Leçon 117 : Valeurs propres et vecteurs propres. Recherche et utilisation.

Exercice 1 (Interprétation géométrique)**.** Pour chacune des matrices suivantes,

- déterminer ses valeurs propres et une base de vecteurs propres ;
- donner une interprétation géométrique de l'application linéaire associée (par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$).

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer ses valeurs propres avec un minimum de calculs.

Exercice 3 (EDO pour une chaîne d'oscillateurs)**.** Le système d'EDO linéaires du second ordre

$$\begin{aligned} m x_1'' &= k(x_2 - x_1) \\ M x_2'' &= k(x_1 - 2x_2 + x_3) \\ m x_3'' &= k(x_2 - x_3) \end{aligned}$$

décrit les positions de trois particules, de masses m, M et m, reliées par des ressorts de constante k. On considère le cas

$$\frac{k}{m} = 2\,, \qquad \frac{k}{M} = 1\,. \tag{1}$$

1. Écrire le système sous la forme $x'' = Ax$ avec $x \in \mathbb{R}^3$ et A une matrice.
2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A.
3. Soit P une matrice inversible telle que PAP^{-1} soit diagonale. Écrire le système satisfait par $y = Px$.
4. Résoudre l'équation satisfaite par y.