Rennes, 9/12/13

Chaînes de Markov à espace continu, distributions quasi-stationnaires et diffusions irréversibles

avec Barbara Gentz – arXiv: 1208.2557 à paraître SIAM J. Math. Anal.

1. Diffusions (ir)réversibles

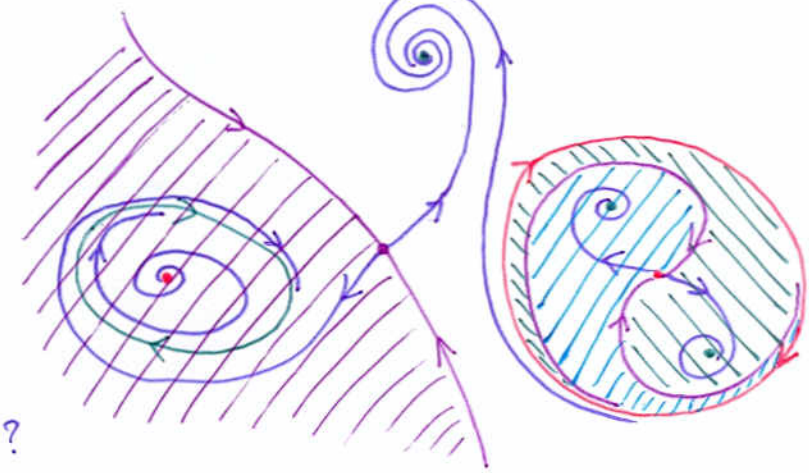
$$dx_t = f(x_t)\,dt + \sqrt{2\varepsilon}\,g(x_t)\,dW_t \qquad \left[\begin{array}{l} x\in\mathbb{R}^n,\ f,g \text{ suff. rég.} \\ W: \text{M.B. } k\text{-dim} \\ 0<\varepsilon\ll 1 \end{array}\right.$$

Système déterministe:
$\dot{x} = f(x)$

Attracteurs

Bassins d'attraction

Avec bruit: transitions occasionnelles – proc. de Markov ?

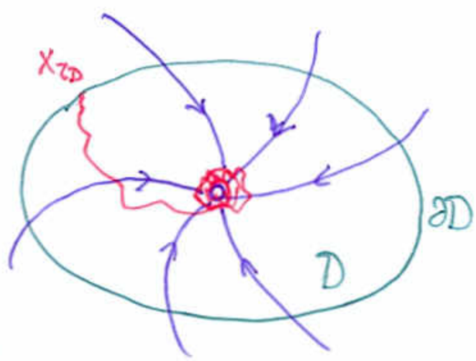


Problème de sortie stochastique

$\tau_D = \inf\{t>0 : x_t \notin D\}$

$x_{\tau_D} \in \partial D$

Mesure harmonique: $\mu_x(A) = \mathbb{P}^x\{x_{\tau_D}\in A\}$



Dynkin $\Rightarrow$ $\quad u(x) = \mathbb{E}^x[\tau_D]$: $\begin{cases} Lu(x) = -1 & x\in D \\ u(x) = 0 & x\in\partial D \end{cases}$

$h(x) = \mathbb{E}^x[\varphi(\tau_D)]$: $\begin{cases} Lh(x) = 0 & x\in D \\ h(x) = \varphi(x) & x\in\partial D \end{cases}$
$\varphi\in L^\infty(\partial D,\mathbb{R})$

où $\displaystyle (Lu)(x) := \sum_i f_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \varepsilon\sum_{ij}(gg^T)_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$

Théorie de Wentzell-Freidlin

$\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^n \qquad I(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^T (\dot\gamma_t - f(\gamma_t))\,(gg^T)(\gamma_t)^{-1}\,(\dot\gamma_t - f(\gamma_t))^{-1}\,dt$

$$\mathbb{P}\{(x_t)_{0\le t\le T} \in \Gamma\} \simeq e^{-\inf_\Gamma I/2\varepsilon}$$

Pour $\bar{D} \subset \mathcal{B}$ bassin d'attraction de A

Quasipotentiel: $V(y) = \inf\{I(\gamma) : \gamma : A \to y \in \partial D$ en temps arbitraire$\}$

[F,W'69]: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 2\varepsilon \log \mathbb{E}[\tau_D] = \inf\limits_{y\in\partial D} V(y) \equiv \bar{V}$

Si $V(y) = \bar{V} \iff y = y^*$: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}\{\|x_{\tau_D} - y^*\| > \delta\} = 0 \quad \forall \delta > 0$

[Day'83]: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}\{\tau_D > s\,\mathbb{E}(\tau_D)\} = e^{-s}$

