

Une approche "mécanique statistique" aux structures de régularité près du seuil de sous-criticalité

Avec Christian Kuehn (Munich), c.f. arXiv/1701.03066, J. Stat. Phys (2017)

But: étudier $\partial_t u = \underbrace{-(-\Delta)^{\beta/2}}_{=: \Delta^{\beta/2}} u + f(u) + \xi$

- $u = u(t, x) \quad t \geq 0 \quad x \in \mathbb{T}^d$
- $f(u)$ polynôme de degré N
- $-(-\Delta)^{\beta/2} =: \Delta^{\beta/2}$ Laplacien fractionnaire
- ξ bruit blanc espace-temps: $\langle \xi, \varphi \rangle$ v.a. gaussienne centrée
 $E(\langle \xi, \varphi_1 \rangle \langle \xi, \varphi_2 \rangle) = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$

Cas $\beta=2, N=3$: $\partial_t u = \Delta u - u^3 + \xi$ (modèle Φ^4)

Thm: $d \in \{2, 3\}$ $\partial_t u = \Delta u - u^3 + C(\varepsilon)u + \xi^\varepsilon \leftarrow$ bruit "mollifié"
admet une sol. (locale) cv vers une limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$

$d=2$: [Da Prato & Debussche (2003)] $C(\varepsilon) \sim \log(\varepsilon^{-1})$

$d=3$: [Hairer (2014), Catellier & Chouk, Kupiainen] $C(\varepsilon) = C_1 \varepsilon^{-1} + C_2 \log(\varepsilon^{-1}) + C_3$

Pourquoi faut-il renormaliser ?

$(\partial_t - \Delta)u = h \quad \Rightarrow \quad u = G * h$

$(\partial_t - \Delta)u = f(u) + \xi \quad \Rightarrow \quad u = G * \xi + \underbrace{G * f(u)}_{\Delta}$

⚠ si $G * \xi$ distribution

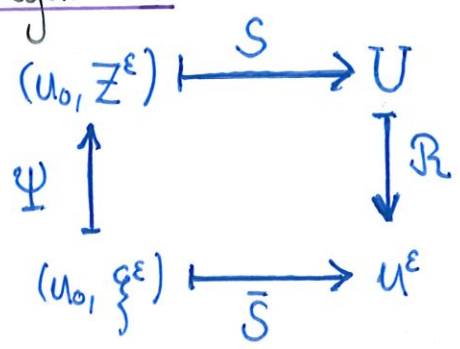
Espaces de Hölder \mathcal{C}^α :

- $f: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$:
- $0 < \alpha < 1$: $|f(y) - f(x)| \leq C |y - x|^\alpha$
 - $\alpha > 1$: $f' \in \mathcal{C}^{\alpha-1}$ ⚠ $\nRightarrow |f(y) - f(x)| \leq C |y - x|^\alpha$
 - $\alpha < 0$: $\langle f, \eta \rangle = -\langle g, \eta' \rangle \quad g \in \mathcal{C}^{\alpha+1}$

Espaces \mathcal{C}_s^α , $s = (2, 1, \dots, 1)$: $|y - x| \rightarrow |t - s|^{1/2} + \sum_{i=1}^d |y_i - x_i|$

Faits: $\left. \begin{array}{l} \cdot \xi \in \mathcal{C}_s^\alpha \quad \forall \alpha < -\frac{d+2}{2} \\ \cdot f \in \mathcal{C}_s^\alpha, \alpha \notin \mathbb{Z} \Rightarrow G * f \in \mathcal{C}_s^{\alpha+2} \end{array} \right\} \Rightarrow G * \xi \in \mathcal{C}_s^\alpha \quad \forall \alpha < 1 - \frac{d}{2}$

Structures de régularité:



Eq. de point fixe pour S: $U = \mathcal{I}(\Xi - U^3) + \varphi 1 + \text{termes polynomiaux}$

$U_0 = 0$

$U_1 = \mathcal{I}(\Xi) + \varphi 1 \quad U_1^3 = \mathcal{I}(\Xi)^3 + 3\varphi \mathcal{I}(\Xi)^2 + 3\varphi^2 \mathcal{I}(\Xi) + \varphi^3 1 + \dots$

