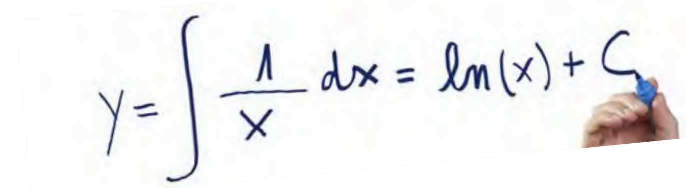
Dossier spécial

Les mathématiques s'avèrent être bien souvent un moyen d'investigation dans des domaines ou des lieux inaccessibles à l'homme et aux machines. Leur contribution à la recherche de solutions à des problèmes mondiaux comme les catastrophes naturelles, les changements climatiques, le développement durable ou la santé, est primordiale. Des laboratoires de la circonscription, par les travaux interdisciplinaires auxquels ils participent, apportent un grand nombre d'éléments de réponse.

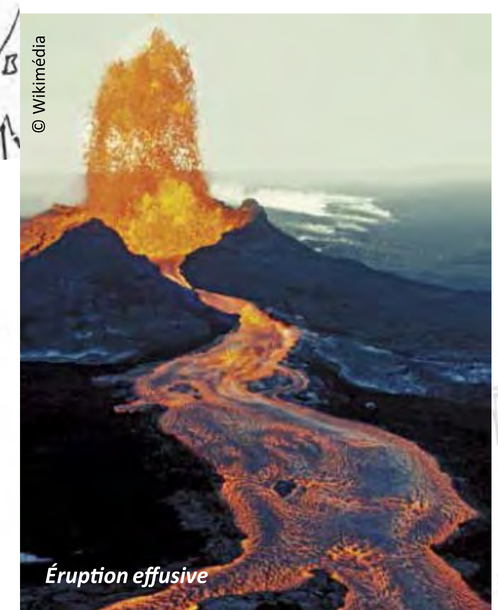


Quand les volcans coincent la bulle...

La compréhension des mécanismes éruptifs est à la base de la prévention des risques liés aux volcans ainsi que de l'étude de la construction de la croûte terrestre.

Les éruptions volcaniques sont classées en deux catégories: les effusives et les éruptives. Les premières se caractérisent par l'émission séparée de magma et de gaz, le magma formant un dôme ou une coulée de lave, le gaz étant doucement dispersé dans l'atmosphère. Les secondes, au contraire, se distinguent par la fragmentation du magma et la propulsion brutale dans l'atmosphère de gaz pressurisés et de morceaux de lave. La plupart des volcans produisent des éruptions du même type. Toutefois, il y a des exemples (comme la Soufrière de Montserrat, Caraïbes) où les deux types d'éruption se manifestent. Ce phénomène ne peut donc pas seulement s'expliquer par la chimie du magma contenu dans le volcan. D'autres facteurs doivent entrer en jeu.

La communauté de géophysique estime que la classe d'une éruption est liée à la façon dont les bulles des gaz, contenues dans le magma et nucléés en profondeur, grossissent et coalescent* pendant la remontée du conduit. Il est supposé que si cette coalescence des bulles permet de construire un chemin vers la surface à travers lequel le gaz peut s'échapper, l'éruption serait du type effusif ; alors que si ce chemin ne se forme pas, le magma dans le conduit arrive en surface sursaturé par le gaz resté emprisonné et une éruption explosive en suit. La chimie du magma, la présence de bulles de gaz en son sein et la façon dont ces bulles se comportent jouent un rôle déterminant dans le type d'éruption.