Cas réversible

$$dx_t = -\nabla V(x_t)\,dt + \sqrt{2\varepsilon}\,dW_t$$

$L = \varepsilon\Delta - \nabla V\cdot\nabla = \varepsilon\, e^{V/\varepsilon}\nabla\cdot e^{-V/\varepsilon}\nabla \qquad$ autoadj. dans $L^2(\mathbb{R}^n, e^{-V/\varepsilon}dx)$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{réversible p.r. à mes. inv. } e^{-V/\varepsilon}: \quad e^{-V(x)}p_t(x,y) = e^{-V(y)/\varepsilon}p_t(y,x) \\ \bar{V} = 2V - V(x^*) \end{cases}$

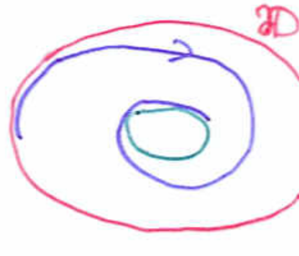
$\Rightarrow$ Si V a N min locaux $x_1^* \dots x_N^*$, $-L$ a N v.p. exp. petites λ_i (loi de Kramers)
$\lambda_i^{-1} \cong \mathbb{E}^{x_i^*}[\tau_{\mathcal{B}_\varepsilon(x_j^*)}]$ pour certains i,j

Méthodes:
- grandes déviations [F,W, Sugiura]
- analyse semiclassique [Mathieu, Miclos, Kolokoltsov...]
- théorie du potentiel [Bovier, Gayrard, Eckhoff, Klein]
- Laplacien de Witten [Helffer, Nier, le Peutrec, Viterbo]
- etc...

Cas irréversible

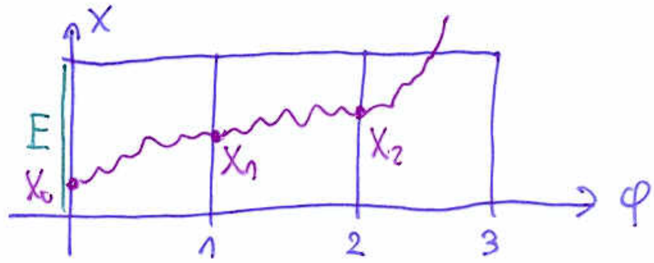
Analyse semiclassique non-autoadj [Hérau, Hitrik, Sjöstrand]

Question: $n = 2$, ∂D = orbite périodique instable
loi de x_{τ_D}?
$\bar{V}$ constant sur ∂D !!



2. Chaînes de Markov à espace continu

Application de Poincaré aléatoire



$$\begin{cases} d\varphi_t = f(\varphi_t,x_t)\,dt + \sigma F(\varphi_t,x_t)\,dW_t \\ dx_t = g(\varphi_t,x_t)\,dt + \sigma G(\varphi_t,x_t)\,dW_t \end{cases}$$

$x\in E$ $\quad \varphi\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ $\quad f\geq c>0$

$(X_n)_{0\le n\le N}$ chaîne de Markov (sous-stoch.)

de noyau: $\mathbb{P}^{X_0}\{X_1\in B\} = K(X_0,B) = \displaystyle\int_B \underbrace{h((0,X_0),(1,y))}_{k(X_0,y)}\,dy$

$k(X_0,y)$ a une densité [Ben Arous, Kusuoka, Stroock '84]

$$\begin{cases} (Kf)(x) = \mathbb{E}^x[f(X_1)] = \displaystyle\int_E k(x,y)f(y)\,dy \\ (mK)(A) = \mathbb{P}^\mu\{X_1\in A\} = \displaystyle\int_E m(x)\,k(x,y)\,dy \end{cases}$$

Théorie de Fredholm [1903]

$k\in L^2$ $\qquad Kf-\lambda f = g$ $\quad$ soluble $\forall g \iff \lambda$ n'est pas v.p.

$$\begin{cases} Kh_n = \lambda_n h_n \\ h_n^* K = \lambda_n h_n^* \end{cases}$$

base ON: $\displaystyle\int_E h_n^*(x)h_m(x)\,dx = \delta_{nm}$

complète: $\displaystyle\sum_n h_n^*(x)h_n(y) = \delta(x-y)$

[Perron-Frobenius, Jentzsch, Krein-Rutman,...]: $\lambda_0\in\mathbb{R}$, simple, $|\lambda_n|<\lambda_0$ $\forall n\geq 1$; $h_0, h_0^* > 0$

$$\Rightarrow \quad k^n(x,y) = \sum_k \lambda_k^n h_k(x)h_k^*(y)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}^x\{X_n\in dy \,|\, X_n\in E\} = \frac{k^n(x,dy)}{k^n(x,E)} = \underbrace{\frac{h_0^*(y)\,dy}{\int_E h_0^*}}_{\pi_0(dy)} + O\left(\left(\frac{|\lambda_1|}{\lambda_0}\right)^n\right)$$

QSD [Yaglom '47,...]

