

ENS, Séminaire «Des mathématiques»

Quelques histoires d'équations de réaction–diffusion, sans bruit et avec bruit

Nils Berglund

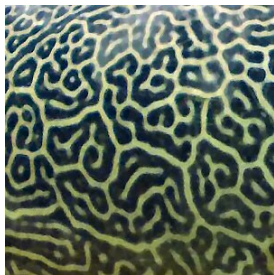
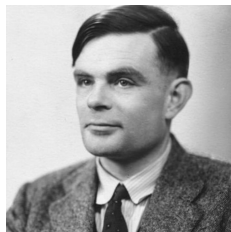
Institut Denis Poisson, Université d'Orléans
CNRS, UMR 7013

<https://www.idpoisson.fr/berglund/>

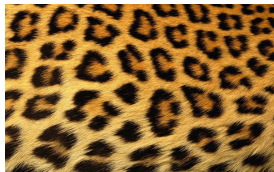
ENS, Décembre 2022

Les équations de réaction–diffusion

- ▷ Article fondateur d'Alan Turing: “The Chemical Basis of Morphogenesis” (1952)
Notion d'instabilité de Turing
- ▷ Applications en chimie (réactions de Belousov–Zhabotinsky), dynamique de populations, pelage d'animaux, répartition spatiale de végétaux, ...



“Giant pufferfish”



Léopard

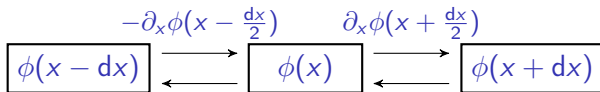


Végétation (Niger)

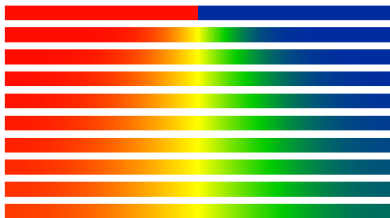
L'équation de la chaleur

- ▷ Proposée par **Joseph Fourier** en 1822
- ▷ $\phi(t, x)$: température au temps t et au point x

$$\partial_t \phi(t, x) = \alpha \partial_{xx} \phi(t, x)$$



- ▷ Exemple de solution:



Solutions dans \mathbb{R}

$$\partial_t \phi(t, x) = \partial_{xx} \phi(t, x)$$

$$\phi(0, x) = \phi_0(x) \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{condition initiale}$$

▷ **Principe de superposition:**

La somme de deux solutions est une solution
(modulo cond initiale)

▷ Solutions particulières (**noyau de la chaleur** et ses translatés)

$$\phi_y(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-y)^2/(4t)}$$

Densité d'une **loi normale de moyenne y et variance $2t$**

▷ Solution de condition initiale $\phi(0, x) = \phi_0(x)$:

$$\phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4t)} \phi_0(y) dy$$

Propriété: $\phi(t, \cdot)$ est **plus régulière** que ϕ_0 si $t > 0$

Solutions sur $[0, L]$

$$\partial_t \phi(t, x) = \partial_{xx} \phi(t, x)$$

$$\phi(0, x) = \phi_0(x) \quad x \in [0, L]$$

condition initiale

$$\phi(t, 0) = \phi(t, L) = 0 \quad t \geq 0$$

conditions aux bords

▷ Séparation des variables: $\phi(t, x) = f(t)g(x)$

$$\Rightarrow f'(t)g(x) = f(t)g''(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} = -\lambda$$

▷ Solutions : $g_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, avec $\lambda_n = n^2 \frac{\pi^2}{L^2}$
 $f_n(t) = f_n(0) e^{-\lambda_n t}$

▷ Solution générale : Série de Fourier

$$\phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) e^{-\lambda_n t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

avec $f_n(0)$ donnés par $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \phi_0(x)$

Décroissance de l'énergie

$$\partial_t \phi(t, x) = \partial_{xx} \phi(t, x)$$

▷ Énergie : $E(\phi(t)) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\partial_x \phi(t, x)]^2 dx$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(\phi(t)) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t ([\partial_x \phi(t, x)]^2) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \phi(t, x) \partial_t \partial_x \phi(t, x) dx \\ &= 0 - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_{xx} \phi(t, x) \partial_t \phi(t, x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} [\partial_{xx} \phi(t, x)]^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

▷ L'énergie décroît au cours du temps

L'énergie est constante si et seulement si $\phi(t, x)$ ne dépend pas de x

L'équation de la chaleur sur \mathbb{R}^n

$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) \quad \Delta = \partial_{x_1 x_1} + \cdots + \partial_{x_n x_n}$$

- ▷ Noyau de la chaleur:

$$\phi(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x-y\|^2/(4t)} \phi_0(y) dy$$

