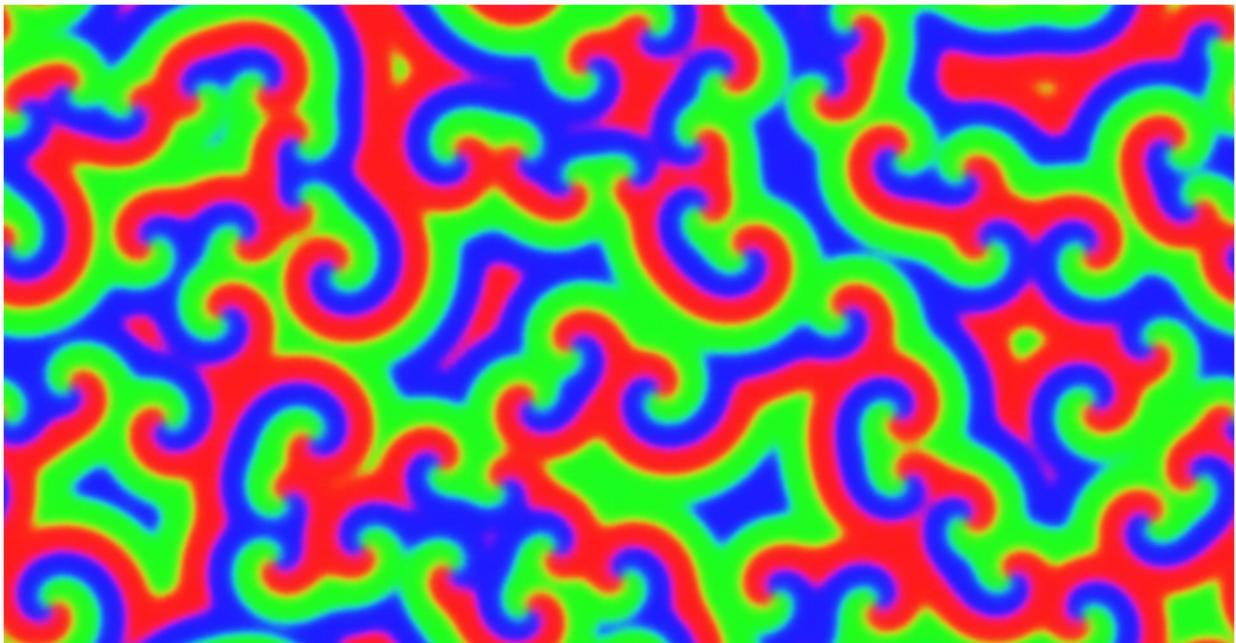
- ▷ Densités de 3 types de molécules :  $u(t, x)$ ,  $v(t, x)$ ,  $w(t, x)$
- ▷ Densité totale :  $\rho(t, x) = u(t, x) + v(t, x) + w(t, x)$
- ▷ Équation :

$$\partial_t u(t, x) = D \Delta u(t, x) + u(t, x) [1 - \rho(t, x) - a v(t, x)]$$

$$\partial_t v(t, x) = D \Delta v(t, x) + v(t, x) [1 - \rho(t, x) - a w(t, x)]$$

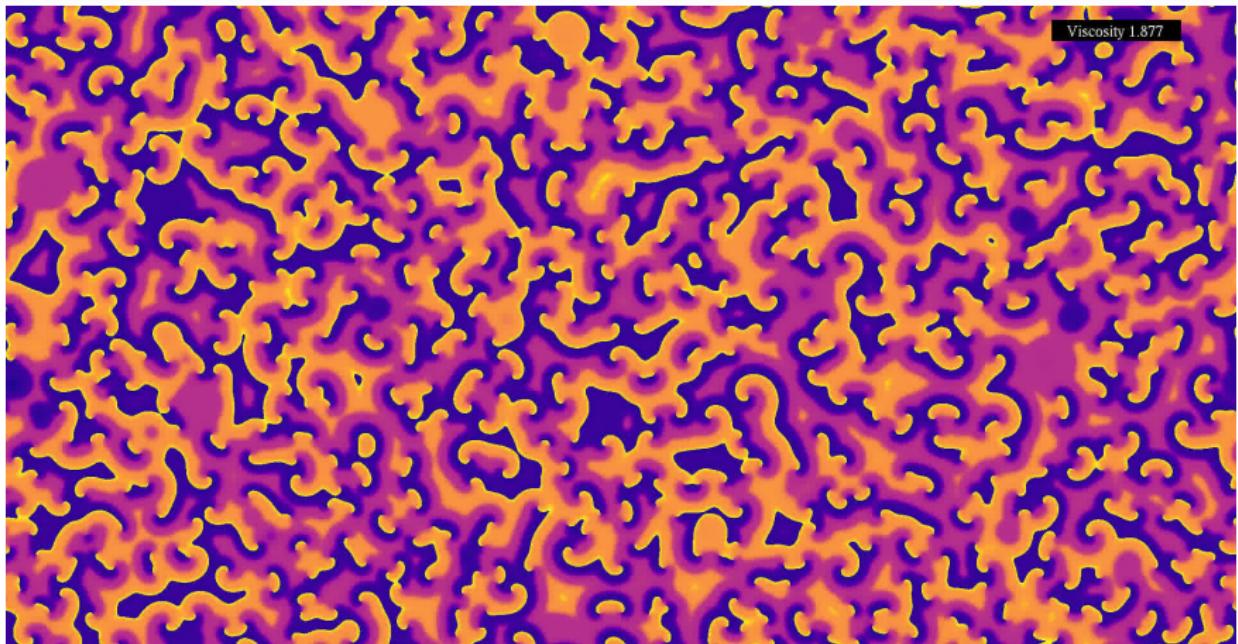
$$\partial_t w(t, x) = D \Delta w(t, x) + w(t, x) [1 - \rho(t, x) - a u(t, x)]$$