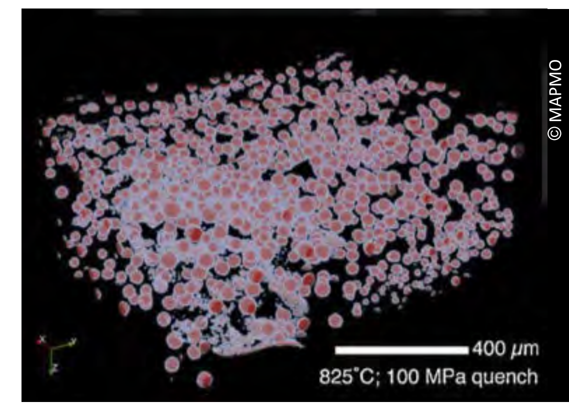
Éruption effusive

Modélisation mathématique

Ces dernières années, des géophysiciens et des mathématiciens ont uni leurs connaissances pour écrire un modèle mathématique qui puisse décrire la croissance des bulles par décompression, diffusion et coalescence. La complexité du processus physique les a amenés tout d'abord à étudier la seule croissance par décompression et diffusion en partant du modèle de référence dans la communauté géophysique qui date des années 80 et qui a été repris ces dernières années. Il décrit, par un système d'équations non- linéaires, la croissance d'une seule bulle représentative en considérant que toutes les bulles évoluent de la même façon. Une analyse mathématique et numérique du modèle a permis sa simplification et la définition de taux de croissance en volume et masse de la bulle. Ceci a ensuite porté à la description statistique/cinétique de l'évolution d'un ensemble de bulles grossissant par décompression, diffusion et coalescence par une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est la fonction distribution des bulles définie sur des variables non standard (la masse et le volume).

La prise en compte de la coalescence a demandé plus de réflexion avec tout d'abord la compréhension du mécanisme physique qui régit la coalescence des bulles. Par rapport aux travaux connus sur la coalescence des particules, les bulles dans le conduit volcanique n'ont pas une position spatiale ni une vitesse relative, mais peuvent coalescer seulement grâce au rapprochement de leur parois. La détermination d'un taux de coalescence physiquement adapté à cette situation a abouti à l'écriture d'un modèle de coalescence multi-dimensionnelle, posant ainsi d'inté-

Population des bulles ayant coalescé, *à une pression ambiante de 40MPa.*



(*) les poches de gaz se forment à partir de petites bulles de gaz, comme la pluie se forme par coalescence à partir de gouttelettes.

ressantes questions mathématiques.
Le modèle mathématique incluant la croissance et coalescence des bulles est maintenant mis à l'épreuve. Les premières comparaisons avec les résultats expérimentaux sont tout à fait satisfaisantes et demandent la réalisation de nombreuses expériences pour une validation plus complète.

Ce travail inter-disciplinaire montre que la mise en commun des différentes cultures et formations scientifiques permet non seulement d'avancer dans la compréhension de phénomènes naturels qui nous entourent, mais aussi de faire évoluer la théorie mathématique.

Simona MANCINI < MAPMO
Simona.Mancini@univ-orleans.fr

Explosion d'une bulle de gaz formée à partir de millions de bulles plus petites.

© MAPMO

Éviter que les petits ruisseaux ne deviennent de grandes rivières

Les inondations et les coulées boueuses peuvent avoir un impact important sur les habitations et les voies de circulations. Mieux savoir les modéliser pourrait permettre d'installer des aménagements, tels que des bandes enherbées, afin de limiter les conséquences des événements à venir.

Le constat était que, afin d'aménager au mieux les terrains pour prévenir des inondations, il est nécessaire de savoir mieux modéliser le ruissellement. En effet, les logiciels utilisés actuellement au niveau décisionnel ne donnent pas entière satisfaction, car, en particulier, les prévisions fournies peuvent être assez éloignées de la réalité. Le but de la collaboration avec l'unité de recherche Science du Sol (INRA Val de Loire Orléans) a donc été de modéliser plus précisément le ruissellement de l'eau sur une surface agricole, sans prendre en compte l'érosion dans un premier temps.