- ▷ Avec conditions aux bords de Dirichlet

$\phi(t, x) = 0$ pour $x \in \partial D$, $D \subset \mathbb{R}^n$:

$$\phi(t, x) = \sum_n c_n e^{-\lambda_n t} \phi_n(x)$$

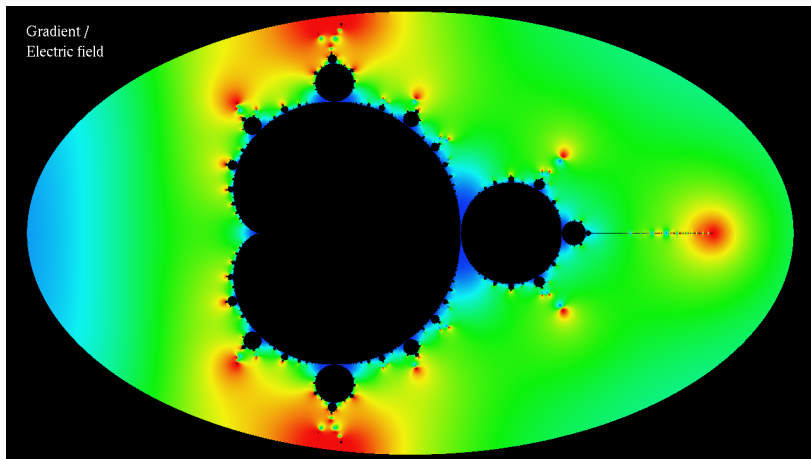
où

$$\begin{aligned} \Delta \phi_n(x) &= -\lambda_n \phi_n(x) & x \in D \\ \phi_n(x) &= 0 & x \in \partial D \end{aligned}$$

et c_n donnés par $\sum_n c_n \phi_n(x) = \phi(0, x)$

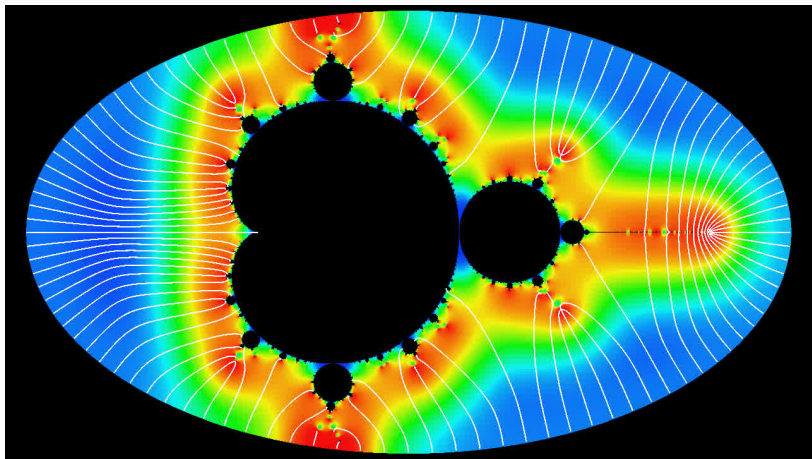
- ▷ Autres conditions aux bords: périodiques, Neumann, Robin, ...

Équation de la chaleur avec bord fractal



(En ligne: <https://youtu.be/8ygy1Nhf0n4>)

Équation de la chaleur avec bord fractal



(En ligne: <https://youtu.be/Yr040XeN14c>)

Équations de réaction–diffusion

$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) + f(\phi(t, x))$$

Existence d'une solution: **formule de Duhamel**

▷ Équation homogène : $\partial_t \phi = \Delta \phi$, $\phi(0, x) = \phi_0(x)$

$$\phi(t, x) = \int \underbrace{K(t, x - y)}_{\text{noyau de la chaleur}} \phi_0(y) dy =: (K(t, \cdot) * \phi_0)(x)$$

▷ **Variation de la constante** : $\phi(t, x) = \int K(t, x - y) \psi(t, y) dy$

$$\phi(t) = K(t, \cdot) * \phi_0 + \int_0^t K(t - s, \cdot) * f(\phi(s)) ds$$

$$\phi(t, x) = \int \left[K(t, x - y) \phi_0(y) + \int_0^t K(t - s, x - y) f(\phi(s, y)) ds \right] dy$$

⇒ **Théorème du point fixe de Banach.**

L'équation d'Allen–Cahn

$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) + \phi(t, x) - \phi(t, x)^3$$

Applications :

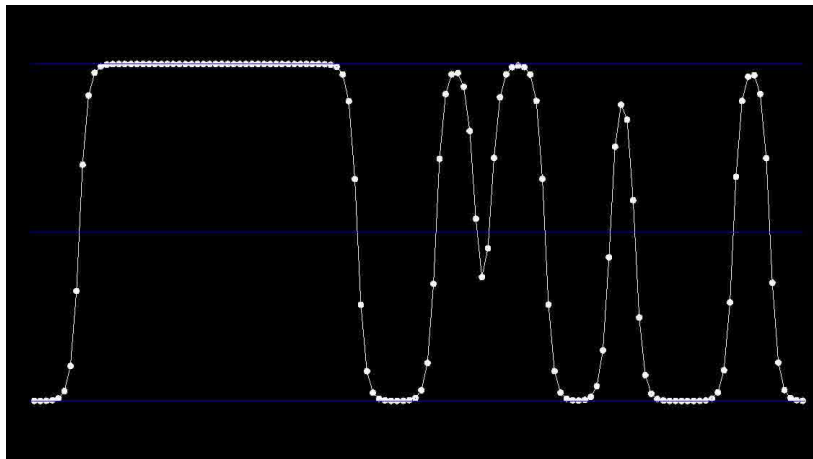
- ▷ Séparation de phases dans un alliage
- ▷ Évolution de l'aimantation dans un matériau ferromagnétique
- ▷ Mayonnaise ratée (approximatif)