# Pierre–Papier–Ciseaux



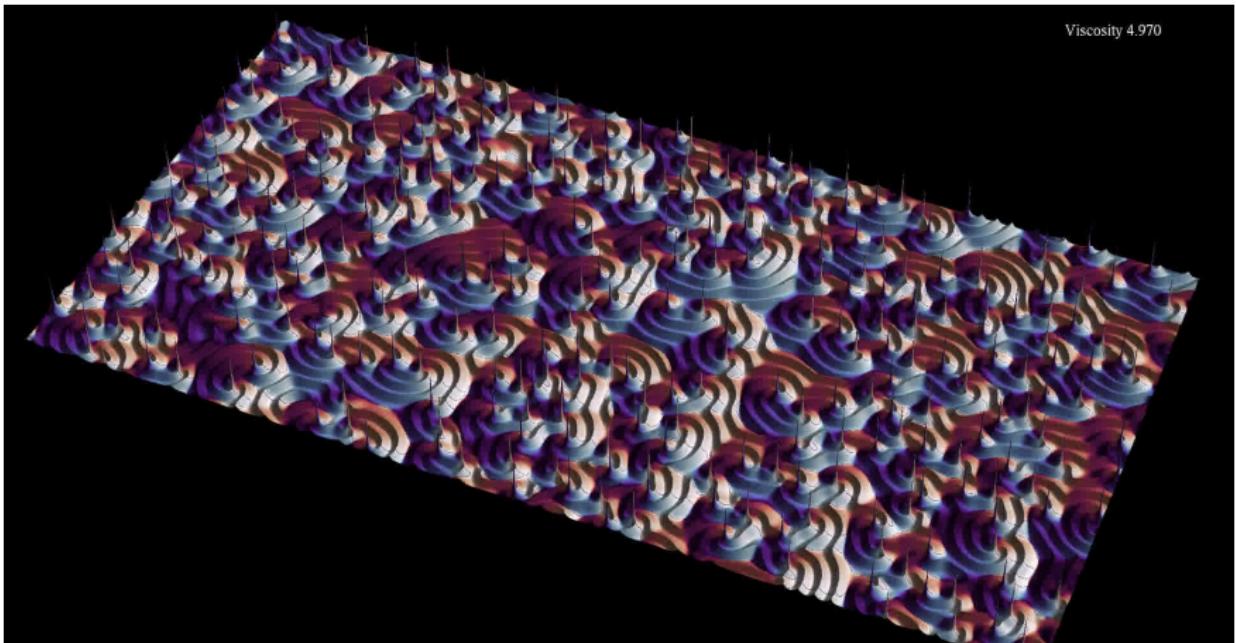
(En ligne: <https://youtu.be/T0RwMc2AaRE>)

# Pierre–Papier–Ciseaux



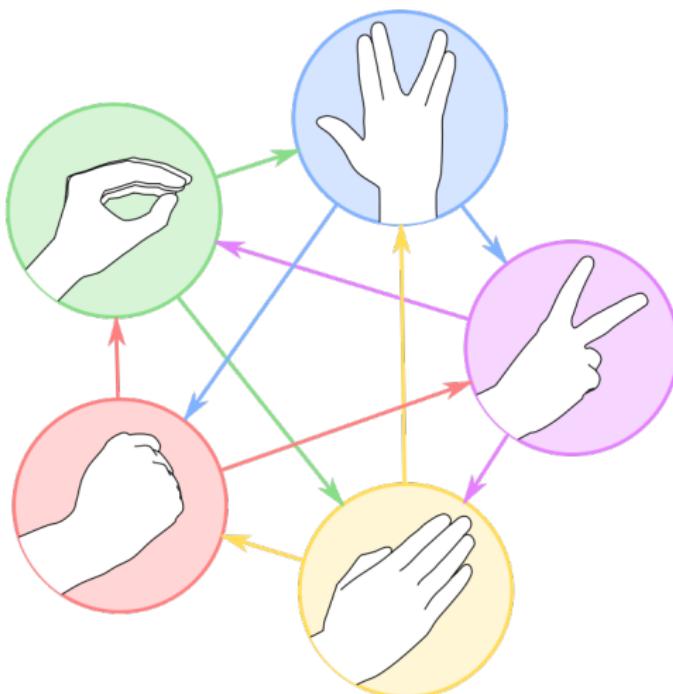
(En ligne: <https://youtu.be/QcxpZKWbLd4>)

# Pierre–Papier–Ciseaux



(En ligne: <https://youtu.be/bsEGkyJudKA>)

# Pierre–Papier–Ciseaux–Lézard–Spock



Par Nojhan – Travail personnel, CC BY-SA 3.0,  
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8680554>