***Le ruissellement de l'eau à la surface du champ** a érodé le sol et arraché des plants.*

© F. DARBOUX

La modélisation du ruissellement

Le ruissellement entre dans la catégorie des écoulements de faible profondeur, puisque les hauteurs d'eau sont très faibles (quelques millimètres) par rapport aux dimensions horizontales considérées (supérieures à 10 mètres). Les équations qui régissent de tels écoulements sont les équations de Saint-Venant, équations qui relient entre elles la hauteur d'eau et la vitesse de l'écoulement, en fonction des différents paramètres physiques comme la pente ou les frottements à la surface du sol.

Outre les difficultés liées aux mesures de certains paramètres, il est en général impossible de trouver une solution exacte à ces équations. Aussi, le travail des mathématiciens consiste à développer des méthodes numériques les résolvant de manière approchée. C'est ainsi qu'a été développé le logiciel FullSWOF, reposant sur des méthodes numériques adaptées et efficaces.

La prise en compte des sillons sans les représenter

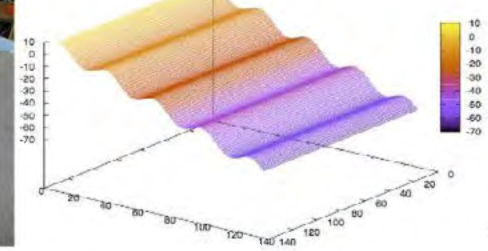
Lorsque l'on cherche à simuler le ruissellement dans un champ de plusieurs hectares, il est impossible de prendre une résolution suffisamment grande pour représenter chaque sillon. Cela supposerait de cartographier le champ avec une résolution de quelques centimètres, ce qui est quasi inatteignable au niveau de la mesure, mais qui, de toutes façons, serait trop coûteux du point de vue numérique.

Avec le logiciel FullSWOF, il a été possible de prendre en compte les sillons agricoles sans les représenter explicitement. Pour cela, un terme de type « frottement » qui ralentit l'eau de la même façon que les sillons, a été ajouté. Ce frottement est fonction de la taille des sillons via la quantité d'eau qui peut être stockée dans un sillon.Après avoir développé le logiciel pour le ruissellement, les mathématiciens s'intéressent à la modélisation de l'érosion des sols. Ce phénomène complexe demande d'étudier simultanément les particules mises en suspension, transportées et déposées. Il sera nécessaire de modéliser chaque partie du phénomène comme par exemple l'impact des gouttes de pluie sur l'érosion.

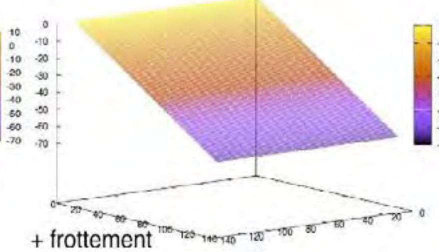
Carine LUCAS < MAPMO
Carine.Lucas@univ-orleans.fr

$$y = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$$

***Mesures sur des sillons** réalisées en laboratoire.*

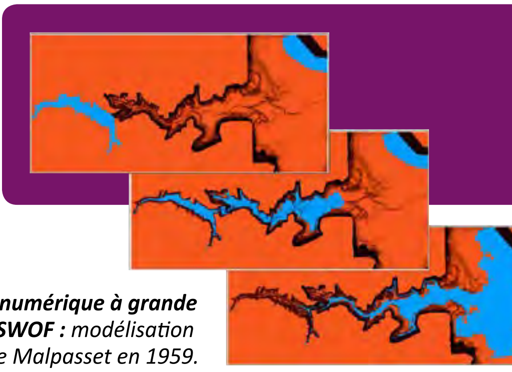


***Topographie** représentant les sillons.*



***Topographie plane** à laquelle on ajoute un frottement pour tenir compte de l'existence de sillons.*

© MAPMO



*Un exemple de **simulation numérique à grande échelle** effectuée avec **FullSWOF** : modélisation de la rupture du barrage de Malpasset en 1959.*