Solutions **stationnaires** ($\partial_t \phi = 0$) :

- ▷ $\phi(x) = 0 \quad \forall x$: instable
- ▷ $\phi(x) = 1 \quad \forall x$: stable
- ▷ $\phi(x) = -1 \quad \forall x$: stable
- ▷ Autres solutions non-constantes de $\Delta \phi(x) = -\phi(x) + \phi(x)^3$ (instables)

L'équation d'Allen–Cahn sur le tore \mathbb{T}^1

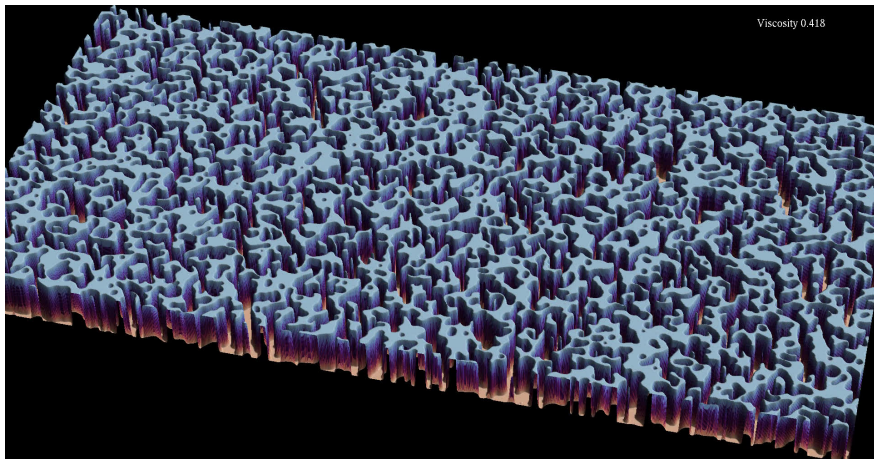
$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) + \phi(t, x) - \phi(t, x)^3$$



(En ligne: <https://youtu.be/NDQHepkSeS8>)

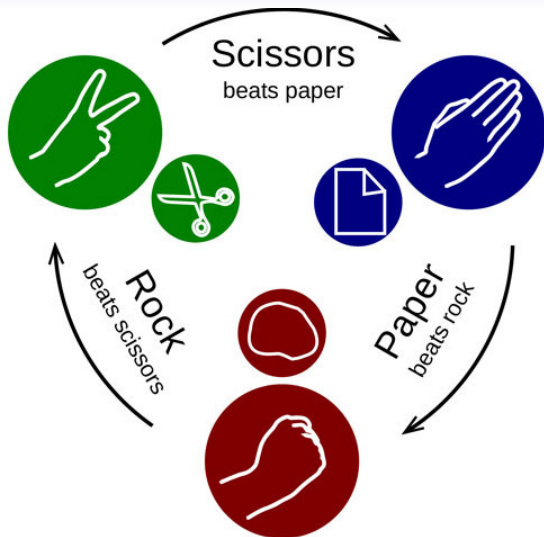
L'équation d'Allen–Cahn sur le tore \mathbb{T}^2

$$\partial_t \phi(t, x) = \alpha(t) \Delta \phi(t, x) + \phi(t, x) - \phi(t, x)^3$$



(En ligne: <https://youtu.be/yXOEAxZHNCQ>)

Pierre–Papier–Ciseaux



Pierre–Papier–Ciseaux

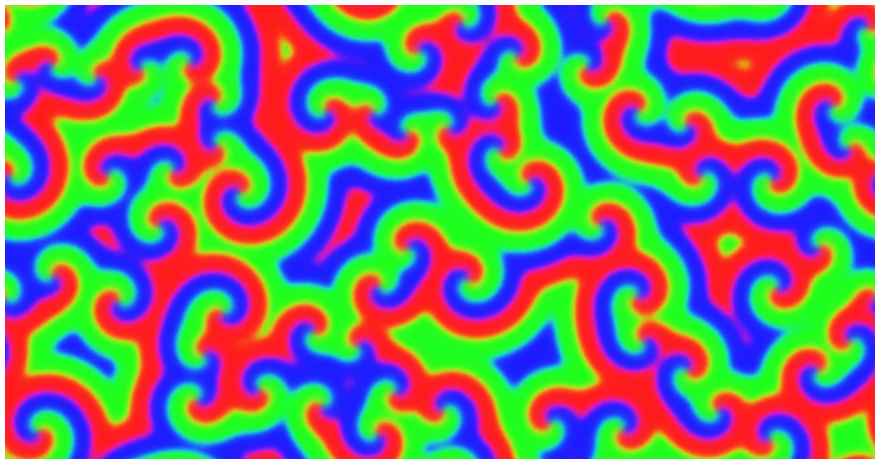
- ▷ Densités de 3 types de molécules : $u(t, x)$, $v(t, x)$, $w(t, x)$
- ▷ Densité totale : $\rho(t, x) = u(t, x) + v(t, x) + w(t, x)$
- ▷ Équation :