# Pierre–Papier–Ciseaux–Lézard–Spock

- ▷ Densités de 5 types de molécules :  $u(t, x)$ ,  $v(t, x)$ ,  $w(t, x)$ ,  $y(t, x)$ ,  $z(t, x)$
- ▷ Densité totale :  $\rho = u + v + w + y + z$
- ▷ Équation :

$$\partial_t u = D\Delta u + u[1 - \rho - av - by]$$

$$\partial_t v = D\Delta v + v[1 - \rho - aw - bz]$$

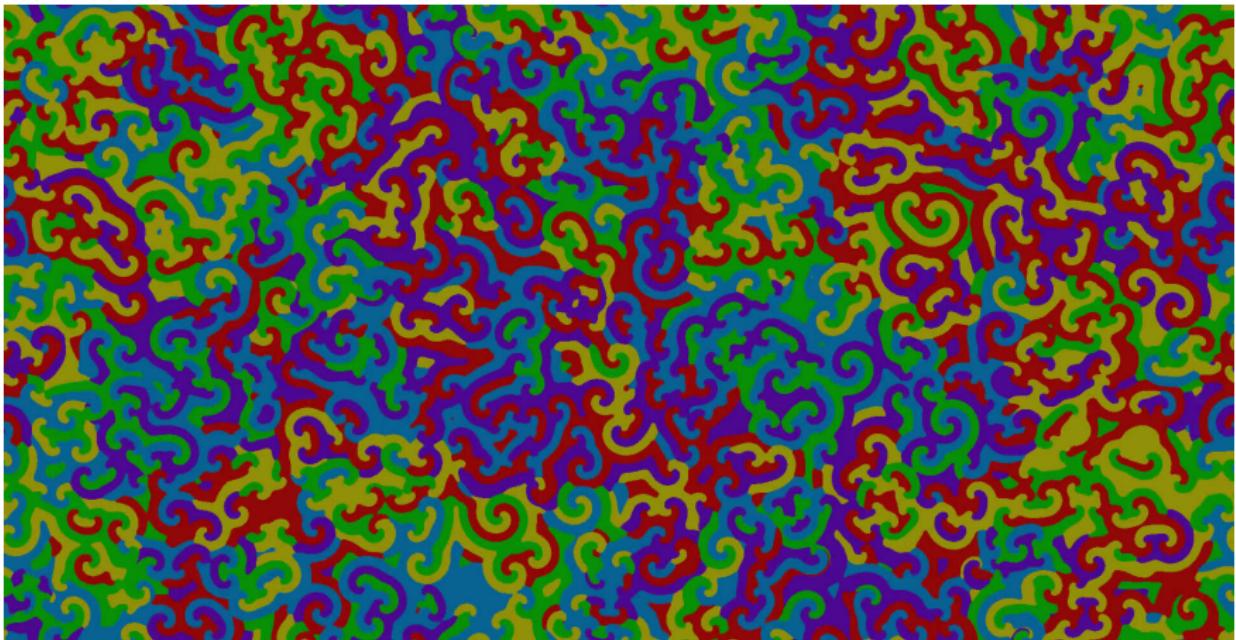
$$\partial_t w = D\Delta w + w[1 - \rho - ay - bu]$$

$$\partial_t y = D\Delta y + y[1 - \rho - az - bv]$$

$$\partial_t z = D\Delta z + z[1 - \rho - au - bw]$$

# Pierre–Papier–Ciseaux–Lézard–Spock

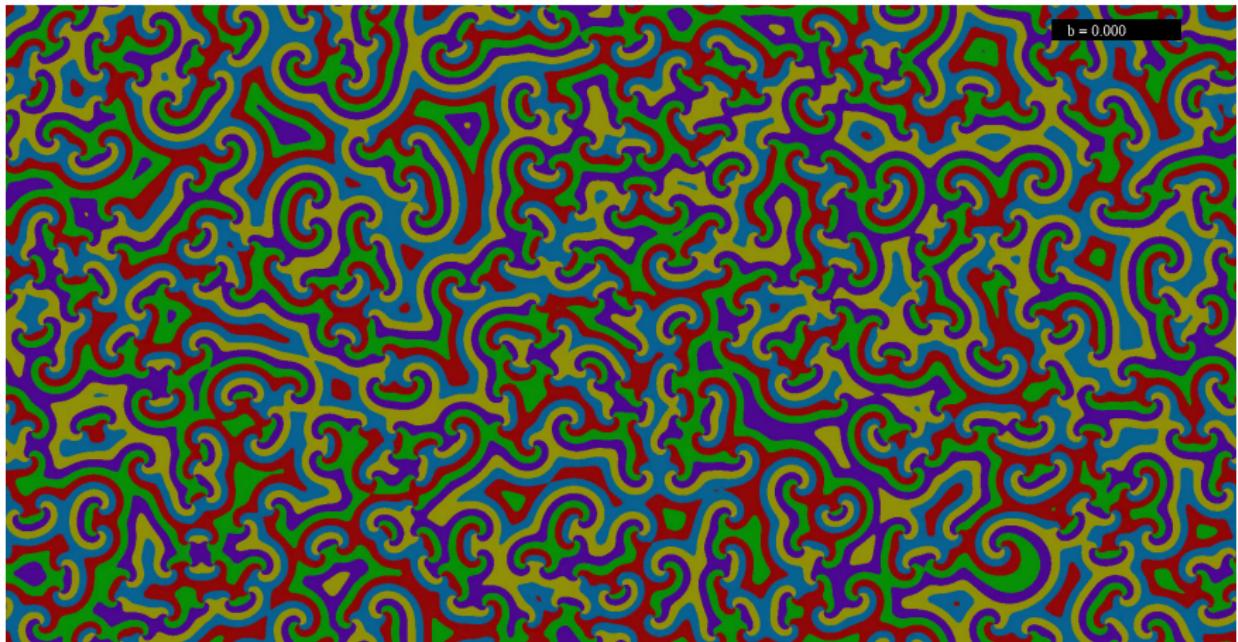
Cas symétrique  $a = b = 0.75$



(En ligne: [https://youtu.be/-Qap\\_7skcIA](https://youtu.be/-Qap_7skcIA))