© MAPMO

Statistiques et énergies renouvelables

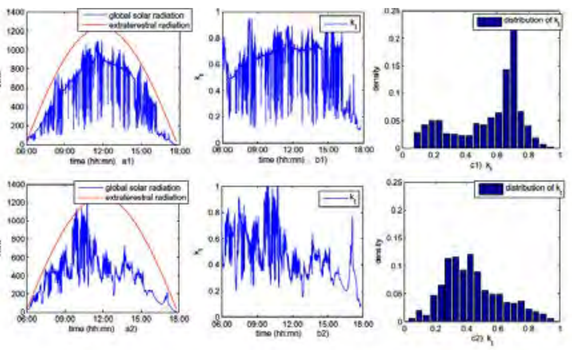
Le domaine des énergies renouvelables, où les ressources sont très aléatoires et intermittentes, est un champ d'application intéressant pour la théorie des probabilités et les méthodes statistiques.

© Thinkstock®

La demande croissante en énergie et la prise de conscience écologique a redonné plus d'importance aux énergies dites renouvelables : énergie d'origine solaire, éolienne, hydraulique, thermique ou végétale. La part de ces énergies dans le parc énergétique reste cependant en deçà des objectifs annoncés, pour plusieurs raisons : choix politiques, rentabilité, difficultés technologiques, mais surtout caractère hautement aléatoire et intermittent des ressources .

Des ressources et énergies aléatoires et intermittentes

Le domaine des énergies renouvelables est un champ d'application intéressant pour la théorie des probabilités et les méthodes statistiques. Pour un lieu et un jour donnés, le rayonnement solaire sous ciel clair ou rayonnement extra-terrestre (extraterrastral solar radiation), suit une courbe connue. Ce rayonnement est rendu très aléatoire par le passage des nuages, les conditions météorologiques et la réflexion du rayonnement des objets environnants, c'est le rayonnement solaire global. L'indice de clarté (clearness index) kt est le quotient



Indice de clarté et histogramme de ses valeurs pour deux journées.

du rayonnement global par le rayonnement extra-terrestre.
Si est appelée séquence, une suite d'observations entre deux instants, on observe le caractère intermittent des séquences : chutes et pics se succèdent. L'énergie induite par une séquence, qui est l'intégrale de la séquence, est donc elle aussi aléatoire et intermittente. Concernant l'énergie éolienne, chacun a eu l'occasion d'observer que la direction du vent et son module sont aléatoires et intermittents. Il en est de même pour l'énergie hydrolienne. La maîtrise des énergies renouvelables nécessite donc l'utilisation des techniques de probabilités et de statistiques.

La classification de séquences

Regrouper en un nombre fini de classes homogènes, des séquences observées pendant un même intervalle de temps, permet d'établir des séquences types et permet aussi de faciliter la modélisation et la prédiction sur cet intervalle pour les séquences d'une même classe. Cela est d'autant plus intéressant que l'on ne change pas de classe pendant plusieurs journées consécutives.

Certaines méthodes de classification utilisent une notion de distance entre séquences, distance qu'on est amené à choisir. D'autres partent d'une analyse en composantes principales (ACP) des séquences. Enfin on peut aussi ne s'intéresser qu'aux valeurs prises par les séquences et classifier les histogrammes par une estimation de mélanges de lois de Dirichlet. La convergence (consistence) de la classification, quand le nombre de tranches de l'histogramme augmente, se démontre à l'aide du théorème des martingales et d'un théorème sur les processus de Dirichlet.

L'intérêt de la modélisation

Décrire les courbes observées à l'aide de modèles probabilistes est une tâche très délicate mais elle présente plusieurs intérêts comme évidemment la prédiction de l'énergie dont on pourrait disposer entre deux instants. Un deuxième intérêt, moins connu, est qu'un modèle adéquat améliore considérablement la conception des convertisseurs (panneaux solaires, éoliennes, ...).