$$\partial_t u(t, x) = D\Delta u(t, x) + u(t, x)[1 - \rho(t, x) - av(t, x)]$$

$$\partial_t v(t, x) = D\Delta v(t, x) + v(t, x)[1 - \rho(t, x) - aw(t, x)]$$

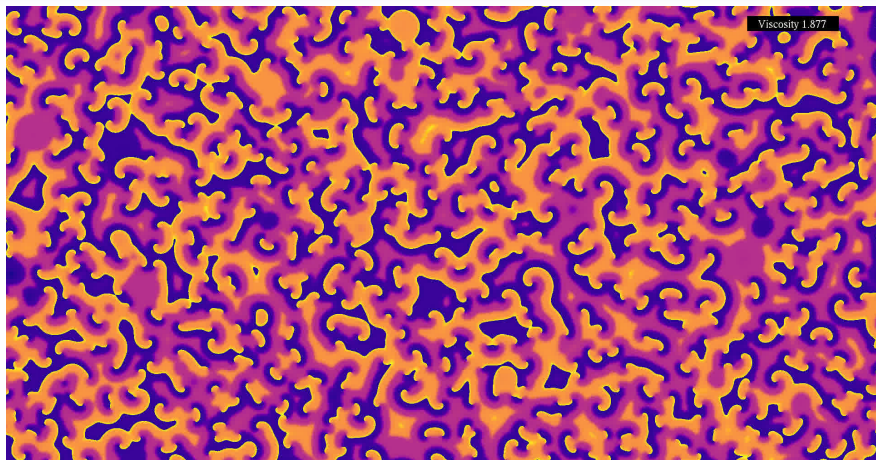
$$\partial_t w(t, x) = D\Delta w(t, x) + w(t, x)[1 - \rho(t, x) - au(t, x)]$$

Pierre–Papier–Ciseaux



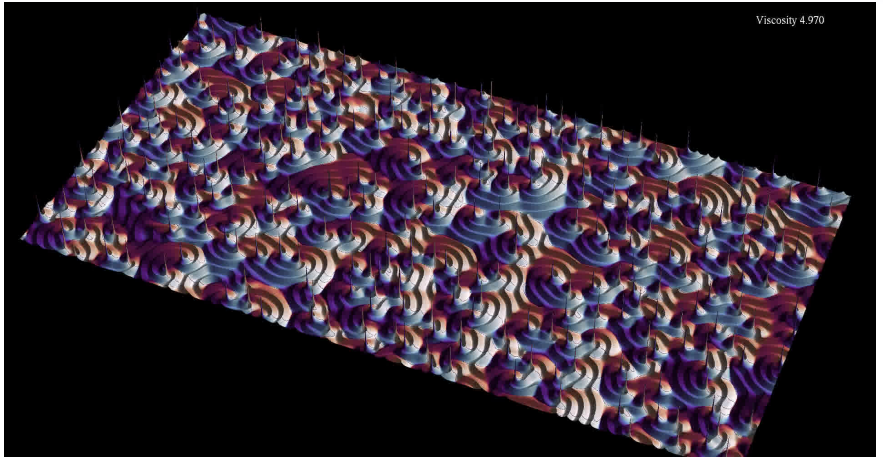
(En ligne: <https://youtu.be/TORwMc2AaRE>)

Pierre–Papier–Ciseaux



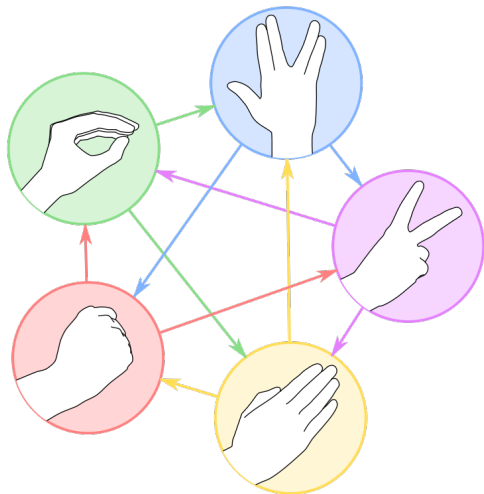
(En ligne: <https://youtu.be/QcxpZKWbLd4>)

Pierre–Papier–Ciseaux



(En ligne: <https://youtu.be/bsEGkyJudKA>)

Pierre–Papier–Ciseaux–Lézard–Spock



Par Nojhan – Travail personnel, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8680554>

Pierre–Papier–Ciseaux–Lézard–Spock

- ▷ Densités de 5 types de molécules : $u(t, x)$, $v(t, x)$, $w(t, x)$, $y(t, x)$, $z(t, x)$
- ▷ Densité totale : $\rho = u + v + w + y + z$
- ▷ Équation :