$U_2 = \mathcal{I}(\Xi) - \mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)^3) - 3\varphi \mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)^2) - 3\varphi^2 \mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)) + \varphi 1 + \dots$

$= \mathcal{I} - \Psi - 3\varphi \Psi - 3\varphi^2 \Psi + \varphi 1 + \dots$

expts: $1 - \frac{d}{2} \quad 3(1 - \frac{d}{2}) + 2 \quad 2(1 - \frac{d}{2}) + 2 \quad 1 - \frac{d}{2} + 2 \quad 0$

Sous-criticité: l'exposant de Hölder (homogénéité) des symboles est borné inf

Cas du Laplacien Fractionnaire:

$G_\beta(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} e^{-t \|\xi\|^\beta} d\xi$ noyau d'un processus de Lévy

Faits faciles à vérifier:

1) $\beta = (\beta, 1, \dots, 1) \Rightarrow G_\beta$ est régularisant d'ordre β : $\left. \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}_\beta^\alpha \\ \alpha \in \beta \oplus \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow G_\beta * f \in \mathcal{C}_\beta^{\alpha+\beta}$

2) $\xi \in \mathcal{C}_\beta^\alpha \quad \forall \alpha < -\frac{\beta+d}{2}$

3) $\partial_t u = \Delta^{\beta/2} u + \underbrace{F(u)}_{\text{degré } N} + \xi$ est loc. sous-critique $\Leftrightarrow \beta > \beta_c = d \frac{N-1}{N+1}$

dém: $|\Xi|_\xi = \alpha_0 = -\frac{\beta+d}{2} - \alpha$

$|\mathcal{I}(\Xi)^N|_\xi = N(\alpha_0 + \beta) = \frac{N}{2}(\beta - d) - N\alpha$

$> \alpha_0 \Leftrightarrow \beta > \beta_c$

Espace modèle: $U = \mathcal{I}(\Xi + F(U)) + \varphi 1 + \dots$

$$\begin{cases} W_0 = \emptyset \\ U_0 = \emptyset \end{cases} \quad \begin{cases} W_m = W_{m-1} \cup U_{m-1} \cup \dots \cup U_{m-1}^N \cup \{\Xi\} \\ U_m = \mathcal{I}(W_m) \cup \{X^k\} \end{cases}$$

$$AB := \{\tau \bar{z}, \tau \in A, \bar{z} \in B\}$$

$\mathcal{F}_F = \bigcup_{m \geq 0} (W_m \cup U_m)$ symboles représentant l'équation
 $U_F = \bigcup_{m \geq 0} U_m$ symboles représentant la solution

$$A_F = \{\tau \in \mathcal{F}_F\}$$

But: caractériser $\begin{cases} h_F := \#(A_F \cap \mathbb{R}_-) \\ c_F := \#\{\tau \in \mathcal{F}_F : |\tau|_g < 0\} \end{cases}$

Thm: $\frac{\beta+d}{N+1} \frac{1}{\beta-\beta_c} \leq h_F(N, d, \beta) \leq 1 + \frac{(\beta+d)dN}{N+1} \frac{1}{\beta-\beta_c}$

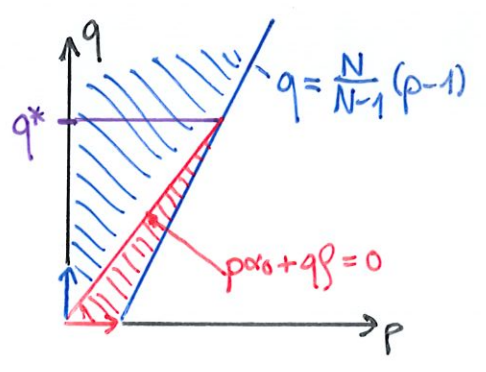
dém: $|\tau|_g = p\alpha_0 + q\beta + |k|_g$
 $\alpha_0 = -\frac{\beta+d}{2} - x$

où $\begin{cases} p(\tau) = \#\Xi \\ q(\tau) = \#\mathcal{I} \\ k(\tau) = \text{exposant termes polynomiaux} \end{cases}$

$$U \subset \mathcal{F}_F \Rightarrow D_0(U) = \{(p(\tau), q(\tau)) : \tau \in U\} \subset \mathbb{N}^2$$