Par exemple, à partir d'un modèle probabiliste, on peut simuler par ordinateur de nombreuses séquences de vents pour régler les composantes électroniques des éoliennes grâce à un programme d'optimisation. Le processus du module du vent a été modélisé par des séries temporelles et par le Mouvement Brownien Multifractionnaire, un processus plus irrégulier que le Mouvement Brownien. L'index de clarté de séquences courtes a été modélisé par une EDS (équation différentielle stochastique) et celui d'une séquence journalière par une EDS en milieu aléatoire [9], où le milieu qui représente l'aléa due à l'environnement est modélisé par une chaîne de Markov à temps continu. Enfin des modèles de séries spatio-temporelles ont été utilisés pour prédire, à partir de quelques points de mesure, le rayonnement solaire au voisinage de ces points. Cela permet d'établir une cartographie du rayonnement solaire sans avoir besoin d'effectuer des mesures en tout point.

Richard EMILION < MAPMO
richard.emilion@univ-orleans.fr

Le climat et ses aléas

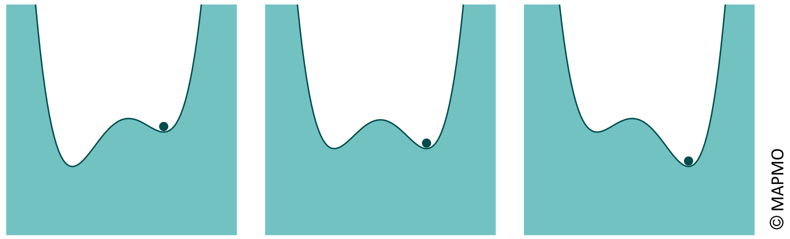
L'évolution du climat de la Terre est difficile à prédire en raison du nombre gigantesque de variables impliquées. Même les modèles numériques les plus sophistiqués représentent l'atmosphère, les océans et les continents de manière forcement discrétisée, en spécifiant des valeurs de la température, la pression, la vitesse du vent, etc, moyennées sur des volumes de plusieurs kilomètres cube.

Au lieu d'ignorer simplement les erreurs d'approximation, il peut être préférable de simuler leur effet par un terme aléatoire qu'on appelle un bruit. Il existe plusieurs modèles mathématiques de bruit, le mieux connu étant le bruit blanc gaussien. Mais il y en a de nombreux autres : bruits corrélés, processus de Levy,... Choisir un bruit approprié est un problème difficile de modélisation. En première approximation, on retient souvent le bruit blanc, plus facile à contrôler mathématiquement.
L'effet le plus dramatique du bruit est de produire des transitions entre des états qui seraient stables en son absence. Or des transitions relativement abruptes entre régimes climatiques stables ont eu lieu par le passé, comme le révèlent les données paléoclimatiques obtenues par l'étude de différents indicateurs (appelés proxies) tels que les carottes glacières et des dépôts sur les fonds marins. Ces transitions sont-elles dues à l'effet du bruit ?

L'exemple le plus connu de transition climatique est celui des glaciations. Pendant le dernier million d'années, la Terre a connu dix glaciations majeures, entrecoupées à intervalles assez réguliers, de périodes plus clémentes, environ tous les 90 000 ans. Selon la théorie proposée par James Croll au 19ème siècle et développée par Milutin Milankovitch dans la première moitié du 20ème siècle, la périodicité serait due à des variations des paramètres de l'orbite terrestre, en particulier son excentricité, qui influencent l'insolation moyenne. Toutefois les variations d'insolation semblent trop faibles pour expliquer les transitions entre glaciations et périodes de climat tempéré.

Au début des années 1980, deux groupes de chercheurs ont proposé indépendamment que les transitions étaient facilitées par l'effet d'un bruit. Ce phénomène, appelé résonance stochastique, peut s'illustrer à l'aide d'un exemple très simple : supposons que l'évolution de la température moyenne soit régie par une équation différentielle, admettant deux valeurs stables qui correspondent aux périodes de glaciation et de climat tempéré. On peut visualiser la dynamique de la température en l'assimilant à la position d'une bille dans un potentiel à deux puits. La profondeur des puits varie périodiquement sous l'effet des paramètres orbitaux, mais sans permettre de transition entre régimes climatiques.

$$y = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C$$



Position d'une bille dans un potentiel à 2 puits.