$$\partial_t u = D\Delta u + u[1 - \rho - av - by]$$

$$\partial_t v = D\Delta v + v[1 - \rho - aw - bz]$$

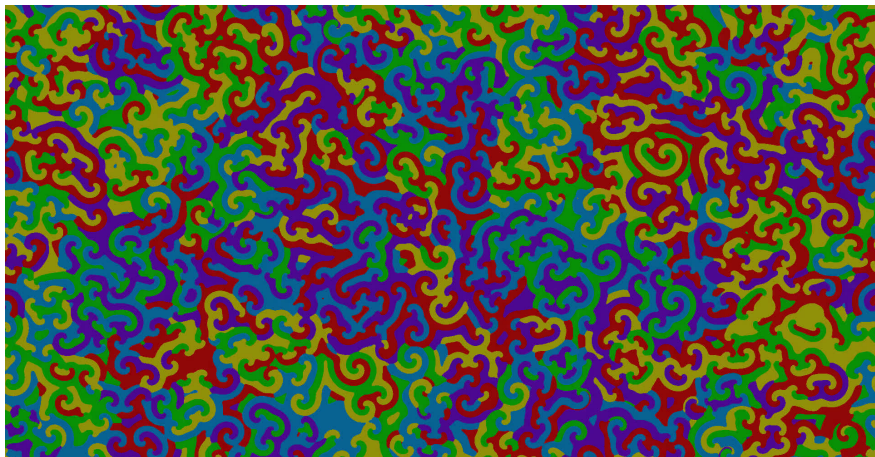
$$\partial_t w = D\Delta w + w[1 - \rho - ay - bu]$$

$$\partial_t y = D\Delta y + y[1 - \rho - az - bv]$$

$$\partial_t z = D\Delta z + z[1 - \rho - au - bw]$$

Pierre–Papier–Ciseaux–Lézard–Spock

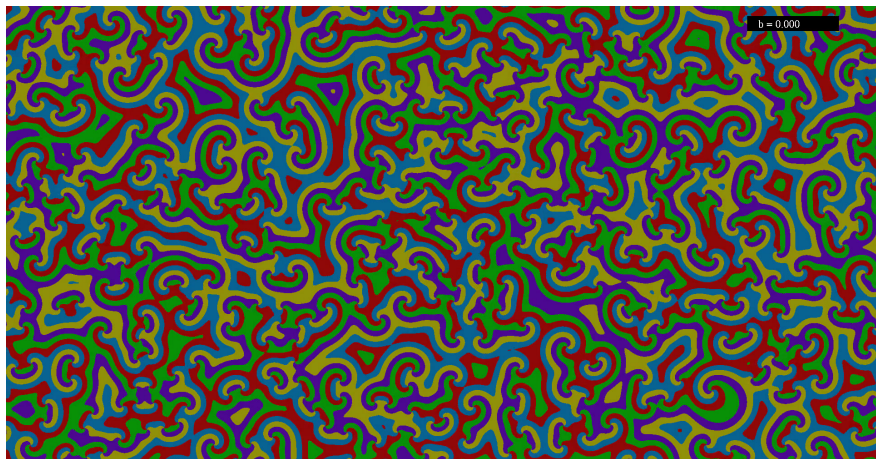
Cas symétrique $a = b = 0.75$



(En ligne: https://youtu.be/-Qap_7skcIA)

Pierre–Papier–Ciseaux–Lézard–Spock

Version non symétrique, $a = 0.75$, $b = b(t)$



(En ligne: <https://youtu.be/cioB22z7A9A>)

EDPs stochastiques

$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) + f(\phi(t, x)) + \sigma \xi(t, x)$$

- ▷ $\xi(t, x)$: bruit blanc espace-temps
Gaussien, centré, covariance $\mathbb{E}[\xi(t, x)\xi(s, y)] = \delta(t - s)\delta(x - y)$
- ▷ ξ : distribution définie par
 $\langle \xi, \varphi \rangle = W_\varphi \sim \mathcal{N}(0, \|\varphi\|_{L^2}^2)$, $\mathbb{E}[W_\varphi W_{\varphi'}] = \langle \varphi, \varphi' \rangle_{L^2}$
- ▷ Pour $x \in \mathbb{T}^n$, ξ admet une «régularité de Hölder» $\alpha = -\frac{n+2}{2}$
- ▷ On appelle convolution stochastique la solution de l'équation linéaire

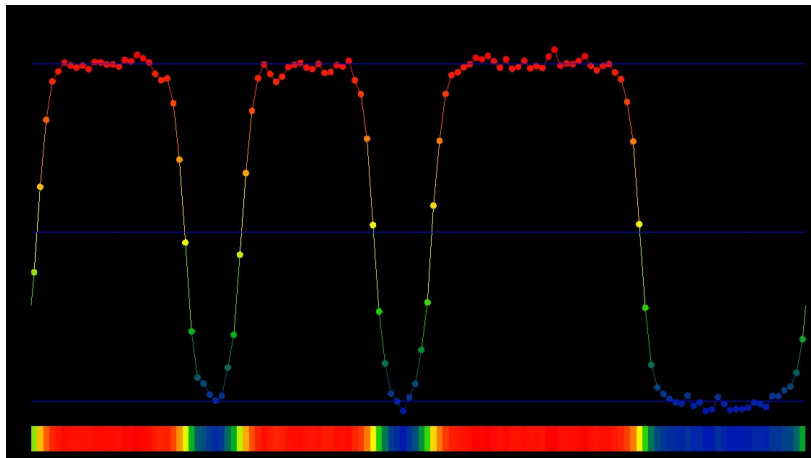
$$\partial_t \psi(t, x) = \Delta \psi(t, x) + \sigma \xi(t, x)$$