# Pierre–Papier–Ciseaux–Lézard–Spock

Version non symétrique,  $a = 0.75$ ,  $b = b(t)$



(En ligne: <https://youtu.be/cioB22z7A9A>)

# EDPs stochastiques

$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) + f(\phi(t, x)) + \sigma \xi(t, x)$$

▷  $\xi(t, x)$  : bruit blanc espace-temps

Gaussien, centré, covariance  $\mathbb{E}[\xi(t, x)\xi(s, y)] = \delta(t - s)\delta(x - y)$

▷  $\xi$ : distribution définie par

$\langle \xi, \varphi \rangle = W_\varphi \sim \mathcal{N}(0, \|\varphi\|_{L^2}^2)$ ,  $\mathbb{E}[W_\varphi W_{\varphi'}] = \langle \varphi, \varphi' \rangle_{L^2}$

▷ Pour  $x \in \mathbb{T}^n$ ,  $\xi$  admet une «régularité de Hölder»  $\alpha = -\frac{n+2}{2}$

▷ On appelle convolution stochastique la solution de l'équation linéaire

$$\partial_t \psi(t, x) = \Delta \psi(t, x) + \sigma \xi(t, x)$$

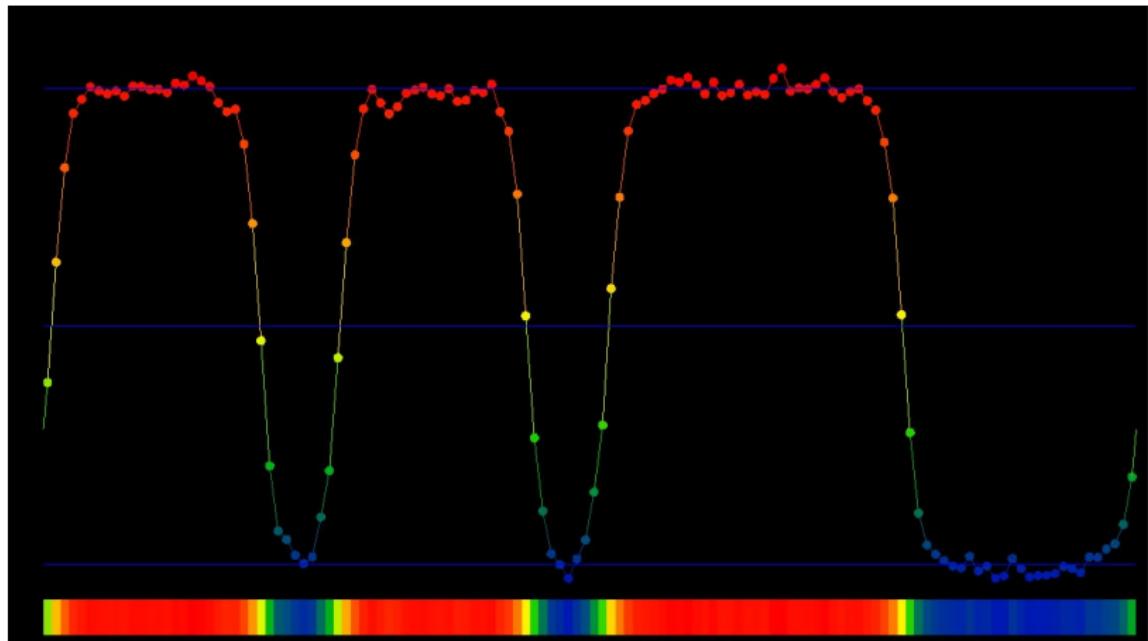
Sa régularité est  $\alpha + 2 = \frac{2-n}{2}$

▷ Conséquence:

- ◊ Si  $n = 1$ , l'argument de point fixe est applicable, impliquant l'existence de solutions
- ◊ Si  $n \geq 2$  une procédure de renormalisation est nécessaire

# L'équation d'Allen–Cahn sur le tore $\mathbb{T}^1$ avec bruit

$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) + \phi(t, x) - \phi(t, x)^3 + \sigma \xi(t, x)$$



(En ligne: <https://youtu.be/yX0EAxZHNCQ>)

# Renormalisation d'EDPs stochastiques singulières

$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) + \phi(t, x) - \phi(t, x)^3 + \xi(t, x), \quad x \in \mathbb{T}^n$$

- ▷  $n = 1$  : L'argument du point fixe fonctionne
- ▷  $n = 2$  : Soit  $\xi^\varepsilon = \varrho^\varepsilon * \xi$  une régularisation du bruit à l'échelle  $\varepsilon$  où  
$$\varrho^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+2}} \varrho\left(\frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Équation renormalisée :

