

# Thermalisation et fluctuations dans une cavité harmonique quantique

(Collaboration avec C.A. Pillet)

L. Bruneau

Univ. Cergy-Pontoise

22 février 2008

# Syst. Quantiques avec Interactions Répétées (RIQS)

Un “petit” système  $\mathcal{S}$ :

- Système quantique gouverné par un hamiltonien  $H_{\mathcal{S}}$  sur  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ .

# Syst. Quantiques avec Interactions Répétées (RIQS)

Un “petit” système  $\mathcal{S}$ :

- Système quantique gouverné par un hamiltonien  $H_{\mathcal{S}}$  sur  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ .

Une chaine  $\mathcal{C}$  de sous-systèmes quantiques  $\mathcal{E}_k \equiv \mathcal{E}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ):

- $\mathcal{C} = \mathcal{E} + \mathcal{E} + \dots$
- Chaque  $\mathcal{E}_k$  est gouverné par un hamiltonien  $H_{\mathcal{E},k} = H_{\mathcal{E}}$  sur  $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ .

# Syst. Quantiques avec Interactions Répétées (RIQS)

Un “petit” système  $\mathcal{S}$ :

- Système quantique gouverné par un hamiltonien  $H_{\mathcal{S}}$  sur  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ .

Une chaine  $\mathcal{C}$  de sous-systèmes quantiques  $\mathcal{E}_k \equiv \mathcal{E}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ):

- $\mathcal{C} = \mathcal{E} + \mathcal{E} + \dots$
- Chaque  $\mathcal{E}_k$  est gouverné par un hamiltonien  $H_{\mathcal{E},k} = H_{\mathcal{E}}$  sur  $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ .

Des interactions:

- Opérateurs  $V_k \equiv V$  agissant sur  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ .
- Une durée d'interaction  $\tau > 0$ .

# Syst. Quantiques avec Interactions Répétées (RIQS)

Un “petit” système  $\mathcal{S}$ :

- Système quantique gouverné par un hamiltonien  $H_{\mathcal{S}}$  sur  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ .

Une chaîne  $\mathcal{C}$  de sous-systèmes quantiques  $\mathcal{E}_k \equiv \mathcal{E}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ):

- $\mathcal{C} = \mathcal{E} + \mathcal{E} + \dots$
- Chaque  $\mathcal{E}_k$  est gouverné par un hamiltonien  $H_{\mathcal{E},k} = H_{\mathcal{E}}$  sur  $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ .

Des interactions:

- Opérateurs  $V_k \equiv V$  agissant sur  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ .
- Une durée d'interaction  $\tau > 0$ .

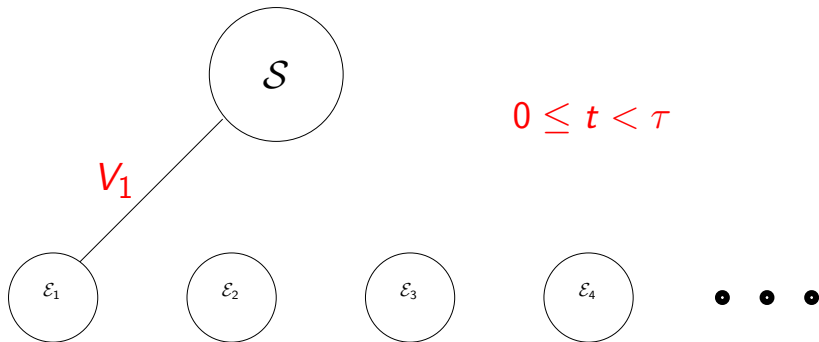
Pour  $t \in [(n-1)\tau, n\tau[$ :

- $\mathcal{S}$  interagit avec  $\mathcal{E}_n$ ,
- $\mathcal{E}_k$  évolue librement si  $k \neq n$ ,

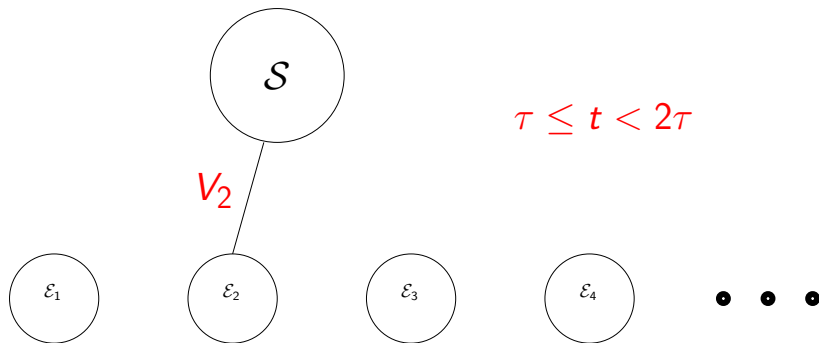
i.e. le système total est gouverné par

$$\widetilde{H}_n = H_{\mathcal{S}} + H_{\mathcal{E},n} + V_n + \sum_{k \neq n} H_{\mathcal{E},k} = H_n + \sum_{k \neq n} H_{\mathcal{E},k}.$$

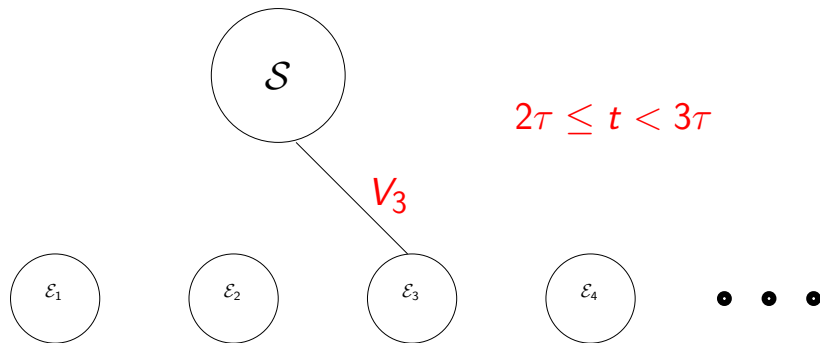
# Syst. Quantiques avec Interactions Répétées (RIQS)