Sa régularité est $\alpha + 2 = \frac{2-n}{2}$

- ▷ **Conséquence:**
 - ◇ Si $n = 1$, l'argument de point fixe est applicable, impliquant l'existence de solutions
 - ◇ Si $n \geq 2$ une procédure de renormalisation est nécessaire

L'équation d'Allen–Cahn sur le tore \mathbb{T}^1 avec bruit

$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) + \phi(t, x) - \phi(t, x)^3 + \sigma \xi(t, x)$$



(En ligne: <https://youtu.be/yX0EAxZHNCQ>)

Renormalisation d'EDPs stochastiques singulières

$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) + \phi(t, x) - \phi(t, x)^3 + \xi(t, x), \quad x \in \mathbb{T}^n$$

- ▷ $n = 1$: L'argument du point fixe fonctionne
- ▷ $n = 2$: Soit $\xi^\varepsilon = \varrho^\varepsilon * \xi$ une régularisation du bruit à l'échelle ε où $\varrho^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+2}} \varrho\left(\frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon}\right)$

Équation **renormalisée** :

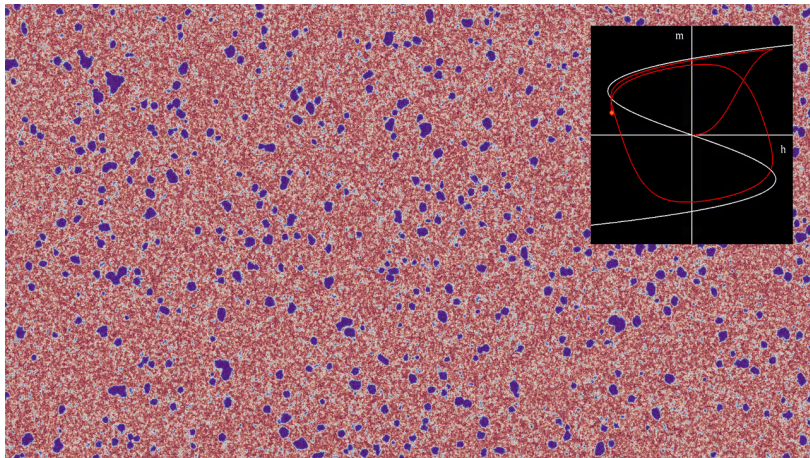
$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) + \phi(t, x) - \phi(t, x)^3 - C(\varepsilon) \phi(t, x) + \xi^\varepsilon(t, x)$$

En 2003, **Giuseppe Da Prato** et **Arnaud Debussche** montrent que pour un $C(\varepsilon)$ d'ordre $\log(1/\varepsilon)$, $\phi - \psi$ (où ψ : **convolution stochastique**) converge lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ (dans certains **espaces de Besov**)

- ▷ $n = 3$: En 2013, **Martin Hairer** (Médaille Fields 2014) met au point la théorie des **structures de régularité**
Celle-ci implique la convergence pour $C(\varepsilon) \sim c_1/\varepsilon + c_2 \log(1/\varepsilon)$
- ▷ $n = 4$: En 2020, **Michael Aizenmann** et **Hugo Duminil-Copin** (Médaille Fields 2022) obtiennent un résultat de **trivialité**, qui montre qu'on ne peut pas renormaliser l'équation

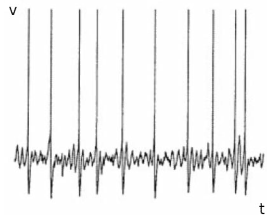
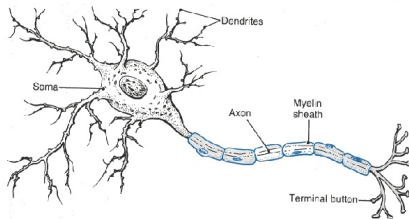
Équation d'Allen–Cahn forcée périodiquement

$$\partial_t \phi(t, x) = \Delta \phi(t, x) + \phi(t, x) - \phi(t, x)^3 - C(\varepsilon) \phi(t, x) + \underbrace{A \cos(\varepsilon t) + \sigma \xi^\varepsilon(t, x)}_{h(\varepsilon t)}$$



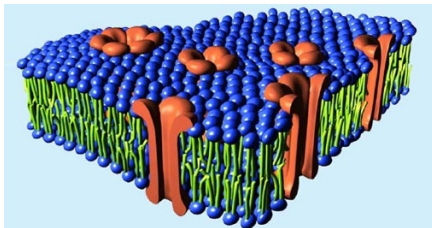
(En ligne: <https://youtu.be/yXOEAxZHNCQ>)

Neurones



Potentiel d'action

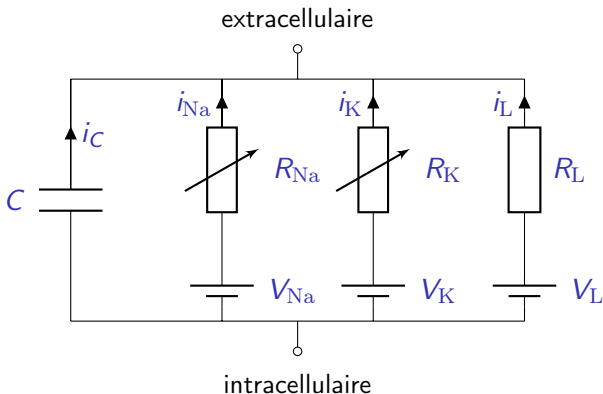
- ▷ **Spike**: Pic temporaire du potentiel d'action
- ▷ **Canal ionique**: Orifice laissant passer des ions à travers la membrane