Comment estimer λ_0

$$\inf_{x\in A} K(x,A) \leq \lambda_0 \leq \sup_{x\in E} K(x,E)$$

Lebesgue$(A)>0$

$x^* = \operatorname{argmax} h_0 \Rightarrow \lambda_0 = \displaystyle\int_E k(x^*,y)\underbrace{\frac{h_0(y)}{h_0(x^*)}}_{\leq 1}\,dx \leq K(x^*,E)$

$\lambda_0\displaystyle\int_A h_0^*(y)\,dy = \int_E h_0^*(x)K(x,A)\,dx \geq \inf_{x\in A} K(x,A)\int_A h_0^*$

[Donsker-Varadhan]: $\lambda_0 \leq 1 - \dfrac{1}{\sup_E \mathbb{E}^x[\tau_\Delta]}$ $\qquad \tau_\Delta = \inf\{n>0: X_n\notin E\}$

Comment estimer le trou spectral (méthodes : couplage, Meyn-Tweedie, ...)

[Garrett Birkhoff '57] : $\exists s>0, \nu : \ s(x)\nu(A) \leqslant K(x,A) \leqslant L\, s(x)\nu(A) \quad \forall x, A$

$$\Rightarrow |\lambda_1|/\lambda_0 \leqslant 1 - L^{-2}$$

Version localisée : $\exists A \subset E,\ m : A \to \mathbb{R}_+^* :\ \boxed{m(y) \leqslant h(x,y) \leqslant L\, m(y)}$ (*) $\forall x,y \in A$

$$\Rightarrow |\lambda_1| \leqslant L-1 + O\Big(\sup_{x\in E} K(x, E\setminus A)\Big) + O\Big(\sup_{x\in A}[1-K(x,E)]\Big)$$

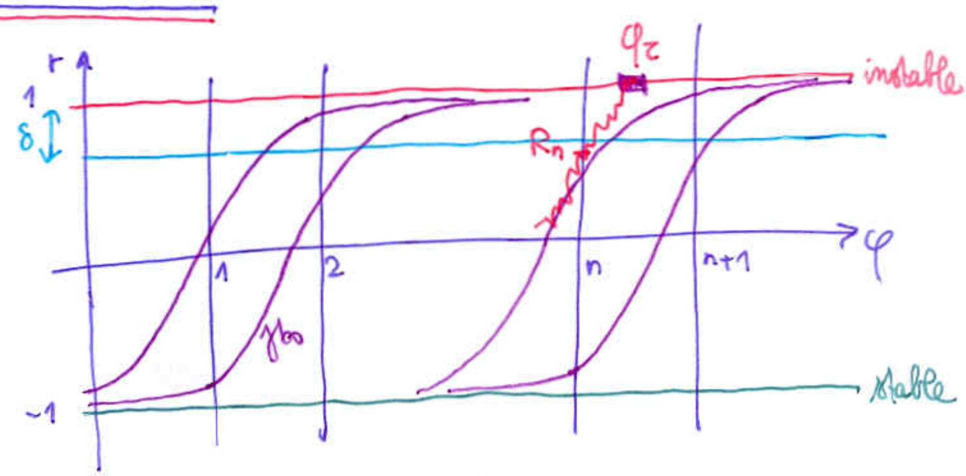
Preuve basée sur $h(x) = \mathbb{E}^x[e^{u\tau_A} h(X_{\tau_A}) 1_{\{\tau_A<\infty\}}]$, $|e^{-u}| > \sup_{x\in E\setminus A} \mathbb{P}^x\{X_1 \in E\setminus A\}$

Pour montrer (*) : couplage + inégalité de Harnack ($y \mapsto h(x,y)$ harmonique)

---

3. Application au problème de sortie

γ_∞ : traj. minimisant I



$$\mathbb{P}^{R_0}\{R_n \in A\} = \lambda_0^n\, h_0(R_0) \int_A h_0^*(y)\,dy \ \Big[1 + O\Big(\Big(\frac{|\lambda_1|}{\lambda_0}\Big)^n\Big)\Big]$$

$$t = n+s : \quad \mathbb{P}^{R_0}\{\varphi_\tau \in dt\} = \lambda_0^n\, h_0(R_0) \int_E h_0^*(y) \underbrace{\mathbb{P}^y\{\varphi_\tau \in ds\}}_{\text{indép. de } n} dy \ \Big[1 + O\Big(\Big(\frac{|\lambda_1|}{\lambda_0}\Big)^n\Big)\Big]$$

