

Introduction à la renormalisation BPHZ

Mini-cours,
Nancy, 9-11/10/19

- [Bogoliubov, Parasiuk 57], [Hepp 66], [Zimmerman 69]: QFT
- [Chandra, Hairer 16], [Bruned, Hairer, Zambotti 19]: EDPS
- [Hairer 18]: "An analyst's take on the BPHZ theorem"
- [Berglund, Bruned 19]: arXiv/1907.13028

1. Le problème: diagrammes de Feynman (du vide)

$\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, v^*)$ (multi)-graphe orienté fini, v^* sommet distingué

$K: \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ noyau \mathcal{C}^∞ support compact

Exemples: • $K = \Delta^{-1} \cdot \chi$ Δ^{-1} : fct de Green du Laplacien

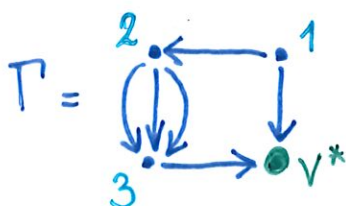
$$\Delta^{-1}(x) \sim \begin{cases} \log \|x\| & d=2 \\ \|x\|^{-d+2} & d \geq 3 \end{cases}$$

χ : "cut-off" \mathcal{C}^∞ $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \|x\| \leq 1 \\ 0 & \|x\| \geq 2 \end{cases}$

• $K = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\|x\|^2/(4t)} \cdot \chi$ noyau de la chaleur

Question: Estimer $\prod_K(\Gamma) = \int_{\Lambda} \prod_{v \in \mathcal{V}^*} \prod_{e \in \mathcal{E}} K(x_{e_+} - x_{e_-}) dx$
 $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$
 $x_{v^*} = 0$

Exemple:



$$\prod_K(\Gamma) = \int_{\Lambda^3} K(-x_1) K(x_2 - x_1) K(x_3 - x_2)^3 K(-x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

Rem: $\begin{cases} x_1 = -\bar{x}_1 \\ x_2 = x_1 + \bar{x}_2 \\ x_3 = x_1 + \bar{x}_3 \end{cases} \Rightarrow \prod_K(\Gamma) = \prod_K(\bar{\Gamma})$

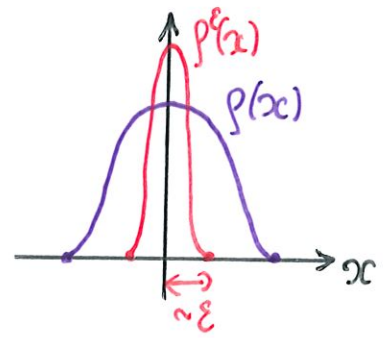


Réponse: "souvent" $\Pi_K(\Gamma) = \infty$

Solution: on remplace K par $K^\varepsilon = K * \rho^\varepsilon$

$$\rho^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$\rho \in \mathcal{C}^\infty \text{ support compact } \int \rho(x) dx = 1$$



On s'attend à $\Pi_K(\Gamma) \sim \varepsilon^{-\alpha}$ (ou $\log(\varepsilon^{-1})$). But: trouver α

2. Exemples simples et une conjecture

• $\Gamma = \bullet \longrightarrow$ avec $K(x) \lesssim \frac{1}{\|x\|^\alpha} \Rightarrow K^\varepsilon(x) \lesssim \frac{1}{(\|x\| + \varepsilon)^\alpha}$

dém: • $\|x\| \geq 2\varepsilon$: $K^\varepsilon(x) = \int K(x-y) \rho_\varepsilon(y) dy$ (↑) ε ∞

$$K \rho_\varepsilon \neq 0 \Rightarrow \|y-x\| \geq \frac{1}{2} \|x\|$$

$$|K^\varepsilon(x)| \lesssim \frac{2^\alpha}{\|x\|^\alpha} \int \rho_\varepsilon(y) dy \sim \frac{1}{\|x\|^\alpha}$$

• $\|x\| \leq 2\varepsilon$: $K^\varepsilon(x) = \int K(y) \rho_\varepsilon(x-y) dy$ (↑) ε x

$$\lesssim \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \int_{\|y\| \leq 3\varepsilon} \frac{dy}{\|y\|^\alpha} \sim \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \int_0^\varepsilon \frac{r^{d-1}}{r^\alpha} dr \sim \frac{1}{\varepsilon^\alpha}$$

$$|\Pi_{K^\varepsilon}(\Gamma)| \lesssim \int_0^1 \frac{r^{d-1}}{(r+\varepsilon)^\alpha} dr \sim \int_\varepsilon^1 \frac{r^{d-1}}{r^\alpha} dr \sim \begin{cases} \varepsilon^{d-\alpha} & \alpha > d \\ \log(\varepsilon^{-1}) & \alpha = d \\ 1 & \alpha < d \end{cases}$$