La membrane du neurone fonctionne un peu comme un **circuit électrique**

Neurone: le modèle de Hodgkin–Huxley (1952)

Prix Nobel de médecine en 1963 (partagé avec Sir John Carew Eccles)



R_K et R_{Na} dépendent du nombre de canaux ioniques ouverts de 3 types
L'évolution au cours du temps de ces nombres dépend de v
(de manière compliquée)

Le modèle de FitzHugh–Nagumo (1961)

Modèle simplifié à un type de canal

v potentiel de membrane

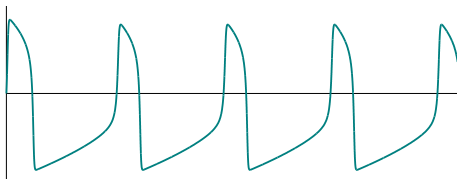
w nombre de canaux ouverts

$$\frac{dv}{dt} = v - \frac{1}{3}v^3 - w + I$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{T}(v + a - bw)$$

Se réduit à l'oscillateur de Van der Pol (1920) si $a = b = I = 0$

Richard FitzHugh (~1960)

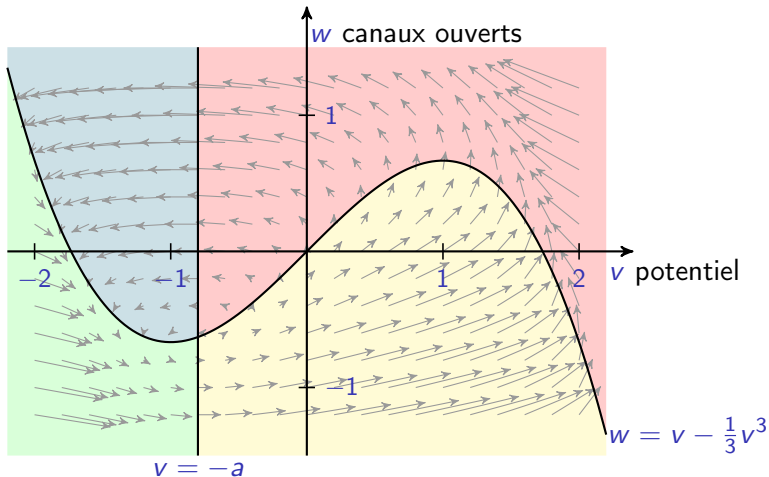


Approche géométrique

cas $b = l = 0$

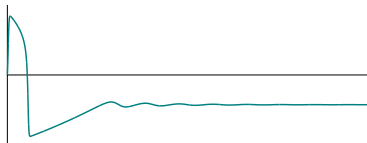
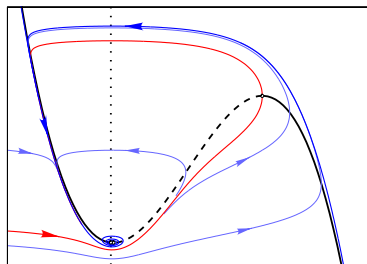
$$\frac{dv}{dt} = v - \frac{1}{3}v^3 - w$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{T}(v + a)$$

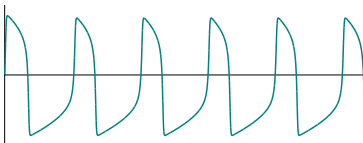
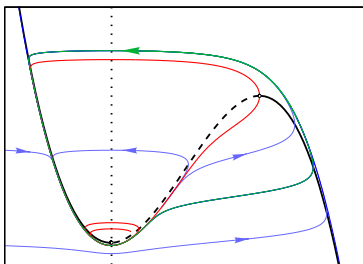