En ajoutant un terme de bruit dans l'équation différentielle, on s'aperçoit que les transitions entre puits de potentiel deviennent possibles. La distribution de probabilité des temps de transition dépend des paramètres du système : amplitude et fréquence de forçage périodique et intensité du bruit. Pour une amplitude de forçage nulle, les temps de transition sont distribués de manière exponentielle. A mesure que l'amplitude de forçage augmente, les transitions deviennent de plus en plus régulières.
Le calcul de la loi des temps de transition, même pour ce modèle relativement simple, est un problème mathématiquement non trivial. Il peut néanmoins être résolu, pour des intensités faibles du bruit, à l'aide d'outils d'analyse stochastique. On obtient une distribution exponentielle modulée périodiquement, la modulation étant liée à la loi dite de Gumbel.

Il existe de nombreux autres exemples de transitions critiques dans le système climatique, affectant par exemple la circulation thermohaline Nord-Atlantique (le Gulf Stream), la banquise Antarctique, ou la désertification. Une meilleure compréhension de l'effet d'un bruit sur ces transitions aidera à mieux prédire les variations climatiques futures.

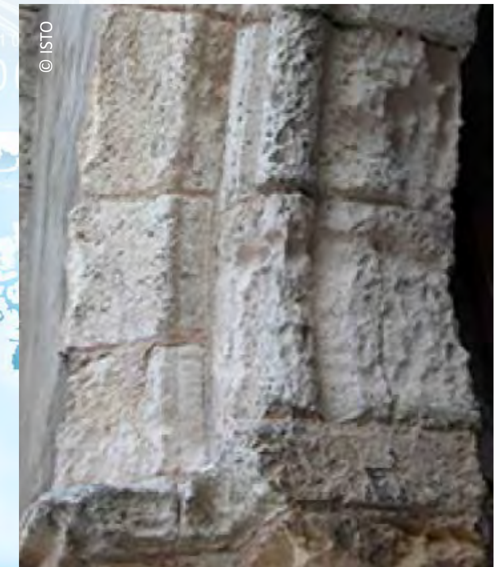
Nils BERGLUND < MAPMO
Nils.Berglund@univ-orleans.fr

L'imagerie mathématique au secours des monuments dégradés

Les moyens d'imagerie actuels permettent d'ausculter l'intérieur des pierres mise en œuvre dans la construction de monuments historiques. Les techniques d'analyse mathématique extraient ensuite des images obtenues des informations sur la structure des matériaux altérés au fil du temps.

La protection du patrimoine

Les monuments historiques subissent l'action de leur environnement et sont dégradés, voire fortement endommagés. Ces ouvrages sont des parties intégrantes de notre patrimoine et constituent des œuvres d'art irremplaçables qu'il convient de protéger, d'entretenir et de réparer. C'est pourquoi une communauté variée (architectes, restaurateurs, géologues, physiciens, mathématiciens) met en commun ses efforts pour préserver ce patrimoine. L'objectif est d'obtenir une description à toutes les échelles des processus de diffusion de l'eau dans les réseaux poreux des pierres utilisées pour la construction des monuments historiques.
L'analyse s'est focalisée sur une pierre sédimentaire, le tuffeau, utilisée dans de nombreux monuments historiques le long de la vallée de la Loire. Ces pierres extrêmement poreuses (40 à 50% de vide) sont composées principalement de calcite (40 à 70%) et de silice (20 à 60%) sous forme de quartz (grains) et d'opale (sphérules).