• $\Gamma = \bullet \overbrace{\longrightarrow \longrightarrow \dots \longrightarrow}^n$

$$\Pi_{K^\varepsilon}(\Gamma) = \int_{\Lambda^n} K^\varepsilon(z_1) K^\varepsilon(z_2 - z_1) \dots K^\varepsilon(z_n - z_{n-1}) dz_1 \dots dz_n \sim \varepsilon^{n(d-\alpha)} \quad (\alpha > d)$$

• $\Gamma = \text{diagram}$ $\Pi_{K^\varepsilon}(\Gamma) = \int_{\Lambda^\varepsilon} K^\varepsilon(z_1)^n dz_1 \sim \int_0^1 \frac{r^{d-1}}{(r+\varepsilon)^{n\alpha}} dr$
 $\sim \int_\varepsilon^1 \frac{dr}{r^{n\alpha-d+1}} \sim \varepsilon^{d-n\alpha} \quad (n\alpha > d)$

Conjecture: Soit $\deg(\Gamma) = d(|V|-1) - \alpha|\varepsilon|$

Alors $|\Pi_{K^\varepsilon}(\Gamma)| \lesssim \begin{cases} \varepsilon^{\deg \Gamma} & \text{si } \deg \Gamma < 0 \\ \log(\varepsilon^{-1}) & \text{si } \deg \Gamma = 0 \\ 1 & \text{si } \deg \Gamma > 0 \end{cases}$

Problème: Conjecture fausse à cause de sous-divergences

Exemple: $\Gamma = \text{diagram}$ $\deg \Gamma = 2d - 5\alpha$ $\deg \Gamma \leq 0$ si $\alpha \geq \frac{2}{5}d$
 $\gamma = \text{diagram}$ $\deg \gamma = d - 3\alpha$ $\deg \gamma - \deg \Gamma = -d + 2\alpha < 0$
 si $\alpha < \frac{1}{2}d$

3. Un critère de finitude

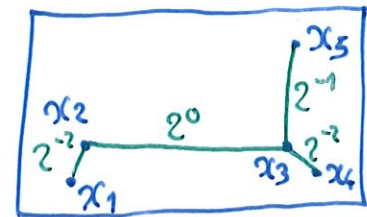
Déf.: $\bar{\Gamma} = (\bar{V}, \bar{\varepsilon})$ est un sous-graphe de $\Gamma = (V, \varepsilon)$
 si $\bar{\varepsilon} \subset \varepsilon$ et $\bar{V} \subset V$ contient tous les sommets incidents à $\bar{\varepsilon}$

Théorème: [Weinberg 66]

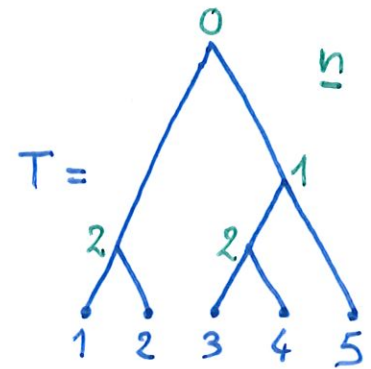
Si $\deg \bar{\Gamma} > 0$ pour tout sous-graphe $\bar{\Gamma} \subset \Gamma$
 alors $|\Pi_K(\Gamma)|$ est borné uniformément en $\varepsilon \geq 0$

idée de la preuve: Secteurs de Hepp

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \Lambda^n$
 $|K(x)| \lesssim \|x\|^{-\alpha}$
 $n = |\Gamma|$



Arbre recouvrant minimal



$\underline{I} = (T, \underline{n})$: $\left\{ \begin{array}{l} T \text{ arbre binaire à } n = |\Gamma| \text{ feuilles} \\ \underline{n} \text{ décoration croissante d'entiers sur noeuds internes de } T \end{array} \right.$

Secteur de Hepp $D_{\underline{I}} = \{x \in \Lambda^n : \frac{1}{C} 2^{-\sum_{i \leq j} n_{ij}} \leq \|x_i - x_j\| \leq C 2^{-\sum_{i \leq j} n_{ij}}\}$
 où n_{ij} : dernier ancêtre commun de i et j

$\Lambda^n = \bigcup_{\underline{I}} D_{\underline{I}} \Rightarrow \prod_K(\Gamma) = \sum_{T, \underline{n}} \int_{D_{T, \underline{n}}} \prod_{e \in \mathcal{E}} K(x_{e^+} - x_{e^-}) dx$

$\left\{ \begin{array}{l} x \in D_{T, \underline{n}} \Rightarrow \prod_{e \in \mathcal{E}} |K(x_{e^+} - x_{e^-})| \lesssim \prod_{e \in \mathcal{E}} 2^{-\sum_{e^+ > e^-} n_{e^+ e^-}} \\ \text{Vol}(D_{T, \underline{n}}) \lesssim \prod_{v \in T} 2^{-d_v} \end{array} \right.$ $e^+ = e^-, e^-$