$D_0(U^n) = \text{enveloppe convexe de } n D_0(U) \cap \mathbb{N}^2$

- Alors:
- $\lim_{m \rightarrow \infty} D_0(U_m) = \text{cône tronqué}$
 - $|\tau|_g < 0 \Rightarrow p = 1 + \lfloor \frac{N-1}{N} q \rfloor$
 - $h_F = \# \text{ points dans } \triangle$
 $\sim q^* = \frac{(\beta+d)N}{(N+1)(\beta-\beta_c)} + O(x)$



□

Thm: $C_N^- (\beta-\beta_c)^{3/2} e^{\beta Nd/(\beta-\beta_c)} \leq c_F(N, d, \beta) \leq C_N^+ (\beta-\beta_c)^{3/2} e^{\beta Nd/(\beta-\beta_c)}$

N=2: $\tau \rightarrow \text{arbre de degré } \leq 3$
 $d_i := \# \text{ sommets de degré } i \Rightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 + d_3 = q+1 \\ d_1 + 2d_2 + 3d_3 = 2q \end{cases} \quad d_1 = p+1 \text{ degré } = 1$

Prop: $q = 2n \Rightarrow \text{arbre binaire à } q+1 \text{ sommets}$
 $q = 2n+1 \Rightarrow \text{arbre binaire à } q+2 \text{ sommets moins une arête}$

⚠ $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n \Rightarrow$ on cherche le nombre d'arbres à homéomorphisme près.

W_n = nombre d'arbres binaires enracinés à n feuilles
= nombre de Wedderburn-Etherington

$W_n \approx C_2 \frac{(\alpha_2^{-1})^n}{n^{3/2}}$ $\alpha_2 \approx 0.4027$ [R. Otter, 1948]

$\beta_2 = \frac{8}{9} \log(\alpha_2^{-1}) \approx 0.8085063$

$\beta_N = \frac{2N^2}{(N+1)^2} \log(\alpha_N^{-1})$ □

Propriétés statistiques: $\Omega = \{\tau \in \mathcal{F}_F : |\tau|_F < \infty\}$ $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 $\mathbb{P} =$ proba uniforme

X	Moments	Grandes déviations
Q = #I $\mathbb{P}(Q \in N) \leq e^{-N/(p-p_c)}$	$\mathbb{E}\left(\frac{Q}{q^*}\right) = 1 + O(p-p_c)$ $\text{Var}\left(\frac{Q}{q^*}\right) = O((p-p_c)^2)$	$-\lim_{p \rightarrow p_c} (p-p_c) \log \mathbb{P}\left(\frac{Q}{q^*} \leq x\right)$ $= \beta_N d(1-x)$
H = $ \tau _F$	$\mathbb{E}(H) = O(p-p_c)$ $\text{Var}(H) = O((p-p_c)^2)$	$-\lim_{p \rightarrow p_c} (p-p_c) \log \mathbb{P}(H \leq h)$ $= \frac{N+1}{N} \beta_N(-h)$
$D_j = \frac{d_j}{Q+1}$	$\mathbb{E}(D) = \left(\frac{N-1}{N}, 0, \dots, 0, \frac{1}{N}\right)$ $+ (O(p-p_c), O(e^{-N/(p-p_c)}), \dots)$ $\text{Var}(D_j) = O((p-p_c)^2)$ $j=1, N-1$ $\text{Var}(D_N) = O(e^{-N/(p-p_c)})$ etc	
H hauteur ($N=2$) D diamètre [Broutin & Flajolet]	$\mathbb{E}(\sqrt{p-p_c} H) = \frac{4\sqrt{\pi d}}{32 \alpha_2} + O(p-p_c)$ $\mathbb{E}(\sqrt{p-p_c} D) = \frac{16\sqrt{\pi d}}{9 \alpha_2} + O(p-p_c)$ $\text{Var}((p-p_c) H) = \text{const} + O(p-p_c)$...	