# Syst. Quantiques avec Interactions Répétées (RIQS)

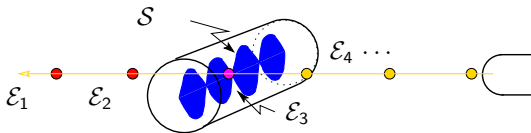


# Syst. Quantiques avec Interactions Répétées (RIQS)





One-atom maser: (Walther et al '85, Haroche et al '92)



- $\mathcal{S}$  = un mode du champ EM dans une cavité optique.
- $\mathcal{E}_k$  =  $k$ -ème atome interagissant avec le champ.
- $\mathcal{C}$ : faisceau d'atomes envoyé dans la cavité.

# Modélisation du one-atom maser

- Le champ EM dans la cavité: un oscillateur harmonique.

$$\mathcal{H}_S = \Gamma_s(\mathbb{C}), \quad H_S = \omega a^* a = \omega N.$$

On note  $|n\rangle$  les états propres de  $H_S$ :  $H_S|n\rangle = n\omega|n\rangle$ .

# Modélisation du one-atom maser

- 1 Le champ EM dans la cavité: un oscillateur harmonique.

$$\mathcal{H}_S = \Gamma_s(\mathbb{C}), \quad H_S = \omega a^* a = \omega N.$$

On note  $|n\rangle$  les états propres de  $H_S$ :  $H_S|n\rangle = n\omega|n\rangle$ .

- 2 Les atomes: atomes à 2 niveaux.

$$\mathcal{H}_E = \mathbb{C}^2, \quad H_E = \omega b^* b \quad \text{où} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note  $|-\rangle, |+\rangle$  les états propres associés.

# Modélisation du one-atom maser

- 1 Le champ EM dans la cavité: un oscillateur harmonique.

$$\mathcal{H}_S = \Gamma_s(\mathbb{C}), \quad H_S = \omega a^* a = \omega N.$$

On note  $|n\rangle$  les états propres de  $H_S$ :  $H_S|n\rangle = n\omega|n\rangle$ .

- 2 Les atomes: atomes à 2 niveaux.

$$\mathcal{H}_E = \mathbb{C}^2, \quad H_E = \omega b^* b \quad \text{où} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note  $|-\rangle, |+\rangle$  les états propres associés.

- 3 L'interaction: processus d'échange, i.e.  $V = \lambda(a \otimes b^* + a^* \otimes b)$ .

# Modélisation du one-atom maser

- 1 Le champ EM dans la cavité: un oscillateur harmonique.

$$\mathcal{H}_S = \Gamma_s(\mathbb{C}), \quad H_S = \omega a^* a = \omega N.$$

On note  $|n\rangle$  les états propres de  $H_S$ :  $H_S|n\rangle = n\omega|n\rangle$ .

- 2 Les atomes: atomes à 2 niveaux.

$$\mathcal{H}_E = \mathbb{C}^2, \quad H_E = \omega b^* b \quad \text{où} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note  $|-\rangle, |+\rangle$  les états propres associés.

- 3 L'interaction: processus d'échange, i.e.  $V = \lambda(a \otimes b^* + a^* \otimes b)$ .

- 4 Hamiltonien total:  $H = H_S \otimes \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_S \otimes H_E + V$ .

**Remarque:** fréquence de Bohr des atomes=fréquence de l'oscillateur.

On veut avoir des processus d'échange à 1 photon, sans perte/gain d'énergie.

# Modélisation du one-atom maser

- 1 Le champ EM dans la cavité: un oscillateur harmonique.

$$\mathcal{H}_S = \Gamma_s(\mathbb{C}), \quad H_S = \omega a^* a = \omega N.$$

On note  $|n\rangle$  les états propres de  $H_S$ :  $H_S|n\rangle = n\omega|n\rangle$ .

- 2 Les atomes: atomes à 2 niveaux.

$$\mathcal{H}_E = \mathbb{C}^2, \quad H_E = \omega b^* b \quad \text{où} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note  $|-\rangle, |+\rangle$  les états propres associés.

- 3 L'interaction: processus d'échange, i.e.  $V = \lambda(a \otimes b^* + a^* \otimes b)$ .

- 4 Hamiltonien total:  $H = H_S \otimes \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_S \otimes H_E + V$ .

**Remarque:** fréquence de Bohr des atomes = fréquence de l'oscillateur.

On veut avoir des processus d'échange à 1 photon, sans perte/gain d'énergie.

- 5 Etat initial de  $S$ : matrice densité  $\rho \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H}_S)$ .

- 6 Etat initial de  $E$ :  $\rho_\beta$  = état d'équilibre à température  $\beta^{-1}$ .

# Modélisation du one-atom maser

- 1 Le champ EM dans la cavité: un oscillateur harmonique.

$$\mathcal{H}_S = \Gamma_s(\mathbb{C}), \quad H_S = \omega a^* a = \omega N.$$

On note  $|n\rangle$  les états propres de  $H_S$ :  $H_S|n\rangle = n\omega|n\rangle$ .

- 2 Les atomes: atomes à 2 niveaux.

$$\mathcal{H}_E = \mathbb{C}^2, \quad H_E = \omega b^* b \quad \text{où} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note  $|-\rangle, |+\rangle$  les états propres associés.

- 3 L'interaction: processus d'échange, i.e.  $V = \lambda(a \otimes b^* + a^* \otimes b)$ .