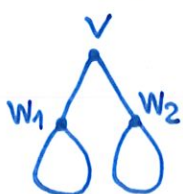
$\Rightarrow \prod_K(\Gamma) \lesssim \sum_{T, \underline{n}} \prod_{v \in T} 2^{-\eta_v d_v}$ $\eta_v = d - \sum_{e \in \mathcal{E}} \alpha 1_{e^+ = v}$

Affirmation: $\forall v \in T, \sum_{w \geq v} \eta_w > 0$ car c'est le degré d'un sous-graphe $\tilde{T} \subset T$

Récurrance à partir des feuilles:

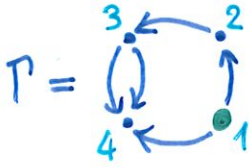


$\sum_{n_v=0}^{\infty} 2^{-\eta_v n_v} < \infty$ car $\eta_v > 0$
 w descendant de v dans T



$\sum_{n_v} 2^{-\sum_{w \geq v} \eta_w n_w} = \sum_{n_v} 2^{-\sum_{w \geq v} \eta_w n_w} \sum_{\hat{n}_w \geq 0} 2^{-\sum_w \eta_w \hat{n}_w} < \infty$
 $n_w = n_v + \hat{n}_w$ $< \infty$ par réc. \square

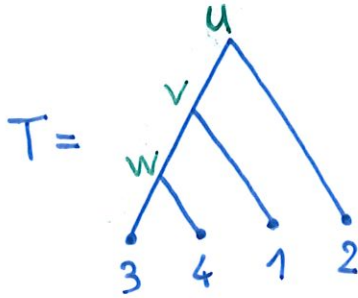
Exemple:



$$\deg \Gamma = 3d - 5\alpha$$

$$\deg \left(\begin{matrix} 3 \\ \downarrow \\ 4 \end{matrix} \right) = d - 2\alpha$$

$$\alpha < \frac{1}{2}d$$



$$\begin{cases} (1,2)^\uparrow = (2,3)^\uparrow = u \\ (1,4)^\uparrow = v \\ (3,4)^\uparrow = w \end{cases}$$

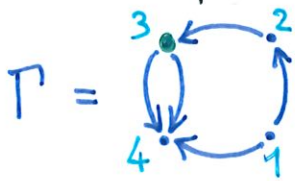
$$\begin{cases} \eta_w = d - 2\alpha = \deg \left(\begin{matrix} 3 \\ \downarrow \\ 4 \end{matrix} \right) \\ \eta_v = d - \alpha \\ \eta_u = d - 2\alpha \end{cases}$$

$$\eta_v + \eta_w = 2d - 3\alpha = \deg \left(\begin{matrix} 3 \\ \downarrow \\ 4 \end{matrix} \right) + 1$$

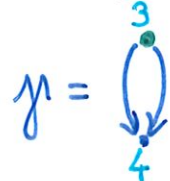
$$\eta_u + \eta_v + \eta_w = 3d - 5\alpha = \deg \Gamma$$

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{n}} \prod_{v \in T} 2^{-\eta_v n_v} &= \sum_{0 \leq n_u \leq n_v \leq n_w} 2^{-[\eta_u n_u + \eta_v n_v + \eta_w n_w]} \\ &= \sum_{\substack{n_u \geq 0 \\ \hat{n}_v \geq 0 \\ \hat{n}_w \geq 0}} 2^{-[\eta_u + \eta_v + \eta_w] n_u} 2^{-[\eta_v + \eta_w] \hat{n}_v} 2^{-\eta_w \hat{n}_w} < \infty \end{aligned}$$

4. Un exemple avec sous-divergence



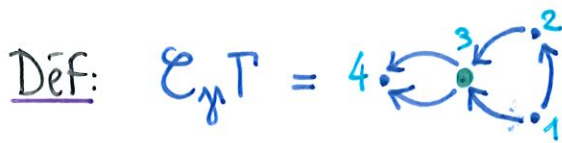
$$\deg \Gamma = 3d - 5\alpha$$



$$\deg \gamma = d - 2\alpha$$

$$\frac{3}{5}d < \alpha < \frac{2}{3}d \Rightarrow \deg \gamma < \deg \Gamma < 0$$

