Leçon 117 : Valeurs propres et vecteurs propres. Recherche et utilisation. Corrigé des exercices

Exercice 1 (Interprétation géométrique)**.** On s'est donné les matrices

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Les valeurs propres de P sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$. En effet, P est de rang 1, et de trace 1. Des vecteurs propres associés sont $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. P décrit la projection orthogonale selon v_1 sur l'espace de dimension 1 engendré par v_2. On vérifie que $P^2 = P$, ce qui caractérise les projections.

2. Le polynôme caractéristique de R est

$$(\lambda - \cos(\alpha))^2 + \sin^2(\alpha) = \lambda^2 - 2\cos(\alpha)\lambda + 1 \, .$$

   Ses racines sont $\lambda_{1,2} = \cos(\alpha) \pm \mathrm{i}\sin(\alpha) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\alpha}$. Des vecteurs propres associés sont $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right)$ et $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{smallmatrix}\right)$. On vérifie que R décrit une isométrie, puisque $RR^\top = I$ est la matrice identité, et par conséqent $\langle Rx, Rx\rangle = \langle x, x\rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. R décrit une rotation.

3. On a $\mathrm{Tr}(S) = 0$ et $\det(S) = -1$. Par conséquent, les valeurs propres de S sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$. Des vecteurs propres associés sont $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. S représente une symétrie orthogonale d'axe porté par v_1. On peut remarquer que $S^2 = I$, on dit que S est une involution. S est également une isométrie, puisque $SS^\top = I$.

Exercice 2. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 2. Elle a donc deux valeurs propres nulles, disons $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Pour déterminer les autres valeurs propres sans calculer le polynôme caractéristique, on peut considérer les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \, , \tag{1}$$

qui forment une base de l'image. On a $Av_1 = 2v_1 + 2v_2$ et $Av_2 = 2v_1$. Dans la base (v_1, v_2), la matrice de l'application linéaire associée à A s'écrit donc

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \, . \tag{2}$$

En calculant son polynôme caractéristique, on trouve que les valeurs propres manquantes sont $\lambda_{3,4} = 1 \pm \sqrt{5}$.

Exercice 3 (EDO pour une chaîne d'oscillateurs)**.** On considère le système d'EDO linéaires du second ordre

$$\begin{aligned} mx_1'' &= k(x_2 - x_1) \\ Mx_2'' &= k(x_1 - 2x_2 + x_3) \\ mx_3'' &= k(x_2 - x_3) \end{aligned}$$

avec $\frac{k}{m} = 2$ et $\frac{k}{M} = 1$.

1. Le système s'écrit $x'' = Ax$ avec

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} .$$

2. La matrice A est de rang 2, car la somme des lignes (et des colonnes) est nulle, et A a clairement deux colonnes linéairement indépendantes. A a donc une valeur propre nulle, disons $\lambda_1 = 0$. Pour trouver les autres valeurs propres, on peut soit calculer le polynôme caractéristique, soit procéder comme à l'exercice précédent. On obtient alors $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = -4$. Des vecteurs propres associés sont

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

3. Soit P une matrice inversible telle que PAP^{-1} soit diagonale. Alors $y = Px$ satisfait le système $y = PAP^{-1}y$, qui s'écrit en composantes

$$\begin{aligned} y_1'' &= 0 \\ y_2'' &= -2y_2 \\ y_3'' &= -4y_3 . \end{aligned}$$

4. Les équations satisfaites par y_1, y_2 et y_3 sont indépendantes. Leur solution générale s'écrit

$$\begin{aligned} y_1(t) &= a_1 + b_1 t \\ y_2(t) &= a_2 \cos(\sqrt{2}t) + b_2 \sin(\sqrt{2}t) \\ y_3(t) &= a_3 \cos(2t) + b_3 \sin(2t) , \end{aligned}$$

où les constantes a_i et b_i peuvent être exprimées en fonction des positions et vitesses initiales $y_i(0)$ et $y_i'(0)$. La solution générale de l'EDO est une combinaison linéaire d'un mouvement de translation (y_1), d'une oscillation symétrique (y_2) et d'une oscillation asymétrique de fréquence plus élevée (y_3).