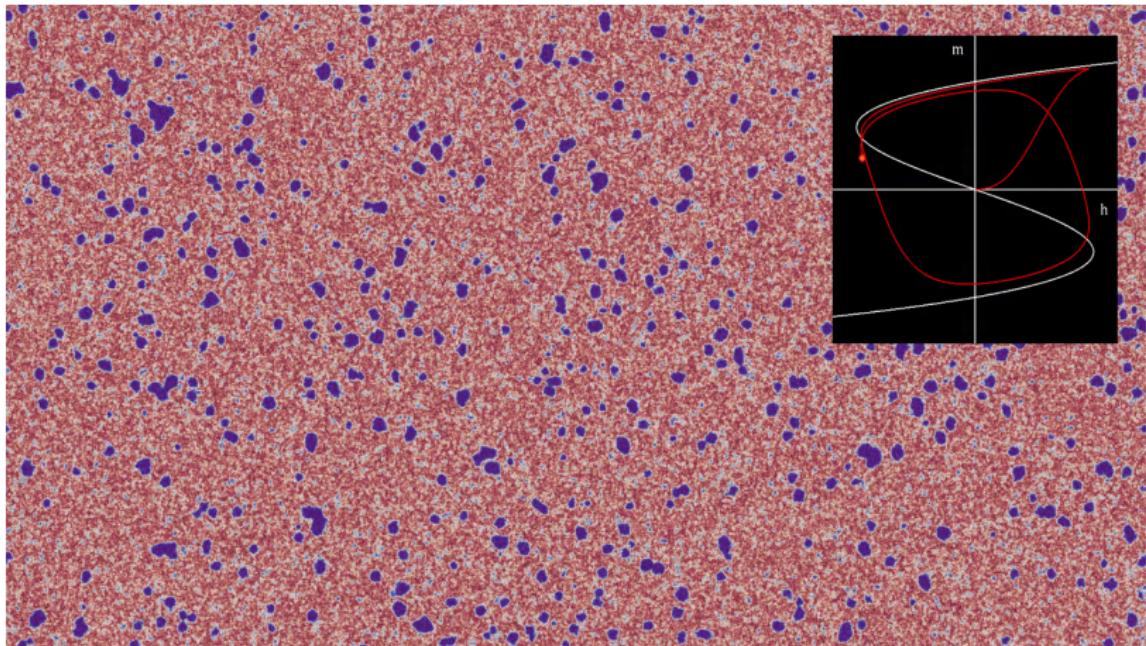
$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) + \phi(t, x) - \phi(t, x)^3 - C(\varepsilon) \phi(t, x) + \xi^\varepsilon(t, x)$$

En 2003, Giuseppe Da Prato et Arnaud Debussche montrent que pour un  $C(\varepsilon)$  d'ordre  $\log(1/\varepsilon)$ ,  $\phi - \psi$  (où  $\psi$  : convolution stochastique) converge lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  (dans certains espaces de Besov)

- ▷  $n = 3$  : En 2013, Martin Hairer (Médaille Fields 2014) met au point la théorie des structures de régularité  
Celle-ci implique la convergence pour  $C(\varepsilon) \sim c_1/\varepsilon + c_2 \log(1/\varepsilon)$
- ▷  $n = 4$  : En 2020, Michael Aizenmann et Hugo Duminil-Copin (Médaille Fields 2022) obtiennent un résultat de trivialité, qui montre qu'on ne peut pas renormaliser l'équation

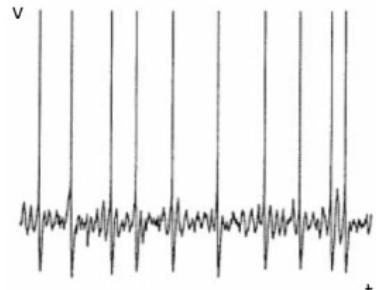
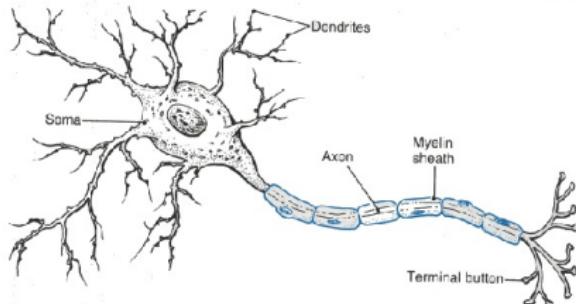
# Équation d'Allen–Cahn forcée périodiquement

$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) + \phi(t, x) - \phi(t, x)^3 - C(\varepsilon) \phi(t, x) + \underbrace{A \cos(\varepsilon t) + \sigma \xi^\varepsilon(t, x)}_{h(\varepsilon t)}$$



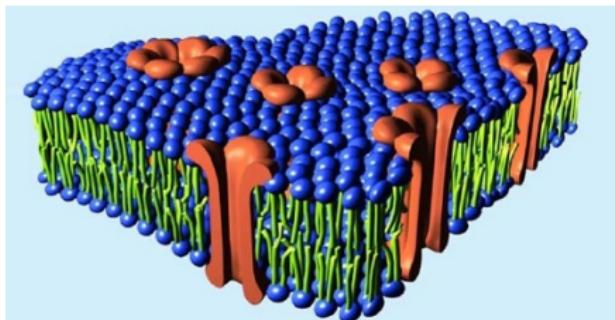
(En ligne: <https://youtu.be/yX0EAxZHNCQ>)

# Neurones



Potentiel d'action

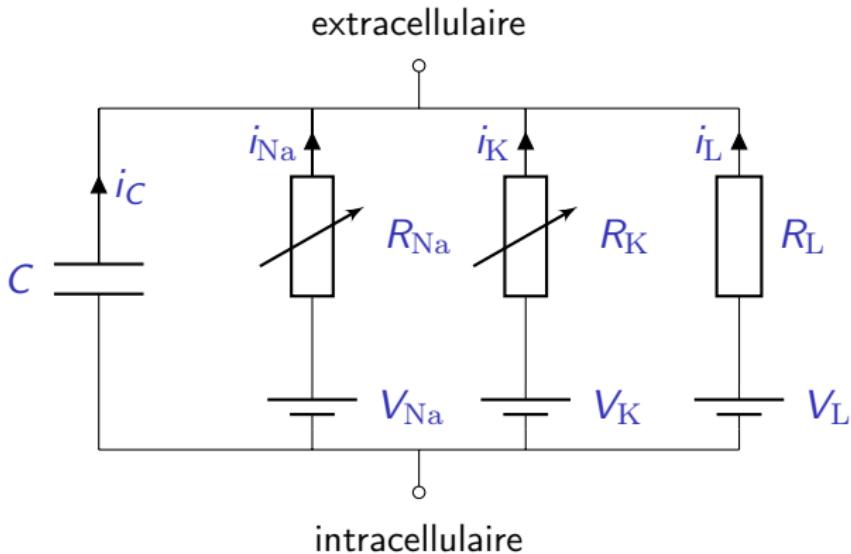
- ▷ **Spike:** Pic temporaire du potentiel d'action
- ▷ **Canal ionique:** Orifice laissant passer des ions à travers la membrane