But: construire $A\Gamma$ t.q. $|\Pi_{K^\varepsilon}(A\Gamma)| \lesssim \varepsilon^{\deg \Gamma}$



$$\begin{cases} \Pi_{K^\varepsilon}(\Gamma) = \int_{\Lambda^3} K^\varepsilon(x_2 - x_1) K^\varepsilon(-x_2) K^\varepsilon(x_4)^2 K^\varepsilon(x_4 - x_1) dx_1 dx_2 dx_4 \\ \Pi_{K^\varepsilon}(\mathcal{E}_\gamma \Gamma) = \int_{\Lambda^3} K^\varepsilon(x_2 - x_1) K^\varepsilon(-x_2) K^\varepsilon(x_4)^2 K^\varepsilon(-x_1) dx_1 dx_2 dx_4 \\ = \underbrace{\Pi_{K^\varepsilon}(\text{graph } 1)}_{\lesssim \varepsilon^{d-2\alpha}} \underbrace{\Pi_{K^\varepsilon}(\text{graph } 2)}_{\lesssim \max(\varepsilon^{2d-3\alpha}, 1) = 1} \lesssim \varepsilon^{d-2\alpha} = \varepsilon^{\deg \gamma} \end{cases}$$

La différence $|\Pi_{K^\varepsilon}(\Gamma) - \Pi_{K^\varepsilon}(\mathcal{E}_\gamma \Gamma)|$ fait intervenir

$$|K^\varepsilon(x_4 - x_1) - K^\varepsilon(-x_1)| \lesssim |x_4 \cdot \nabla K^\varepsilon(-x_1)| \lesssim \frac{\|x_4\|}{(\|x_1\| + \varepsilon)^{\alpha+1}}$$

\Rightarrow Si $\|x_4\| \ll \|x_1\|$ on gagne un facteur

$$\frac{\|x_4\| (\|x_1\| + \varepsilon)^\alpha}{(\|x_1\| + \varepsilon)^{\alpha+1}} \sim \frac{\|x_4\|}{\|x_1\| + \varepsilon}$$

Affirmation: Si $\deg \gamma > -1$ alors on peut prendre $A\Gamma = -\Gamma + \mathcal{E}_\gamma \Gamma$
(sinon il faut pousser plus loin le dér. limité)

Idee de la preuve: On fixe un secteur de Hepp $D_{(\Gamma, \eta)}$
On distingue deux cas: γ "sûr" et γ "en danger"

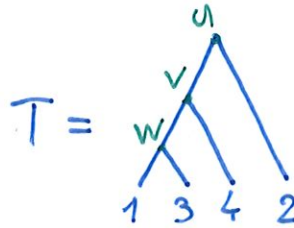
- Diamètre de γ mesuré par $\text{int}(\gamma) = \underline{n}_{314}$
- Distance aux "parents" mes. par $\text{ext}(\gamma) = \max\{\underline{n}_{213}, \underline{n}_{113}\}$

Déf: γ est en danger si $\underline{n}_{314} > \max\{\underline{n}_{213}, \underline{n}_{113}\}$
sinon γ est sûr

Affirmation: • Si γ est sûr, alors $|\Pi_{K^\varepsilon \Gamma}| \lesssim \varepsilon^{\text{deg} \Gamma}$ et $|\Pi_{K^\varepsilon \mathcal{E}_\gamma \Gamma}| \lesssim \varepsilon^{\text{deg} \Gamma}$
• Si γ est en danger alors $|\Pi_{K^\varepsilon(-\Gamma + \mathcal{E}_\gamma \Gamma)}| \lesssim \varepsilon^{\text{deg} \Gamma}$
(mais pas les termes séparément)

Cas 1: γ sûr

Exemple:



$$\underline{n}_{314} = \underline{n}_v$$

$$\max\{\underline{n}_{213}, \underline{n}_{113}\} = \underline{n}_w$$

$$\sum_{15} \int_{D_{\Gamma, \eta}} \underbrace{K^\varepsilon(x_2 - x_1) K^\varepsilon(-x_2) K^\varepsilon(x_4)^2 K^\varepsilon(x_4 - x_1)}_{\lesssim \frac{1}{(\|x_2 - x_1\| + \varepsilon)^\alpha} \lesssim 2^{\alpha \min\{\underline{n}_u, \underline{n}_\varepsilon\}} =: 2^{\alpha(\underline{n}_u \wedge \underline{n}_\varepsilon)}} dx_1 dx_2 dx_4$$

$\underline{n}_\varepsilon = \lceil \log_2(\varepsilon^{-1}) \rceil, 2^{-\underline{n}_\varepsilon} \leq \varepsilon$

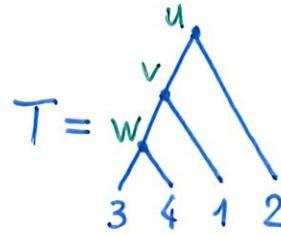
$$\lesssim \sum_{15} \int_{D_{\Gamma, \eta}} dx_1 dx_2 dx_4 \underbrace{2^{\alpha(\underline{n}_u \wedge \underline{n}_\varepsilon)} 2^{\alpha(\underline{n}_u \wedge \underline{n}_\varepsilon)} 2^{2\alpha(\underline{n}_v \wedge \underline{n}_\varepsilon)} 2^{\alpha(\underline{n}_v \wedge \underline{n}_\varepsilon)}}_{\lesssim 2^{-d(\underline{n}_u + \underline{n}_v + \underline{n}_w)}} \lesssim 2^{-d \underline{n}_v}$$