© ISTO

Une forme d'altération observée sur ***un monument de la ville d'Orléans (45, Loiret).***

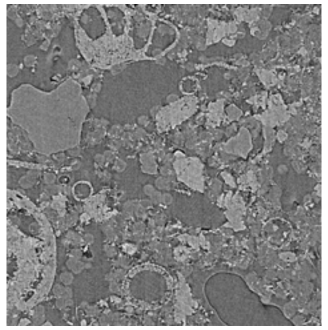
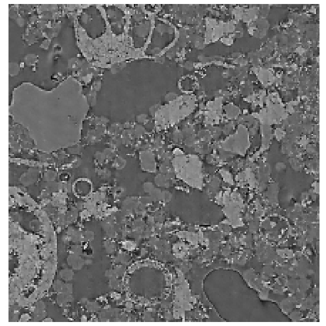


Image originale.



© MAPMO

Image débruitée.

Dans ce contexte, il s'agit de déterminer par analyse d'images 3D, à l'échelle du micromètre, les modifications minéralogiques et structurales du tuffeau dues à des phénomènes d'altération. Les mathématiciens disposent d'images de micro tomographie X obtenues par l'Institut des Sciences de la Terre d'Orléans (ISTO – UMR 7327 CNRS/ Université d'Orléans/BRGM), pour identifier la forme et la structure 3D des phases poreuses et solides. Une difficulté particulière toutefois : les images présentent des contours et des régions mal définies du fait de la porosité de la roche. La structure microporeuse du tuffeau se traduit par des éléments de texture qu'il convient d'analyser et de restaurer. Le but final de l'étude est d'identifier le milieu et de le reconstruire en 3D. Le domaine ainsi reconstitué servira de fondation à une modélisation physico-chimique des transferts hydriques dans le matériau. Dans la perspective de la modélisation des transferts de fluide et de masse dans le réseau poreux du matériau, la connaissance de la structure, la morphologie et la minéralogie des pierres est une étape primordiale. Cet objectif peut être atteint en procédant à l'analyse des images tridimensionnelles obtenues par micro-tomographie X.

Un modèle mathématique de décomposition d'image

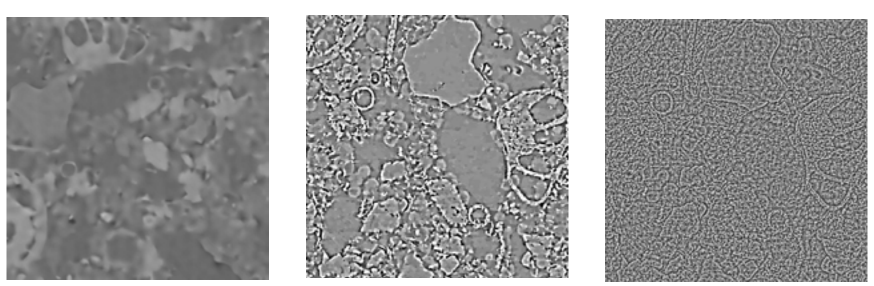
Les images de micro-tomographie X sont des images en niveaux de gris, présentant plusieurs régions correspondant aux différentes phases de la pierre. L'analyse d'images de milieux aussi complexes nécessite des méthodes qui préservent au maximum l'information originale.

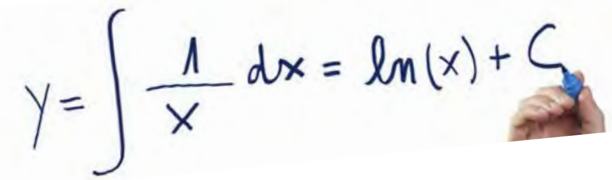
Le modèle mathématique utilisé décompose les images en différentes composantes (calques) qui appartiennent chacune à des espaces mathématiques différents, « ciblant » donc des caractéristiques différentes de l'image. Plus précisément, l'image est décomposée en un calque qui capte la dynamique générale (remédiant aux éventuels problèmes d'éclairage), une partie captant les contours (ou les macro-textures) et une composante isolant le bruit et/ou les micro-textures. Le modèle fournit ainsi une méthode de débruitage non destructive et des informations morphologiques sur la structure de la roche. A cela s'ajoute le réglage de différentes échelles via des paramètres. De cet ensemble naît une description précise du vide à l'intérieur de la pierre, en 3D.