La membrane du neurone fonctionne un peu comme un circuit électrique

# Neurone: le modèle de Hodgkin–Huxley (1952)

Prix Nobel de médecine en 1963 (partagé avec Sir John Carew Eccles)



$R_K$  et  $R_{Na}$  dépendent du nombre de canaux ioniques ouverts de 3 types  
L'évolution au cours du temps de ces nombres dépend de  $v$   
(de manière compliquée)

# Le modèle de FitzHugh–Nagumo (1961)

Modèle simplifié à un type de canal

$v$  potentiel de membrane

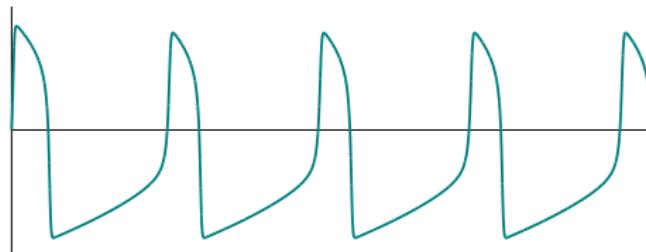
$w$  nombre de canaux ouverts

$$\frac{dv}{dt} = v - \frac{1}{3}v^3 - w + I$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{T}(v + a - bw)$$

Se réduit à l'oscillateur de Van der Pol (1920) si  $a = b = I = 0$

Richard FitzHugh ( $\sim$ 1960)

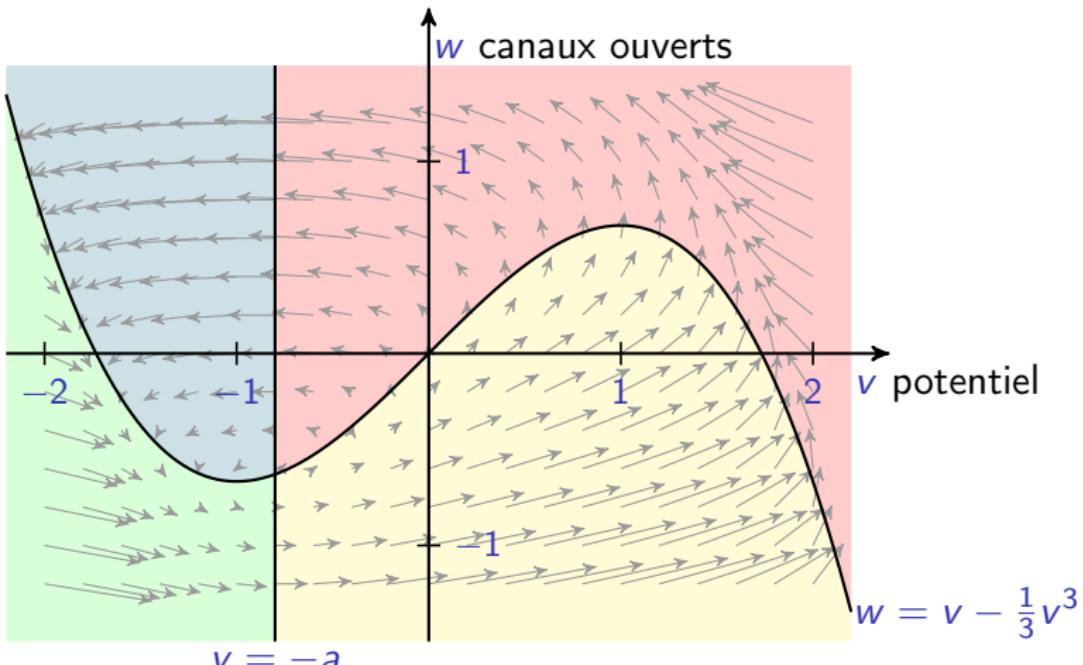


# Approche géométrique

cas  $b = I = 0$

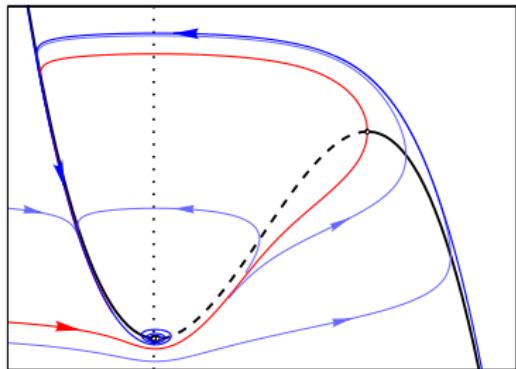
$$\frac{dv}{dt} = v - \frac{1}{3}v^3 - w$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{T}(v + a)$$