$$\lesssim \sum_{\underline{n}_u \geq 0} 2^{-d \underline{n}_u + 2\alpha(\underline{n}_u \wedge \underline{n}_\varepsilon)} \sum_{\underline{n}_v \geq \underline{n}_u} 2^{-d \underline{n}_v + 3\alpha(\underline{n}_v \wedge \underline{n}_\varepsilon)} \sum_{\underline{n}_w \geq \underline{n}_v} 2^{-d \underline{n}_w}$$

$$\lesssim \sum_{\underline{n}_u \geq 0} \underbrace{2^{-d \underline{n}_u + 2\alpha(\underline{n}_u \wedge \underline{n}_\varepsilon)}}_{\lesssim \varepsilon^{d-2\alpha}} \left[\sum_{\underline{n}_v = \underline{n}_u}^{\underline{n}_\varepsilon} \underbrace{2^{(3\alpha-2d)\underline{n}_v}}_{\lesssim 2^{-(2d-3\alpha)\underline{n}_u}} + \sum_{\underline{n}_v > \underline{n}_\varepsilon} \underbrace{2^{-2d \underline{n}_v} 2^{3\alpha \underline{n}_\varepsilon}}_{\lesssim \varepsilon^{2d-3\alpha}} \right] \lesssim \varepsilon^{3d-5\alpha} = \varepsilon^{\text{deg} \Gamma}$$

Cas 2: γ en danger

Exemple:



$$\underline{n}_{314} = \underline{n}_w$$

$$\max\{\underline{n}_{213}, \underline{n}_{123}\} = \underline{n}_v$$

$$\sum_{\underline{n}} \int_{D_{T,\underline{n}}} K^\varepsilon(x_2 - x_1) K^\varepsilon(-x_2) K^\varepsilon(x_4)^2 \underbrace{[-K^\varepsilon(x_4 - x_1) + K^\varepsilon(-x_1)]}_{\approx \frac{\|x_4\|}{(\|x_1\| + \varepsilon)^{\alpha+1}} \approx 2^{-\underline{n}_w} 2^{(\alpha+1)(\underline{n}_v \wedge \underline{n}_\varepsilon)}} dx_1 dx_2 dx_4$$

$$\approx \sum_{\underline{n}} 2^{-d(\underline{n}_u + \underline{n}_v + \underline{n}_w)} 2^{2\alpha(\underline{n}_u \wedge \underline{n}_\varepsilon)} 2^{2\alpha(\underline{n}_w \wedge \underline{n}_\varepsilon)} 2^{-\underline{n}_w} 2^{(\alpha+1)(\underline{n}_v \wedge \underline{n}_\varepsilon)}$$

$$= \sum_{\underline{n}_u \geq 0} 2^{-d\underline{n}_u + 2\alpha(\underline{n}_u \wedge \underline{n}_\varepsilon)} \sum_{\underline{n}_v \geq \underline{n}_u} 2^{-d\underline{n}_v + (\alpha+1)(\underline{n}_v \wedge \underline{n}_\varepsilon)} \sum_{\underline{n}_w \geq \underline{n}_v} 2^{-(d+1)\underline{n}_w + 2\alpha(\underline{n}_w \wedge \underline{n}_\varepsilon)}$$

$$\approx \varepsilon^{d-2\alpha}$$

$$\approx \varepsilon^{d-\alpha-1}$$

car $\alpha+1 > d$

$$\approx \sum_{\underline{n}_w = \underline{n}_v}^{\underline{n}_\varepsilon} 2^{(2\alpha-d-1)\underline{n}_w} + \sum_{\underline{n}_v > \underline{n}_\varepsilon} 2^{-(d+1)\underline{n}_w} 2^{2\alpha\underline{n}_\varepsilon}$$

$$\approx \varepsilon^{d+1-2\alpha}$$

si $\boxed{\text{deg } \gamma = d - 2\alpha > -1}$

car $\text{deg } \gamma = d - 2\alpha < 0$

$$\approx \varepsilon^{3d-5\alpha}$$

Cas où $\text{deg } \gamma < -1$:

On définit $\mathcal{E}_\gamma T = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^d: \\ d-2\alpha + |k|_1 < \infty}} \frac{1}{k!}$



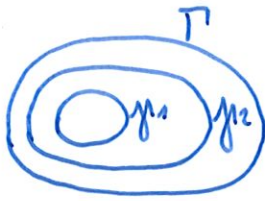
où $\prod_{k \in \mathbb{N}^d} \left(\begin{array}{c} \overset{k}{4} \leftarrow \overset{3}{\bullet} \leftarrow \overset{2}{\bullet} \\ \leftarrow \overset{k}{1} \end{array} \right) = \int_{\mathbb{N}^3} K^\varepsilon(x_2 - x_1) K^\varepsilon(-x_2) K^\varepsilon(x_4)^2 x_4^k \partial^k K^\varepsilon(-x_1) dx_1 dx_2 dx_4$