- 4 Hamiltonien total:  $H = H_S \otimes \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_S \otimes H_E + V$ .

**Remarque:** fréquence de Bohr des atomes = fréquence de l'oscillateur.

On veut avoir des processus d'échange à 1 photon, sans perte/gain d'énergie.

- 5 Etat initial de  $S$ : matrice densité  $\rho \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H}_S)$ .

- 6 Etat initial de  $E$ :  $\rho_E$  = état d'équilibre à température  $\beta^{-1}$ .

**Question:** A-t-on thermalisation de la cavité, i.e. si  $\rho_n$  est l'état de  $S$  après  $n$  interactions, a-t-on  $\rho_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z_\beta^{-1} e^{-\beta H_S}$ ?

# L'opérateur de dynamique réduite

Si  $\mathcal{S}$  est dans l'état  $\rho$  avant interaction, après interaction il est dans l'état

$$\mathcal{L}_\beta(\rho) := \text{Tr}_\mathcal{E} \left( e^{-i\tau H} \rho \otimes \rho_\beta e^{i\tau H} \right),$$

où  $\text{Tr}_\mathcal{E}$  est la trace partielle par rapport à  $\mathcal{E}$ ,



# L'opérateur de dynamique réduite

Si  $\mathcal{S}$  est dans l'état  $\rho$  avant interaction, après interaction il est dans l'état

$$\mathcal{L}_\beta(\rho) := \text{Tr}_\mathcal{E} \left( e^{-i\tau H} \rho \otimes \rho_\beta e^{i\tau H} \right),$$

où  $\text{Tr}_\mathcal{E}$  est la trace partielle par rapport à  $\mathcal{E}$ , i.e.

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{S}), \quad \text{Tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}(A \mathcal{L}_\beta(\rho)) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E}} \left( (A \otimes \mathbb{1}_\mathcal{E}) e^{-i\tau H} \rho \otimes \rho_\beta e^{i\tau H} \right).$$

# L'opérateur de dynamique réduite

Si  $S$  est dans l'état  $\rho$  avant interaction, après interaction il est dans l'état

$$\mathcal{L}_\beta(\rho) := \text{Tr}_\mathcal{E} \left( e^{-i\tau H} \rho \otimes \rho_\beta e^{i\tau H} \right),$$

où  $\text{Tr}_\mathcal{E}$  est la trace partielle par rapport à  $\mathcal{E}$ , i.e.

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S), \quad \text{Tr}_{\mathcal{H}_S} (A \mathcal{L}_\beta(\rho)) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E}} \left( (A \otimes \mathbb{1}_\mathcal{E}) e^{-i\tau H} \rho \otimes \rho_\beta e^{i\tau H} \right).$$

**Conclusion:** il faut comprendre  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_\beta^n(\rho)$ , et donc le spectre de  $\mathcal{L}_\beta$ .

# L'opérateur de dynamique réduite

Si  $S$  est dans l'état  $\rho$  avant interaction, après interaction il est dans l'état

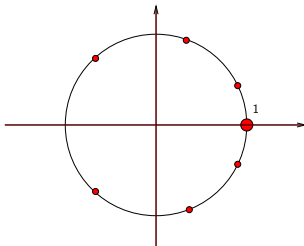
$$\mathcal{L}_\beta(\rho) := \text{Tr}_\mathcal{E} (e^{-i\tau H} \rho \otimes \rho_\beta e^{i\tau H}),$$

où  $\text{Tr}_\mathcal{E}$  est la trace partielle par rapport à  $\mathcal{E}$ , i.e.

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S), \quad \text{Tr}_{\mathcal{H}_S}(A \mathcal{L}_\beta(\rho)) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E}} ((A \otimes \mathbb{1}_\mathcal{E}) e^{-i\tau H} \rho \otimes \rho_\beta e^{i\tau H}).$$

**Conclusion:** il faut comprendre  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_\beta^n(\rho)$ , et donc le spectre de  $\mathcal{L}_\beta$ .

**Remarque:** si  $\lambda = 0$ ,  $\mathcal{L}_\beta(\rho) = e^{-i\tau H_S} \rho e^{i\tau H_S}$ . Donc 1 est infiniment dégénérée. Les états  $\rho = \sum \rho_n |n\rangle\langle n|$  sont invariants.



# Probabilités de transition

Notations:

- $\sigma = \pm$  l'état d'un atome,
- $P_\sigma$  le projecteur sur l'état  $\sigma$ ,
- $w_\beta(\sigma)$  la distribution de Gibbs, i.e.

$$w_\beta(-) = \frac{1}{1 + e^{-\beta\omega}}, \quad w_\beta(+)= \frac{e^{-\beta\omega}}{1 + e^{-\beta\omega}}.$$

# Probabilités de transition

Notations:

- $\sigma = \pm$  l'état d'un atome,
- $P_\sigma$  le projecteur sur l'état  $\sigma$ ,
- $w_\beta(\sigma)$  la distribution de Gibbs, i.e.

$$w_\beta(-) = \frac{1}{1 + e^{-\beta\omega}}, \quad w_\beta(+) = \frac{e^{-\beta\omega}}{1 + e^{-\beta\omega}}.$$

- $Q_{\sigma'\sigma}(\rho) := w_\beta(\sigma) \text{Tr}_{\mathcal{E}} \left( (\mathbb{1} \otimes P_{\sigma'}) e^{-i\tau H} (\rho \otimes P_\sigma) e^{i\tau H} (\mathbb{1} \otimes P_{\sigma'}) \right).$

# Probabilités de transition

Notations:

- $\sigma = \pm$  l'état d'un atome,
- $P_\sigma$  le projecteur sur l'état  $\sigma$ ,
- $w_\beta(\sigma)$  la distribution de Gibbs, i.e.