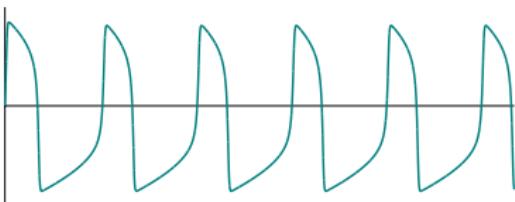
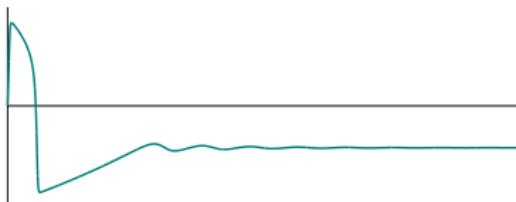
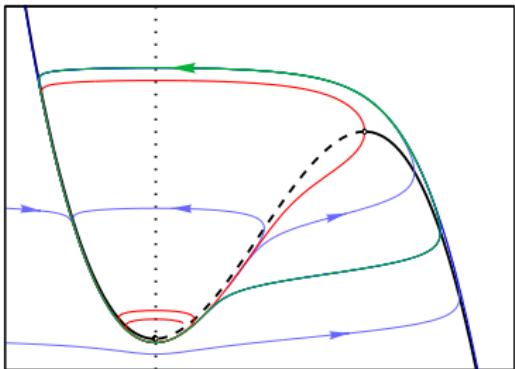


# Les deux régimes du modèle FHN

Oscillation amortie



Oscillation de relaxation

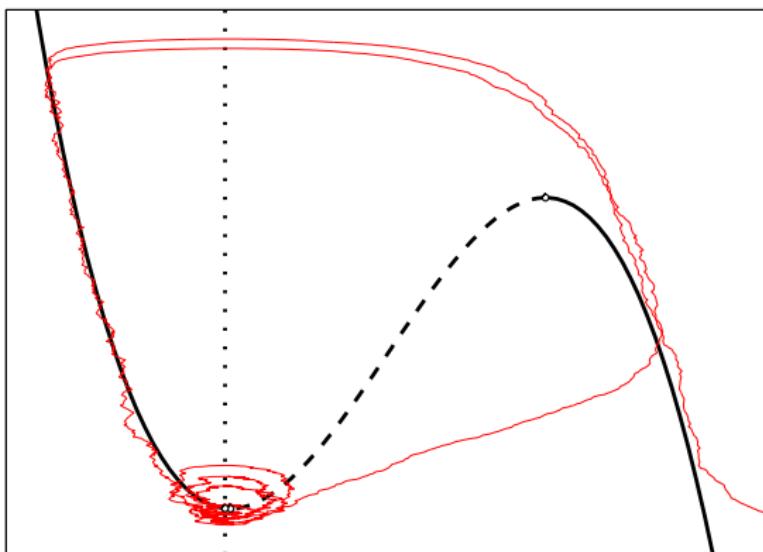


On ne peut pas obtenir une alternance de spikes et de phases au repos

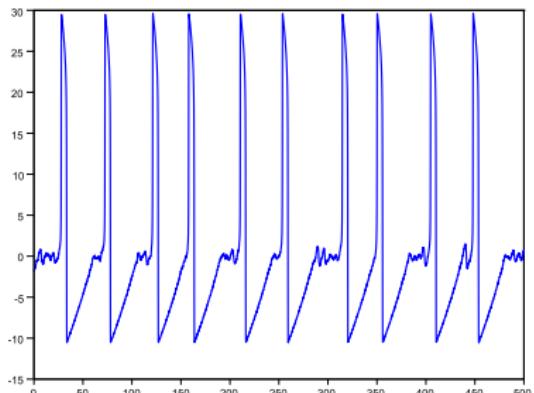
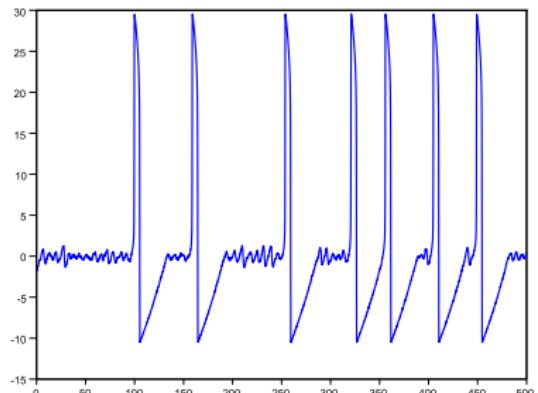
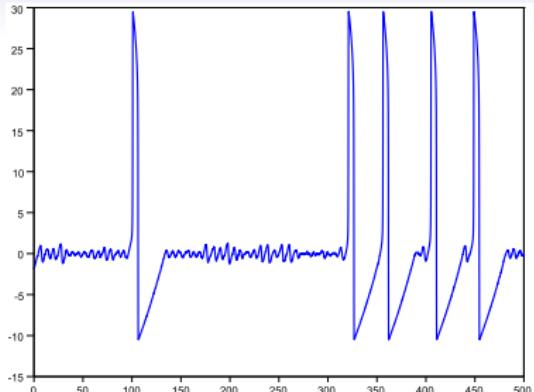
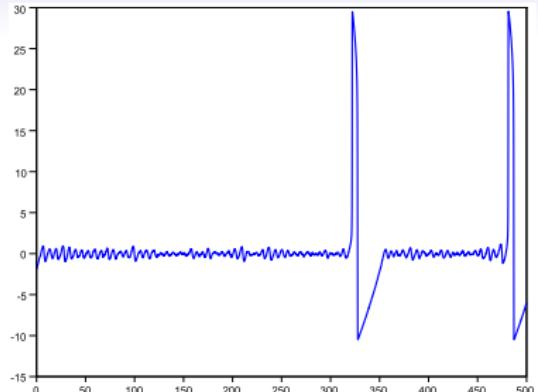
# Et si l'on ajoute une perturbation aléatoire ?

$$\frac{dv}{dt} = v - \frac{1}{3}v^3 - w + \text{bruit} \quad \text{aléa dû aux autres neurones}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{T}(v + a) + \text{bruit} \quad \text{aléa dû aux canaux ioniques}$$



# Oscillations multimodales



Graphes de  $t \mapsto -x_t$  pour  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\delta = 3 \cdot 10^{-3}$ ,  $\sigma = 1.46 \cdot 10^{-4}, \dots, 3.65 \cdot 10^{-4}$

Quelques histoires d'équations de réaction-diffusion ?

