

Leçon 304 : Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans \mathbb{Z} .

Exercice 1.

1. Montrer à l'aide de l'algorithme d'Euclide que 11 et 69 sont premiers entre eux.
2. Trouver toutes les solutions entières de l'équation

$$11u + 69v = 1.$$

3. Même question pour l'équation

$$23u + 33v = 1.$$

4. Même question pour l'équation

$$3u + 253v = 1.$$

Exercice 2 (Théorème des restes chinois).

Soient n_1, \dots, n_k des entiers naturels deux à deux premiers entre eux.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z})$ est isomorphe (en tant qu'anneau) à

$$\mathbb{Z}/(n_1 \dots n_k)\mathbb{Z}.$$

2. Application : 3 comètes C_1, C_2, C_3 passent près de la Terre tous les 3 ans, 11 ans et 23 ans respectivement. La comète C_1 est passée l'année dernière, la C_2 il y a 2 ans, et la C_3 il y a 4 ans. Dans combien de temps les trois comètes visiteront-elle la Terre la même année?