$$w_\beta(-) = \frac{1}{1 + e^{-\beta\omega}}, \quad w_\beta(+)= \frac{e^{-\beta\omega}}{1 + e^{-\beta\omega}}.$$

- $Q_{\sigma'\sigma}(\rho) := w_\beta(\sigma)\text{Tr}_{\mathcal{E}} \left( (\mathbb{1} \otimes P_{\sigma'}) e^{-i\tau H} (\rho \otimes P_\sigma) e^{i\tau H} (\mathbb{1} \otimes P_{\sigma'}) \right).$

Alors

- $\mathbb{P}_\rho(\sigma \rightarrow \sigma') := \text{Tr}(Q_{\sigma'\sigma}(\rho))$  est la probabilité qu'un atome entre dans l'état  $\sigma$  et sorte dans l'état  $\sigma'$  sachant que la cavité est initialement dans l'état  $\rho$ .

Notations:

- $\sigma = \pm$  l'état d'un atome,
- $P_\sigma$  le projecteur sur l'état  $\sigma$ ,
- $w_\beta(\sigma)$  la distribution de Gibbs, i.e.

$$w_\beta(-) = \frac{1}{1 + e^{-\beta\omega}}, \quad w_\beta(+) = \frac{e^{-\beta\omega}}{1 + e^{-\beta\omega}}.$$

- $Q_{\sigma'\sigma}(\rho) := w_\beta(\sigma) \text{Tr}_{\mathcal{E}} \left( (\mathbb{1} \otimes P_{\sigma'}) e^{-i\tau H} (\rho \otimes P_\sigma) e^{i\tau H} (\mathbb{1} \otimes P_{\sigma'}) \right).$

Alors

- $\mathbb{P}_\rho(\sigma \rightarrow \sigma') := \text{Tr}(Q_{\sigma'\sigma}(\rho))$  est la probabilité qu'un atome entre dans l'état  $\sigma$  et sorte dans l'état  $\sigma'$  sachant que la cavité est initialement dans l'état  $\rho$ .
- $T_{\sigma'\sigma}(\rho) := \frac{Q_{\sigma'\sigma}(\rho)}{\mathbb{P}_\rho(\sigma \rightarrow \sigma')}$  est l'état de la cavité après interaction sachant que l'état initial est  $\rho$ , l'atome est entré dans l'état  $\sigma$  et sorti dans l'état  $\sigma'$ .

# Probabilités de transition

Notations:

- $\sigma = \pm$  l'état d'un atome,
- $P_\sigma$  le projecteur sur l'état  $\sigma$ ,
- $w_\beta(\sigma)$  la distribution de Gibbs, i.e.

$$w_\beta(-) = \frac{1}{1 + e^{-\beta\omega}}, \quad w_\beta(+)= \frac{e^{-\beta\omega}}{1 + e^{-\beta\omega}}.$$

- $Q_{\sigma'\sigma}(\rho) := w_\beta(\sigma) \text{Tr}_{\mathcal{E}} \left( (\mathbb{1} \otimes P_{\sigma'}) e^{-i\tau H} (\rho \otimes P_\sigma) e^{i\tau H} (\mathbb{1} \otimes P_{\sigma'}) \right).$

Alors

- $\mathbb{P}_\rho(\sigma \rightarrow \sigma') := \text{Tr}(Q_{\sigma'\sigma}(\rho))$  est la probabilité qu'un atome entre dans l'état  $\sigma$  et sorte dans l'état  $\sigma'$  sachant que la cavité est initialement dans l'état  $\rho$ .
- $T_{\sigma'\sigma}(\rho) := \frac{Q_{\sigma'\sigma}(\rho)}{\mathbb{P}_\rho(\sigma \rightarrow \sigma')}$  est l'état de la cavité après interaction sachant que l'état initial est  $\rho$ , l'atome est entré dans l'état  $\sigma$  et sorti dans l'état  $\sigma'$ .
- L'état "moyen" de la cavité après interaction est donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_\rho}(T_{\sigma'\sigma}(\rho)) = \sum_{\sigma, \sigma' = \pm} T_{\sigma'\sigma}(\rho) \mathbb{P}_\rho(\sigma \rightarrow \sigma') = \mathcal{L}_\beta(\rho).$$



# Une autre formulation de $\mathcal{L}_\beta$

**Fait:** on peut calculer  $e^{-i\tau H}$  explicitement!

$$e^{-i\tau H} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega\tau N} \cos(\nu\sqrt{N}) & -ie^{-i\omega\tau N} \frac{\sin(\nu\sqrt{N})}{\sqrt{N}} a^* \\ -ie^{-i\omega\tau(N+1)} \frac{\sin(\nu\sqrt{N+1})}{\sqrt{N+1}} a & e^{-i\omega\tau(N+1)} \cos(\nu\sqrt{N+1}) \end{pmatrix},$$

où  $\nu = \lambda\tau$  et via l'identification  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E = \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_S$ .

