

**Leçon 304 : Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans  $\mathbb{Z}$ .****Exercice 1.**

1. Montrer à l'aide de l'algorithme d'Euclide que 11 et 69 sont premiers entre eux.
2. Trouver toutes les solutions entières de l'équation

$$11u + 69v = 1 .$$

3. Même question pour l'équation

$$23u + 33v = 1 .$$

4. Même question pour l'équation

$$3u + 253v = 1 .$$

**Exercice 2** (Théorème des restes chinois).

Soient  $n_1, \dots, n_k$  des entiers naturels deux à deux premiers entre eux.

1. Montrer que  $(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z})$  est isomorphe (en tant qu'anneau) à

$$\mathbb{Z}/(n_1 \dots n_k)\mathbb{Z} .$$

2. Application : 3 comètes  $C_1, C_2, C_3$  passent près de la Terre tous les 3 ans, 11 ans et 23 ans respectivement. La comète  $C_1$  est passée l'année dernière, la  $C_2$  il y a 2 ans, et la  $C_3$  il y a 4 ans. Dans combien de temps les trois comètes visiteront-elle la Terre la même année?