\Rightarrow Facteur $-K^\varepsilon(x_4 - x_1) + \sum_k \frac{x_4^k}{k!} \partial^k K^\varepsilon(-x_1)$

5. Cas général: formule des forêts de Zimmermann

Déf. par récurrence: $A\Gamma = -\Gamma - \sum_{\gamma \notin \Gamma} A\gamma \cdot \frac{\Gamma/\gamma}{\Gamma \text{ contracté selon } \gamma}$

Exemple 1:
 $\gamma_1 \subset \gamma_2 \subset \Gamma$



$$A\gamma_1 = -\gamma_1$$

$$A\gamma_2 = -\gamma_2 - A\gamma_1 \cdot \gamma_2/\gamma_1$$

$$= -\gamma_2 + \gamma_1 \cdot \gamma_2/\gamma_1$$

$$A\Gamma = -\Gamma - A\gamma_1 \cdot \Gamma/\gamma_1 - A\gamma_2 \cdot \Gamma/\gamma_2$$

$$= -\Gamma + \gamma_1 \cdot \Gamma/\gamma_1 + \gamma_2 \cdot \Gamma/\gamma_2 - \gamma_1 \cdot \gamma_2/\gamma_1 \cdot \Gamma/\gamma_2$$

Exemple 2:



$$A\gamma_1 = -\gamma_1 \quad A\gamma_2 = -\gamma_2$$

$$A\Gamma = -\Gamma + \gamma_1 \cdot \Gamma/\gamma_1 + \gamma_2 \cdot \Gamma/\gamma_2$$

Déf: Une collection de $\gamma_i \notin \Gamma$ est une forêt si les γ_i sont 2 à 2 soit disjoints, soit inclus l'un dans l'autre.



Forêt



Pas une forêt

Thm: $A\Gamma = -\sum_{\text{forêts } \mathcal{F}} (-1)^{|\mathcal{F}|} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}\Gamma$ où $\mathcal{E}_{\emptyset}\Gamma = \Gamma$, $\mathcal{E}_{\gamma_1 \cup \gamma_2}\Gamma = \mathcal{E}_{\gamma_1}\mathcal{E}_{\gamma_2}\Gamma$

De plus, si $\{\gamma_i \subset \Gamma : \text{deg } \gamma_i < 0\}$ est une forêt, $A\Gamma = -\prod_{\substack{\gamma_i \subset \Gamma \\ \text{deg } \gamma_i < 0}} (\text{id} - \mathcal{E}_{\gamma_i})\Gamma$

Ex 1: Forêts: $\emptyset, \{\gamma_1\}, \{\gamma_2\}, \{\gamma_1, \gamma_2\}$

$$\mathcal{E}_{\emptyset}\Gamma = \Gamma, \mathcal{E}_{\{\gamma_1\}}\Gamma = \mathcal{E}_{\gamma_1}\Gamma, \mathcal{E}_{\{\gamma_2\}}\Gamma = \mathcal{E}_{\gamma_2}\Gamma, \mathcal{E}_{\{\gamma_1, \gamma_2\}}\Gamma = \mathcal{E}_{\gamma_2}\mathcal{E}_{\gamma_1}\Gamma$$

$$\Rightarrow A\Gamma = -\Gamma + \mathcal{E}_{\gamma_1}\Gamma + \mathcal{E}_{\gamma_2}\Gamma - \mathcal{E}_{\gamma_1}\mathcal{E}_{\gamma_2}\Gamma = (\text{id} - \mathcal{E}_{\gamma_1})(\text{id} - \mathcal{E}_{\gamma_2})\Gamma$$

Ex 2: Forêts $\emptyset, \{\gamma_1\}, \{\gamma_2\} \Rightarrow A\Gamma = -\Gamma + \mathcal{E}_{\gamma_1}\Gamma + \mathcal{E}_{\gamma_2}\Gamma$

En général, on écrit $A\Gamma = \sum_{\mathcal{F} \text{ Forêts sûres}} \prod_{\gamma_i \in \mathcal{F}} (-\mathcal{E}_{\gamma_i}) \prod_{\substack{\gamma_j \text{ dangereuses} \\ \text{pour } \mathcal{F}}} (\text{id} - \mathcal{E}_{\gamma_j})$

6. Application à une EDPS

Modèle Φ_d^3 fractionnaire: $\partial_t u - \Delta^{\beta/2} u = u^2 + \xi \leftarrow \text{bruit blanc espace temps}$

où $\Delta^{\beta/2} (= -(-\Delta)^{\beta/2})$ Laplacien fractionnaire: $\mathcal{F}(\Delta^{\beta/2} u) = |\kappa|^{\beta} \mathcal{F}(u)$
 $0 < \beta \leq 2$