# Une autre formulation de $\mathcal{L}_\beta$

**Fait:** on peut calculer  $e^{-i\tau H}$  explicitement!

$$e^{-i\tau H} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega\tau N} \cos(\nu\sqrt{N}) & -ie^{-i\omega\tau N} \frac{\sin(\nu\sqrt{N})}{\sqrt{N}} a^* \\ -ie^{-i\omega\tau(N+1)} \frac{\sin(\nu\sqrt{N+1})}{\sqrt{N+1}} a & e^{-i\omega\tau(N+1)} \cos(\nu\sqrt{N+1}) \end{pmatrix},$$

où  $\nu = \lambda\tau$  et via l'identification  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E = \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_S$ .

$$\Rightarrow Q_{\sigma'\sigma}(\rho) = V_{\sigma'\sigma} \rho V_{\sigma'\sigma}^* \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} V_{--} &:= \frac{e^{-i\omega\tau N}}{\sqrt{1+e^{-\beta\omega}}} \cos(\nu\sqrt{N}), & V_{-+} &:= \frac{e^{-\beta\omega/2} e^{-i\omega\tau N}}{\sqrt{1+e^{-\beta\omega}}} \frac{\sin(\nu\sqrt{N})}{\sqrt{N}} a^*, \\ V_{+-} &:= \frac{e^{-i\omega\tau(N+1)}}{\sqrt{1+e^{-\beta\omega}}} \frac{\sin(\nu\sqrt{N+1})}{\sqrt{N+1}} a, & V_{++} &:= \frac{e^{-\beta\omega/2} e^{-i\omega\tau(N+1)}}{\sqrt{1+e^{-\beta\omega}}} \cos(\nu\sqrt{N+1}). \end{aligned}$$

# Une autre formulation de $\mathcal{L}_\beta$

**Fait:** on peut calculer  $e^{-i\tau H}$  explicitement!

$$e^{-i\tau H} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega\tau N} \cos(\nu\sqrt{N}) & -ie^{-i\omega\tau N} \frac{\sin(\nu\sqrt{N})}{\sqrt{N}} a^* \\ -ie^{-i\omega\tau(N+1)} \frac{\sin(\nu\sqrt{N+1})}{\sqrt{N+1}} a & e^{-i\omega\tau(N+1)} \cos(\nu\sqrt{N+1}) \end{pmatrix},$$

où  $\nu = \lambda\tau$  et via l'identification  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E = \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_S$ .

$$\Rightarrow Q_{\sigma'\sigma}(\rho) = V_{\sigma'\sigma} \rho V_{\sigma'\sigma}^* \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} V_{--} &:= \frac{e^{-i\omega\tau N}}{\sqrt{1+e^{-\beta\omega}}} \cos(\nu\sqrt{N}), & V_{-+} &:= \frac{e^{-\beta\omega/2} e^{-i\omega\tau N}}{\sqrt{1+e^{-\beta\omega}}} \frac{\sin(\nu\sqrt{N})}{\sqrt{N}} a^*, \\ V_{+-} &:= \frac{e^{-i\omega\tau(N+1)}}{\sqrt{1+e^{-\beta\omega}}} \frac{\sin(\nu\sqrt{N+1})}{\sqrt{N+1}} a, & V_{++} &:= \frac{e^{-\beta\omega/2} e^{-i\omega\tau(N+1)}}{\sqrt{1+e^{-\beta\omega}}} \cos(\nu\sqrt{N+1}). \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion: } \mathcal{L}_\beta(\rho) = \sum_{\sigma, \sigma' = \pm} V_{\sigma'\sigma} \rho V_{\sigma'\sigma}^*.$$

# Action de $\mathcal{L}_\beta$ sur les états diagonaux

Si  $\rho = \sum_n \rho_n |n\rangle\langle n|$ , alors  $\mathcal{L}_\beta(\rho) = \sum_n (\mathcal{L}_\beta(\rho))_n |n\rangle\langle n|$  avec

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\beta(\rho))_n = & \frac{1}{1 + e^{-\beta\omega}} \left( (\cos^2(\nu\sqrt{n}) + e^{-\beta\omega} \cos^2(\nu\sqrt{n+1}))\rho_n \right. \\ & \left. + e^{-\beta\omega} \sin^2(\nu\sqrt{n})\rho_{n-1} + \sin^2(\nu\sqrt{n+1})\rho_{n+1} \right). \end{aligned}$$

# Action de $\mathcal{L}_\beta$ sur les états diagonaux

Si  $\rho = \sum_n \rho_n |n\rangle\langle n|$ , alors  $\mathcal{L}_\beta(\rho) = \sum_n (\mathcal{L}_\beta(\rho))_n |n\rangle\langle n|$  avec

$$(\mathcal{L}_\beta(\rho))_n = \frac{1}{1 + e^{-\beta\omega}} \left( (\cos^2(\nu\sqrt{n}) + e^{-\beta\omega} \cos^2(\nu\sqrt{n+1}))\rho_n + e^{-\beta\omega} \sin^2(\nu\sqrt{n})\rho_{n-1} + \sin^2(\nu\sqrt{n+1})\rho_{n+1} \right).$$

Avec  $(\nabla\rho)_n := \rho_n - \rho_{n-1}$  et  $(\nabla^*\rho)_n = \rho_n - \rho_{n+1}$ , on écrit

$$\mathcal{L}_\beta = \mathbb{1} - \nabla^* \frac{\sin^2(\nu\sqrt{N})}{1 + e^{-\beta\omega}} e^{-\beta\omega N} \nabla e^{\beta\omega N}.$$

**Conclusion:**  $\rho$  est invariant ssi  $\frac{\sin^2(\nu\sqrt{N})}{1 + e^{-\beta\omega}} e^{-\beta H_S} \nabla e^{\beta H_S} \rho = 0$ .

# Action de $\mathcal{L}_\beta$ sur les états diagonaux

Si  $\rho = \sum_n \rho_n |n\rangle\langle n|$ , alors  $\mathcal{L}_\beta(\rho) = \sum_n (\mathcal{L}_\beta(\rho))_n |n\rangle\langle n|$  avec

$$(\mathcal{L}_\beta(\rho))_n = \frac{1}{1 + e^{-\beta\omega}} \left( (\cos^2(\nu\sqrt{n}) + e^{-\beta\omega} \cos^2(\nu\sqrt{n+1}))\rho_n + e^{-\beta\omega} \sin^2(\nu\sqrt{n})\rho_{n-1} + \sin^2(\nu\sqrt{n+1})\rho_{n+1} \right).$$

Avec  $(\nabla\rho)_n := \rho_n - \rho_{n-1}$  et  $(\nabla^*\rho)_n = \rho_n - \rho_{n+1}$ , on écrit

$$\mathcal{L}_\beta = \mathbb{1} - \nabla^* \frac{\sin^2(\nu\sqrt{N})}{1 + e^{-\beta\omega}} e^{-\beta\omega N} \nabla e^{\beta\omega N}.$$

**Conclusion:**  $\rho$  est invariant ssi  $\frac{\sin^2(\nu\sqrt{N})}{1 + e^{-\beta\omega}} e^{-\beta H_S} \nabla e^{\beta H_S} \rho = 0$ .