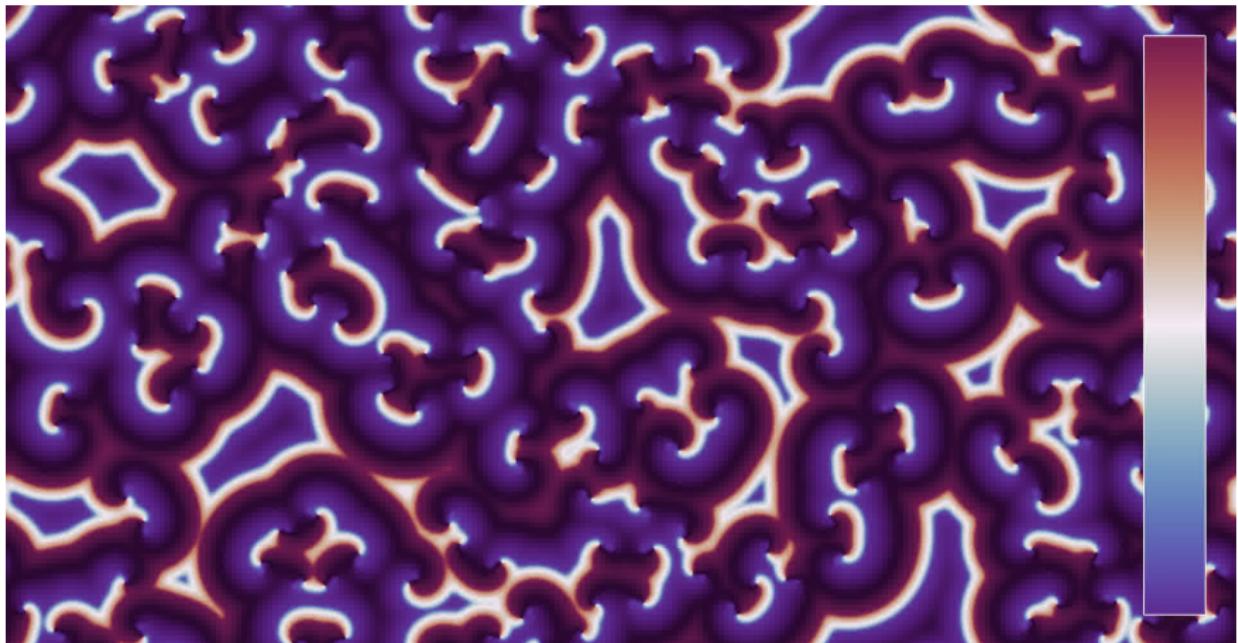
Décembre 2022

32 / 35

# EDP stochastique de FitzHugh–Nagumo

$$\partial_t u = \Delta u + u - u^3 + C(\varepsilon)u + v + \xi^\varepsilon$$

$$\partial_t v = a_1 u + a_2 v$$



(En ligne: <https://youtu.be/8hCSNkhz0mI>)

# Un résultat d'existence

Bruit régularisé :  $\xi^\varepsilon = \varrho_\varepsilon * \xi$

où  $\varrho_\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+2}} \varrho\left(\frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon}\right)$  avec  $\varrho$  de support compact et d'intégrale 1

**Théorème** [NB & C. Kuehn, Elec J Probab 21 (18):1-48 (2016)]

Il existe un choix de constante de renormalisation  $C(\varepsilon)$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(\varepsilon) = \infty$ , tel que

$$\begin{aligned}\partial_t u^\varepsilon &= \Delta u^\varepsilon + [1 + C(\varepsilon)] u^\varepsilon - (u^\varepsilon)^3 + v^\varepsilon + \xi^\varepsilon \\ \partial_t v^\varepsilon &= a_1 u^\varepsilon + a_2 v^\varepsilon\end{aligned}$$

admette une suite de solutions locales  $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ , convergeant en probabilité vers une limite  $(u, v)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

- ▷ Démo basée sur les structures de régularité de Martin Hairer (2014)
- ▷ Solution locale signifie qu'il peut exister un temps d'explosion aléatoire
- ▷ Les conditions initiales doivent être assez régulières
- ▷  $C(\varepsilon) \asymp \log(\varepsilon^{-1})$  pour  $n = 2$  et  $C(\varepsilon) \asymp \varepsilon^{-1}$  pour  $n = 3$

# Pour en savoir plus

- ▷ Articles dans Images des mathématiques :

[https://images.math.cnrs.fr/\\_Berglund-Nils-1343\\_.html?lang=fr](https://images.math.cnrs.fr/_Berglund-Nils-1343_.html?lang=fr)

- ▷ Simulations sur YouTube :

<https://www.youtube.com/c/NilsBerglund>

- ▷ Cette présentation :

[https://www.idpoisson.fr/berglund/ENS\\_22.pdf](https://www.idpoisson.fr/berglund/ENS_22.pdf)