Exp. modulée périodiquement

1) Chaîne tuée en $1-\delta$: $\quad \mathbb{P}^0\{\varphi_{\tau_-} \in [\varphi_1, \varphi_1+\Delta]\} \simeq (\lambda_0^s)^{\varphi}\, e^{-J(\varphi_1)/\sigma^2}$

+ trou spectral $|\lambda_1^s| \leqslant e^{-c/|\log\sigma|}$ — fct périodique

2) Chaîne tuée en $1-2\delta$ et 1 : $\quad \lambda_0^u = e^{-2\lambda_+ T_+}(1+O(\delta))$ — $\lambda_+ T_+$: exp. de Lyap × période

grandes dév. $\Rightarrow \quad \mathbb{P}^{\varphi_1}\{\varphi_\tau \in [\varphi, \varphi+\Delta]\} \simeq (\lambda_0^u)^{\varphi-\varphi_1}\, e^{-[I_\infty + c\, e^{-2\lambda_+ T_+(\varphi-\varphi_1)}]/\sigma^2}$

3) Combinaison des deux : Equ. de renouvellement

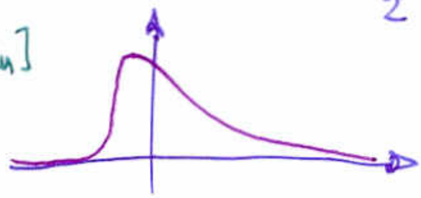
Théorème: $\exists\, \beta, c>0,\ \forall\, \delta,\Delta>0,\ \exists\, \sigma_0>0,\ \forall\, \sigma<\sigma_0$:

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\theta(\varphi_\tau)}{\lambda_+T_+}\in[t,t+\Delta]\right\} = \Delta\, C_0(\sigma)\,(\lambda_0)^t\, Q_{\lambda_+T_+}\left(\frac{\boxed{|\log\sigma|}}{\lambda_+T_+}-t+O(\delta)\right)$$
$$\times\left[1+O\left(e^{-c\varphi/|\log\sigma|}\right)+O(\delta|\log\delta|)+O(\Delta^\beta)\right]$$

avec * $Q_{\lambda_+T_+}(x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}G\big(\lambda_+T_+(n-x)\big)$

$G(x) = \exp\left\{-2x-\frac{1}{2}e^{-2x}\right\}$ Gumbel type 1, mode $-\frac{\log 2}{2}$, échelle $\frac{1}{2}$

c.f. [Cérou, Guyader, Lelièvre, Malrieu]
[Bakhtin]



* $\theta(\varphi)$ explicite avec $\theta'(\varphi+1)=\theta'(\varphi)>0$

t.q. $r-1=\sqrt{2\lambda_+h(\varphi)}\,y$
$s=(\theta'(\varphi_t)/\lambda_+)\,t$
avec $\frac{dh}{d\varphi}=2\lambda_+h-D_{rr}(1,\varphi)$

$\Rightarrow\ dy_s=\lambda_+T_+\,y_s\,ds+\sigma\,\tilde{g}\,dW_s$, $\quad\tilde{g}\tilde{g}^T=1$

* $\lambda_0 = 1-e^{-H/\sigma^2}$, $H\simeq I(y_\infty)$ v.p. principale
* $C_0(\sigma)\simeq e^{-H/\sigma^2}$

"Cycling" [Day]: Lieu de sortie concentré en $\varphi\simeq\varphi_0+c|\log\sigma|$

Corollaire: $$W_\Delta(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left\{\frac{\theta(\varphi_\tau)}{\lambda_+T_+}\in[n+t,n+t+\Delta]\right\}$$
$$=\Delta\, Q_{\lambda_+T_+}\left(\frac{|\log\sigma|}{\lambda_+T_+}-t+O(\delta)\right)\left[1+O(\delta|\log\delta|)+O(\Delta^\beta)\right]$$

$$\Rightarrow\ \lim_{\delta,\Delta\to0}\ \lim_{\sigma\to0}\ \frac{1}{\Delta}W_\Delta\left(t+\frac{|\log\sigma|}{\lambda_+T_+}\right)=Q_{\lambda_+T_+}(-t)$$

Applications:
- résonance stochastique
- synchronisation ("phase slips")
- distribution de spikes (FitzHugh-Nagumo)