Deux situations:

- **Résonante:**  $\sin(\nu\sqrt{n})$  s'annule. La cavité est "divisée" en sous-systèmes indépendants de dimension finies: infinité d'états invariants.

# Action de $\mathcal{L}_\beta$ sur les états diagonaux

Si  $\rho = \sum_n \rho_n |n\rangle\langle n|$ , alors  $\mathcal{L}_\beta(\rho) = \sum_n (\mathcal{L}_\beta(\rho))_n |n\rangle\langle n|$  avec

$$(\mathcal{L}_\beta(\rho))_n = \frac{1}{1 + e^{-\beta\omega}} \left( (\cos^2(\nu\sqrt{n}) + e^{-\beta\omega} \cos^2(\nu\sqrt{n+1}))\rho_n + e^{-\beta\omega} \sin^2(\nu\sqrt{n})\rho_{n-1} + \sin^2(\nu\sqrt{n+1})\rho_{n+1} \right).$$

Avec  $(\nabla\rho)_n := \rho_n - \rho_{n-1}$  et  $(\nabla^*\rho)_n = \rho_n - \rho_{n+1}$ , on écrit

$$\mathcal{L}_\beta = \mathbb{1} - \nabla^* \frac{\sin^2(\nu\sqrt{N})}{1 + e^{-\beta\omega}} e^{-\beta\omega N} \nabla e^{\beta\omega N}.$$

**Conclusion:**  $\rho$  est invariant ssi  $\frac{\sin^2(\nu\sqrt{N})}{1 + e^{-\beta\omega}} e^{-\beta H_S} \nabla e^{\beta H_S} \rho = 0$ .

Deux situations:

- **Résonante:**  $\sin(\nu\sqrt{n})$  s'annule. La cavité est "divisée" en sous-systèmes indépendants de dimension finies: infinité d'états invariants.
- **Non-résonante:**  $\sin(\nu\sqrt{n})$  ne s'annule jamais.  $\rho$  est invariant ssi  $\nabla e^{\beta H_S} \rho = 0$ , i.e.  $\rho$  est l'état d'équilibre à température  $\beta^{-1}$ .

## Definition

Une application  $\phi$  sur  $\mathcal{J}_1(\mathcal{H})$  est dite:

- complètement positive (CP) si  $\phi \otimes \mathbb{1}$  est positive sur  $\mathcal{J}_1(\mathcal{H}) \otimes M_n(\mathbb{C})$ .
- ergodique si pour tout  $\rho \geq 0$ ,  $\rho \neq 0$ , il existe  $t_\rho > 0$  t.q.  $\exp(t_\rho \phi)(\rho) > 0$ .



## Definition

Une application  $\phi$  sur  $\mathcal{J}_1(\mathcal{H})$  est dite:

- complètement positive (CP) si  $\phi \otimes \mathbb{1}$  est positive sur  $\mathcal{J}_1(\mathcal{H}) \otimes M_n(\mathbb{C})$ .
- ergodique si pour tout  $\rho \geq 0$ ,  $\rho \neq 0$ , il existe  $t_\rho > 0$  t.q.  $\exp(t_\rho \phi)(\rho) > 0$ .

$r(\phi)$  : rayon spectral de  $\phi$ .

## Théorème (Schrader '00)

*Soit  $\phi$  une application positive sur  $\mathcal{J}_1$ , ergodique et t.q.  $r(\phi) = \|\phi\|_1$ . Si  $r(\phi)$  est valeur propre de  $\phi$  alors elle est simple et le vecteur propre correspondant peut être choisi  $> 0$ .*

# Le cas non-résonant: thermalisation de la cavité

## Definition

Une application  $\phi$  sur  $\mathcal{J}_1(\mathcal{H})$  est dite:

- complètement positive (CP) si  $\phi \otimes \mathbb{1}$  est positive sur  $\mathcal{J}_1(\mathcal{H}) \otimes M_n(\mathbb{C})$ .
- ergodique si pour tout  $\rho \geq 0$ ,  $\rho \neq 0$ , il existe  $t_\rho > 0$  t.q.  $\exp(t_\rho \phi)(\rho) > 0$ .

$r(\phi)$  : rayon spectral de  $\phi$ .

## Théorème (Schrader '00)

*Soit  $\phi$  une application positive sur  $\mathcal{J}_1$ , ergodique et t.q.  $r(\phi) = \|\phi\|_1$ . Si  $r(\phi)$  est valeur propre de  $\phi$  alors elle est simple et le vecteur propre correspondant peut être choisi  $> 0$ .*

## Remarque

*Si  $\phi$  est CP et préserve la trace alors  $r(\phi) = \|\phi\|_1 = 1$ .*

# Le cas non-résonant: thermalisation de la cavité

- $\mathcal{L}_\beta = \sum_{\sigma, \sigma' = \pm} V_{\sigma' \sigma} \cdot V_{\sigma' \sigma}^*$  est CP.