Les deux régimes du modèle FHN

Oscillation amortie



Oscillation de relaxation

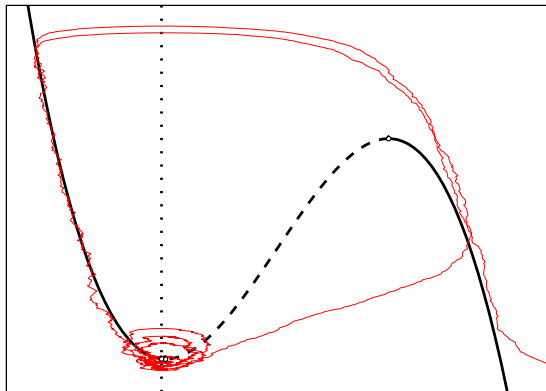


On ne peut pas obtenir une alternance de spikes et de phases au repos

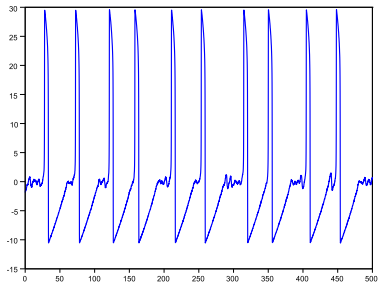
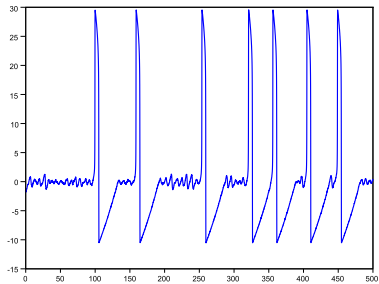
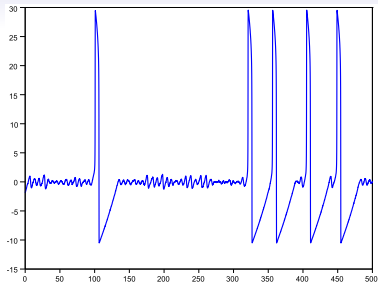
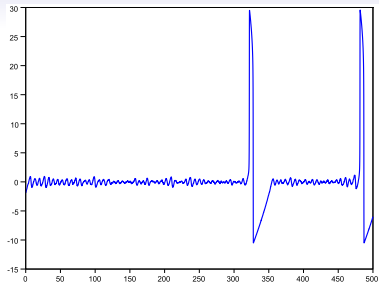
Et si l'on ajoute une perturbation aléatoire ?

$$\frac{dv}{dt} = v - \frac{1}{3}v^3 - w + \text{bruit} \quad \text{aléa dû aux autres neurones}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{T}(v + a) + \text{bruit} \quad \text{aléa dû aux canaux ioniques}$$



Oscillations multimodales

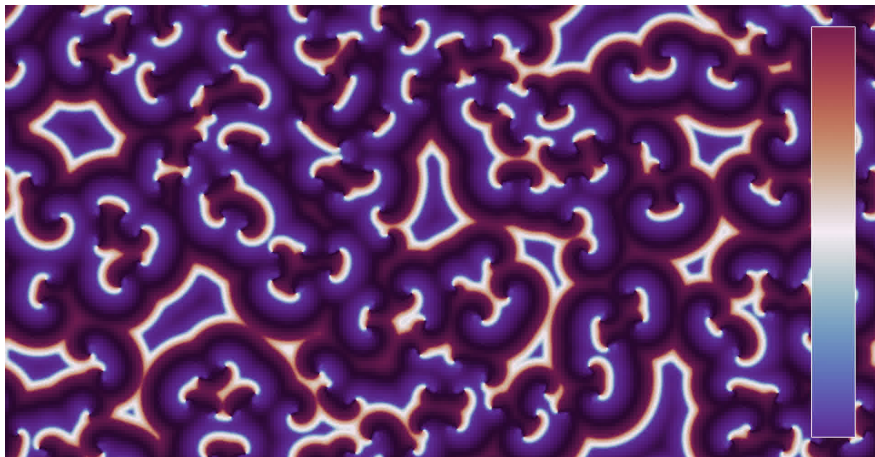


Graphes de $t \mapsto -x_t$ pour $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 3 \cdot 10^{-3}$, $\sigma = 1.46 \cdot 10^{-4}, \dots, 3.65 \cdot 10^{-4}$

EDP stochastique de FitzHugh–Nagumo

$$\partial_t u = \Delta u + u - u^3 + C(\varepsilon)u + v + \xi^\varepsilon$$

$$\partial_t v = a_1 u + a_2 v$$



(En ligne: <https://youtu.be/8hCSNkhz0mI>)

Un résultat d'existence

Bruit régularisé : $\xi^\varepsilon = \varrho_\varepsilon * \xi$

où $\varrho_\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+2}} \varrho\left(\frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ avec ϱ de support compact et d'intégrale 1

Théorème [NB & C. Kuehn, Elec J Probab 21 (18):1-48 (2016)]

Il existe un choix de constante de renormalisation $C(\varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(\varepsilon) = \infty$, tel que

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta u^\varepsilon + [1 + C(\varepsilon)]u^\varepsilon - (u^\varepsilon)^3 + v^\varepsilon + \xi^\varepsilon$$

$$\partial_t v^\varepsilon = a_1 u^\varepsilon + a_2 v^\varepsilon$$

admette une suite de solutions locales $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$, convergeant en probabilité vers une limite (u, v) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

- ▷ Démo basée sur les structures de régularité de Martin Hairer (2014)
- ▷ Solution locale signifie qu'il peut exister un temps d'explosion aléatoire
- ▷ Les conditions initiales doivent être assez régulières
- ▷ $C(\varepsilon) \asymp \log(\varepsilon^{-1})$ pour $n = 2$ et $C(\varepsilon) \asymp \varepsilon^{-1}$ pour $n = 3$

Pour en savoir plus

- ▷ Articles dans Images des mathématiques :

https://images.math.cnrs.fr/_Berglund-Nils-1343_.html?lang=fr

- ▷ Simulations sur YouTube :

<https://www.youtube.com/c/NilsBerglund>

- ▷ Cette présentation :

https://www.idpoisson.fr/berglund/ENS_22.pdf