L'objectif est de comprendre et prédire l'influence de la structure d'un milieu poreux désordonné sur l'écoulement d'un fluide imprégnant le matériau. La reconstitution précise du milieu 3D va permettre d'utiliser des modèles de transfert hydrique pour décrire complètement le phénomène d'érosion de la pierre. C'est un travail sur le long terme qui va mobiliser physiciens et mathématiciens

Maïtine BERGOUNIOUX < MAPMO
Maitine.Bergounioux@univ-orleans.fr
http://www.univ-orleans.fr/MAPMO

Décomposition de l'image





Penser global – Agir local, la théorie du contrôle en écologie et agronomie

Gérer les écosystèmes naturels et agronomiques au plus près, afin de préserver les services écosystémiques et de promouvoir une agriculture durable, implique le développement et l'utilisation de nouveaux outils mathématiques capables de représenter une réalité complexe.

© Source AGROO

Les processus écologiques sont dynamiques dans le temps et l'espace. Les contrôler implique par conséquent des perturbations temporelles ou spatiales. Les études sur le contrôle temporel des populations, par application de pesticides contre des insectes, champignons ou mauvaises herbes, ou par augmentation de la quantité de nourriture pour les oiseaux en hiver par exemple, sont légions. L'étude du contrôle spatial des populations est par contre très récente, les premiers travaux datant des années 90.

Un contrôle judicieux et parcimonieux

On distingue le contrôle intrinsèque, comme celui des prédateurs sur les proies, du contrôle forcé lorsque l'homme intervient, par exemple en favorisant l'établissement de pollinisateurs en établissant des bandes enherbées le long des champs comme lieux de nourriture et d'abris privilégiés. L'idée même d'utiliser le contrôle spatial consiste à déterminer les conditions spatiales menant à un contrôle efficace sur l'ensemble d'une surface : les caractéristiques idéales de l'emplacement du contrôle sont déterminées en se basant sur les phénomènes de diffusion. Selon la valeur des paramètres, le contrôle peut finalement se propager sur l'ensemble de l'espace, tout comme un tapis qui se déroulerait de lui-même.

Penser spatialement conduit donc à utiliser le contrôle, quel qu'il soit, de manière judicieuse et parcimonieuse, ce qui est souhaitable écologiquement et économiquement. Un domaine d'applications écologiques qui connaît des avancées majeures est l'établissement de réserves marines, combiné à l'allocation de zones de pêche spatialement ajustées. Les travaux les plus récents démontrent qu'il est possible, en définissant des zones de protection totale et des zones de capture, d'augmenter non seulement les stocks de poissons, qui ont tendance à aller de manière privilégiée dans les zones de refuges, mais également les tonnages pêchés, dès lors où les zones de pêche sont contigües.

Vers une boîte à outils mathématiques

L'étude du contrôle temporel des ravageurs par la lutte biologique – l'utilisation d'ennemis naturels tels que les coccinelles contre les pucerons- en utilisant la théorie du contrôle optimal est récente. Des équations différentielles à « impulsions » sont généralement utilisées, car elles prennent en compte la continuité temporelle du contrôle par les prédateurs ainsi que la nature discontinue des mesures appliquées, tels que les lâchers. Il reste passablement des travaux en mathématiques appliquées à développer sur les systèmes hybrides avant que ces équations fassent partie d'une boîte à outils facilement utilisable par les biologistes et les agronomes.

> *« ...aucune des études conduites à ce jour n'a considéré le contrôle spatial... »*

Dans l'exemple de la lutte contre la mineuse du marronnier, le contrôle de cet insecte a