# Le cas non-résonant: thermalisation de la cavité

- $\mathcal{L}_\beta = \sum_{\sigma, \sigma' = \pm} V_{\sigma' \sigma} \cdot V_{\sigma' \sigma}^*$  est CP.
- $\sum_{\sigma, \sigma' = \pm} V_{\sigma' \sigma}^* V_{\sigma' \sigma} = \mathbb{1} \Rightarrow \mathcal{L}_\beta$  préserve la trace.

# Le cas non-résonant: thermalisation de la cavité

- $\mathcal{L}_\beta = \sum_{\sigma, \sigma' = \pm} V_{\sigma' \sigma} \cdot V_{\sigma' \sigma}^*$  est CP.
- $\sum_{\sigma, \sigma' = \pm} V_{\sigma' \sigma}^* V_{\sigma' \sigma} = \mathbb{1} \Rightarrow \mathcal{L}_\beta$  préserve la trace.

## Lemme

*Une application  $\phi = \sum V_i \cdot V_i^*$  CP sur  $\mathcal{J}_1(\mathcal{H})$  est ergodique ssi  $\forall \psi \neq 0 \in \mathcal{H}$  est cyclique pour  $\mathcal{A}$  l'algèbre engendrée par les  $V_i$ .*

# Le cas non-résonant: thermalisation de la cavité

- $\mathcal{L}_\beta = \sum_{\sigma, \sigma'=\pm} V_{\sigma'\sigma} \cdot V_{\sigma'\sigma}^*$  est CP.
- $\sum_{\sigma, \sigma'=\pm} V_{\sigma'\sigma}^* V_{\sigma'\sigma} = \mathbb{1} \Rightarrow \mathcal{L}_\beta$  préserve la trace.

## Lemme

Une application  $\phi = \sum V_i \cdot V_i^*$  CP sur  $\mathcal{J}_1(\mathcal{H})$  est ergodique ssi  $\forall \psi \neq 0 \in \mathcal{H}$  est cyclique pour  $\mathcal{A}$  l'algèbre engendrée par les  $V_i$ .

## Théorème

Dans le cas non-résonant,  $Z_\beta^{-1} e^{-\beta H_S}$  est l'unique état invariant de  $\mathcal{L}_\beta$ .

## Corollaire

Pour tout état initial  $\rho$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{L}_\beta^n(\rho) = Z_\beta^{-1} e^{-\beta H_S}.$$

# Fluctuations d'entropie

Si un atome entre dans l'état  $\sigma$  et sort dans l'état  $\sigma'$ , la variation d'énergie dans la cavité est  $\frac{\omega(\sigma-\sigma')}{2}$ .

# Fluctuations d'entropie

Si un atome entre dans l'état  $\sigma$  et sort dans l'état  $\sigma'$ , la variation d'énergie dans la cavité est  $\frac{\omega(\sigma-\sigma')}{2}$ .

Production d'entropie après  $n$  interactions:

$$\text{Ep}_n(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \beta \omega \frac{\sigma_k - \sigma'_k}{2}$$

où  $\tilde{\sigma} = (\sigma_n)_n$ .



# Fluctuations d'entropie

Si un atome entre dans l'état  $\sigma$  et sort dans l'état  $\sigma'$ , la variation d'énergie dans la cavité est  $\frac{\omega(\sigma-\sigma')}{2}$ .

Production d'entropie après  $n$  interactions:

$$\text{Ep}_n(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \beta \omega \frac{\sigma_k - \sigma'_k}{2}$$

où  $\tilde{\sigma} = (\sigma_n)_n$ .

La production d'entropie moyenne est alors

$$\begin{aligned} \overline{\text{Ep}_n} &= \sum_{\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'} \text{Ep}_n(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') \underbrace{\mathbb{P}_\rho(\sigma_1 \rightarrow \sigma'_1) \cdots \mathbb{P}_{T_{\sigma'_{n-1}\sigma_{n-1}} \circ \cdots \circ T_{\sigma'_1\sigma_1}(\rho)}(\sigma_n \rightarrow \sigma'_n)}_{=: \mathbb{P}_{\rho, n}(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}')} \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\rho, n}}(\text{Ep}_n). \end{aligned}$$

# Fluctuations d'entropie

Si un atome entre dans l'état  $\sigma$  et sort dans l'état  $\sigma'$ , la variation d'énergie dans la cavité est  $\frac{\omega(\sigma-\sigma')}{2}$ .

Production d'entropie après  $n$  interactions:

$$\text{Ep}_n(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \beta \omega \frac{\sigma_k - \sigma'_k}{2}$$

où  $\tilde{\sigma} = (\sigma_n)_n$ .

La production d'entropie moyenne est alors

$$\begin{aligned} \overline{\text{Ep}_n} &= \sum_{\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'} \text{Ep}_n(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') \underbrace{\mathbb{P}_\rho(\sigma_1 \rightarrow \sigma'_1) \cdots \mathbb{P}_{T_{\sigma'_{n-1}\sigma_{n-1}} \circ \cdots \circ T_{\sigma'_1\sigma_1}(\rho)}(\sigma_n \rightarrow \sigma'_n)}_{=: \mathbb{P}_{\rho,n}(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}')} \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\rho,n}}(\text{Ep}_n). \end{aligned}$$

On s'intéresse aux fluctuations de la production d'entropie.

⇒ On étudie

$$e(\alpha) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\rho,n}} (e^{\alpha n \text{Ep}_n}).$$

+ théorème de Gartner-Ellis ⇒ principe de grandes déviations.