Espaces de Hölder fractionnaires: $\mathbb{F} = (\beta, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}_+^{d+1}$
 $z = (t, x) \Rightarrow \|z\|_{\mathbb{F}} = |t|^{1/\beta} + \sum_{i=1}^d |x_i|$

• $0 < \alpha < 1$: $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{F}}^{\alpha}$ si $|f(z)| + \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\|z_1 - z_2\|_{\mathbb{F}}^{\alpha}}$ borne sur tout compact

• $\alpha < 0$: $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{F}}^{\alpha}$ si $|\langle f, \mathcal{S}_z^{\lambda} \varphi \rangle| \lesssim \lambda^{\alpha}$ sur tout compact, $\lambda \in]0, 1]$
où φ fct test et $\mathcal{S}_z^{\lambda} \varphi(s, y) = \frac{1}{\lambda^{\beta+d}} \varphi\left(\frac{s-t}{\lambda^{\beta}}, \frac{y-x}{\lambda}\right)$

Faits: 1) $\xi \in \mathcal{C}_{\mathbb{F}}^{\alpha}$ pour tout $\alpha < -\frac{\beta+d}{2}$

2) Soit $G_{\beta} = (\partial_t - \Delta^{\beta/2})^{-1}$ la fct de Green de $\partial_t - \Delta^{\beta/2}$ alors (si $\alpha + \beta \notin \mathbb{Z}$)
 $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{F}}^{\alpha} \Rightarrow G_{\beta} * f \in \mathcal{C}_{\mathbb{F}}^{\alpha+\beta}$

Formule de Duhamel:

$$(\partial_t - \Delta^{\beta/2})u = u^2 + \xi \Rightarrow u = G_{\beta} u_0 + G_{\beta} * [u^2 + \xi]$$

\uparrow convolution espace
 \uparrow convolution espace-temps

$$\xi \in \mathcal{C}_{\mathbb{F}}^{-\frac{\beta+d}{2}-\varepsilon} \Rightarrow G_{\beta} * \xi \in \mathcal{C}_{\mathbb{F}}^{\frac{\beta-d}{2}-\varepsilon}$$

Cas 1: $\beta > d$ (possible si $d=1$): $G_{\beta} * \xi$ est un fonction
La théorie classique des EDPS s'applique

Cas 2: $d/3 < \beta \leq d$: EDPS localement sous-critique
(superrenormalisable): La théorie des structures de régularité s'applique à l'équ. renormalisée

Cas 3: $\beta \leq d/3$: (?)

Cas $d/3 < \beta \leq d$ - renormalisation

Représentation abstraite de $u = G_\beta * [\xi + u^2]$: $U = \mathcal{I}_\beta(\Xi + U^2) + \underbrace{P(U)}_{\text{termes polynomiaux}}$

- Ξ symbole représentant ξ , degré $|\Xi|_\xi = -\frac{\beta+d}{2} - \alpha$
- $\mathcal{I}_\beta(\tau)$ nouveau symbole de degré $|\tau|_\xi + \beta$
- $\tau_1 \tau_2$ nouveau symbole de degré $|\tau_1|_\xi + |\tau_2|_\xi$
- $X^k = X_0^{k_0} X_1^{k_1} \dots X_d^{k_d}$ symbole polynomial de degré $|k|_\xi = \beta k_0 + k_1 + \dots + k_d$

Itération de l'équ. de point fixe:

$$\begin{aligned}
 U_0 &= 0 & U_1 &= \mathcal{I}_\beta(\Xi) + c_1 \mathbb{1} + O(X) \\
 & & U_2 &= \mathcal{I}_\beta(\Xi) + c_1 \mathbb{1} + \mathcal{I}_\beta([\mathcal{I}_\beta(\Xi) + c_1 \mathbb{1}]^2) + \dots \\
 & & &= \mathcal{I}_\beta(\Xi) + c_1 \mathbb{1} + \mathcal{I}_\beta(\mathcal{I}_\beta(\Xi)^2) + 2c_1 \mathcal{I}_\beta(\mathcal{I}_\beta(\Xi)) + \dots \\
 \text{Notation:} & & &= \mathbb{I} + c_1 \mathbb{1} + \mathbb{Y} + 2c_1 \mathbb{I} + \dots
 \end{aligned}$$

Remarque: $|\mathbb{I}|_\xi = \frac{\beta-d}{2} - \alpha$ $|\mathbb{Y}|_\xi = \beta - d - 2\alpha + \beta = 2\beta - d - 2\alpha$

$$|\mathbb{Y}|_\xi > |\mathbb{I}|_\xi \iff 2\beta - d > \frac{\beta-d}{2} \iff \beta > \frac{d}{3} =: \beta_c$$

Prop: [B, Kuehn, J. Stat. Phys. 168: 331-368 (2017)]

Les symboles de degré négatif sont de 2 types:

- arbres binaires complets: $\mathbb{V}, \mathbb{V}, \mathbb{V}, \dots$
 $\text{deg } \tau = -\frac{2}{3}d + \frac{3m-1}{2}(\beta - \beta_c)$ si $2m$ arêtes
- arbres binaires incomplets: $\mathbb{I}, \mathbb{I}, \mathbb{Y}, \dots$
 $\text{deg } \tau = -\frac{1}{3}d + \frac{3\bar{m}+1}{2}(\beta - \beta_c)$ si $2\bar{m}+1$ arêtes

Prop: [B&K'17] Nombre de symbole à degré négatif $\sim (\beta - \beta_c)^{3/2} e^{\beta d / (\beta - \beta_c)}$

Equation renormalisée

$$\partial_t u - \Delta^{\beta/2} u = u^2 + C(\varepsilon, \beta, u) + \xi^\varepsilon$$

avec $\xi^\varepsilon = \int \xi * \xi$

Thm: [Bruned, Hairer, Zambotti 19; Bruned, Chandra, Chevyrev, Hairer 19]

$$C(\varepsilon, \beta, u) = \sum_{\tau: \deg \tau < 0} c_\varepsilon(\tau) \frac{\mathcal{I}(\tau)(u)}{S(\tau)}$$

$\Rightarrow \exists$ sol. locales admettant une limite lorsque $\varepsilon \searrow 0$.

- Ici,
- $\mathcal{I}(\tau)(u) = \begin{cases} 2^{n_{int}(\tau)} & \text{pour } \tau \text{ complet à } n_{int} \text{ noeuds intérieurs} \\ 2^{n_{int}(\tau)} u & \text{pour } \tau \text{ incomplet (sans } X_i; \text{ sinon } \partial_{X_i} u) \end{cases}$
 - $S(\tau) = 2^{n_{sym}(\tau)}$ où $n_{sym}(\tau)$ ordre du groupe de symétrie de τ
 - $c_\varepsilon(\tau) = \mathbb{E}[(\Pi^\varepsilon \mathcal{A} \tau)(0)] =: E(\mathcal{A} \tau)$

avec $\Pi^\varepsilon \tau$ modele déf. par

$$\begin{cases} \Pi^\varepsilon \mathbb{1}(\bar{z}) = 1 & \Pi^\varepsilon X_i(\bar{z}) = x_i & \Pi^\varepsilon \Xi(\bar{z}) = \xi^\varepsilon(\bar{z}) \\ \Pi^\varepsilon \tau \bar{z}(\bar{z}) = \Pi^\varepsilon \tau(\bar{z}) \Pi^\varepsilon \bar{z}(\bar{z}) \\ \Pi^\varepsilon \mathcal{I}_\beta \tau(\bar{z}) = \int G_\beta(\bar{z} - \bar{z}') \Pi^\varepsilon \tau(\bar{z}') d\bar{z}' \end{cases}$$

Exemples: $E(\mathbb{1}) = \mathbb{E} \int G_\beta(-\bar{z}) \xi^\varepsilon(\bar{z}) d\bar{z} = \mathbb{E} \int G_\beta^\varepsilon(-\bar{z}) \xi(d\bar{z}) = 0 \quad G_\beta^\varepsilon = G_\beta * \xi^\varepsilon$

$$E(\mathbb{V}) = \mathbb{E} \int G_\beta^\varepsilon(-z_1) G_\beta^\varepsilon(-z_2) \xi(dz_1) \xi(dz_2) = \int G_\beta^\varepsilon(-z_1)^2 dz_1$$

$$E(\mathbb{V}\mathbb{V}) = \mathbb{E} \int (G_\beta(-z) G_\beta^\varepsilon(z-z_1) G_\beta^\varepsilon(z-z_2) \xi(dz_1) \xi(dz_2) dz)^2$$

$\deg = -\frac{2d}{3} + 4(\beta - \beta_c) = 2$



$$\leftarrow \deg = 4(\beta + d) - 6d = 4\beta - 2d = -\frac{2d}{3} + 4(\beta - \beta_c)$$

$$E(\mathbb{V}\mathbb{V}) = 2$$

Thm: [B&Bruned 19] $C(\varepsilon, \beta, u) = C_0(\varepsilon, \beta) + C_1(\varepsilon, \beta)u$ avec

$$C_0(\varepsilon, \beta) \sim \begin{cases} \varepsilon_c^{-(d-\beta)} \log(\varepsilon^{-1}) & \varepsilon \geq \varepsilon_c \\ A_0 \varepsilon^{-(d-\beta)} & \varepsilon < \varepsilon_c \end{cases} \quad \varepsilon_c \simeq \exp \left\{ -\frac{1}{\beta - \beta_c} \log \frac{1}{\beta - \beta_c} \right\}$$