# La fonction génératrice pour l'entropie

En utilisant

- $\mathbb{P}_{\rho,n}(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') = \text{Tr} (Q_{\sigma'_n \sigma_n} \circ \cdots \circ Q_{\sigma'_1 \sigma_1}(\rho)),$
- $Q_{\sigma' \sigma}(\rho) = V_{\sigma' \sigma} \rho V_{\sigma' \sigma}^*,$
- Pour tous  $\sigma, \sigma'$  et  $\gamma$ :  $\exp(-\gamma(\sigma' - \sigma)/2) V_{\sigma' \sigma} = e^{\gamma N} V_{\sigma' \sigma} e^{-\gamma N},$

# La fonction génératrice pour l'entropie

En utilisant

- $\mathbb{P}_{\rho,n}(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') = \text{Tr} (Q_{\sigma'_n \sigma_n} \circ \cdots \circ Q_{\sigma'_1 \sigma_1}(\rho)),$
- $Q_{\sigma' \sigma}(\rho) = V_{\sigma' \sigma} \rho V_{\sigma' \sigma}^*,$
- Pour tous  $\sigma, \sigma'$  et  $\gamma$ :  $\exp(-\gamma(\sigma' - \sigma)/2) V_{\sigma' \sigma} = e^{\gamma N} V_{\sigma' \sigma} e^{-\gamma N},$

on peut écrire

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\rho,n}} (e^{\alpha n \text{Ep}_n}) = \text{Tr}(\mathcal{L}_{\beta,\alpha}^n(\rho))$$

où  $\mathcal{L}_{\beta,\alpha} = e^{\alpha \beta H_S} \mathcal{L}_{\beta} e^{-\alpha \beta H_S}.$

# La fonction génératrice pour l'entropie

En utilisant

- $\mathbb{P}_{\rho,n}(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') = \text{Tr} (Q_{\sigma'_n \sigma_n} \circ \cdots \circ Q_{\sigma'_1 \sigma_1}(\rho)),$
- $Q_{\sigma' \sigma}(\rho) = V_{\sigma' \sigma} \rho V_{\sigma' \sigma}^*,$
- Pour tous  $\sigma, \sigma'$  et  $\gamma$ :  $\exp(-\gamma(\sigma' - \sigma)/2) V_{\sigma' \sigma} = e^{\gamma N} V_{\sigma' \sigma} e^{-\gamma N},$

on peut écrire

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\rho,n}} (e^{\alpha n \text{Ep}_n}) = \text{Tr}(\mathcal{L}_{\beta,\alpha}^n(\rho))$$

où  $\mathcal{L}_{\beta,\alpha} = e^{\alpha \beta H_S} \mathcal{L}_{\beta} e^{-\alpha \beta H_S}.$

$\Rightarrow$  On doit étudier  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\text{Tr}(\mathcal{L}_{\beta,\alpha}^n(\rho))) = e(\alpha).$

# La fonction génératrice pour l'entropie

En utilisant

- $\mathbb{P}_{\rho,n}(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') = \text{Tr} (Q_{\sigma'_n \sigma_n} \circ \cdots \circ Q_{\sigma'_1 \sigma_1}(\rho)),$
- $Q_{\sigma' \sigma}(\rho) = V_{\sigma' \sigma} \rho V_{\sigma' \sigma}^*,$
- Pour tous  $\sigma, \sigma'$  et  $\gamma$ :  $\exp(-\gamma(\sigma' - \sigma)/2) V_{\sigma' \sigma} = e^{\gamma N} V_{\sigma' \sigma} e^{-\gamma N},$

on peut écrire

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\rho,n}} (e^{\alpha n \text{Ep}_n}) = \text{Tr}(\mathcal{L}_{\beta,\alpha}^n(\rho))$$

où  $\mathcal{L}_{\beta,\alpha} = e^{\alpha \beta H_S} \mathcal{L}_{\beta} e^{-\alpha \beta H_S}.$

$\Rightarrow$  On doit étudier  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\text{Tr}(\mathcal{L}_{\beta,\alpha}^n(\rho))) = e(\alpha).$

**Résultat:**  $e(\alpha)$  existe et vaut 0! On est à l'équilibre: pas de production d'entropie.

On envoie alternativement des atomes à température  $\beta_1^{-1}$  et  $\beta_2^{-1}$ .

On envoie alternativement des atomes à température  $\beta_1^{-1}$  et  $\beta_2^{-1}$ .  
Il faut cette fois étudier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{Tr}(\mathcal{L}_{\beta_n, \alpha} \cdots \mathcal{L}_{\beta_1, \alpha}(\rho))$$

avec  $\beta_k = \beta_1$  si  $k$  impair et  $\beta_k = \beta_2$  si  $k$  pair.



On envoie alternativement des atomes à température  $\beta_1^{-1}$  et  $\beta_2^{-1}$ .  
Il faut cette fois étudier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{Tr}(\mathcal{L}_{\beta_n, \alpha} \cdots \mathcal{L}_{\beta_1, \alpha}(\rho))$$

avec  $\beta_k = \beta_1$  si  $k$  impair et  $\beta_k = \beta_2$  si  $k$  pair.

Résultat:

- $e(\alpha)$  existe.

On envoie alternativement des atomes à température  $\beta_1^{-1}$  et  $\beta_2^{-1}$ .  
Il faut cette fois étudier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{Tr}(\mathcal{L}_{\beta_n, \alpha} \cdots \mathcal{L}_{\beta_1, \alpha}(\rho))$$

avec  $\beta_k = \beta_1$  si  $k$  impair et  $\beta_k = \beta_2$  si  $k$  pair.

Résultat:

- ❶  $e(\alpha)$  existe.
- ❷ Dans le cas résonant (ou  $\mathcal{S}$  de dimension finie), on a  $e(\alpha) = e(1 - \alpha)$ : c'est la symétrie de Gallavotti-Cohen. Ça correspond à

$$\frac{\mathbb{P}_{\rho, n}(\text{Ep}_n = \eta)}{\mathbb{P}_{\rho, n}(\text{Ep}_n = -\eta)} \sim e^{n\eta}.$$