

Leçon 314 : Exercices illustrant l'utilisation de systèmes d'équations linéaires.

Exercice 1 (Équation différentielle).

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre (E)

$$(t^2 + t)y''(t) + (3t + 1)y'(t) + y(t) = 0 .$$

1. On suppose que (E) admet, sur un intervalle $]-R, R[$ avec $R > 0$, une solution sous forme de série entière

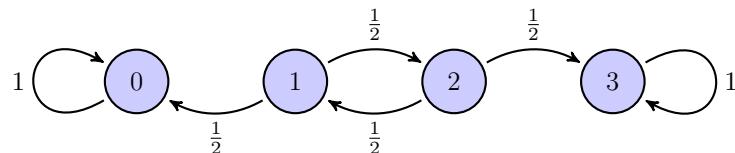
$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n .$$

Déterminer un système d'équations linéaires satisfait par les coefficients a_n .

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n + a_{n+1} = 0$. En déduire une relation entre a_n et a_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière. En déduire une solution particulière de l'équation (E).

Exercice 2 (Probabilités).

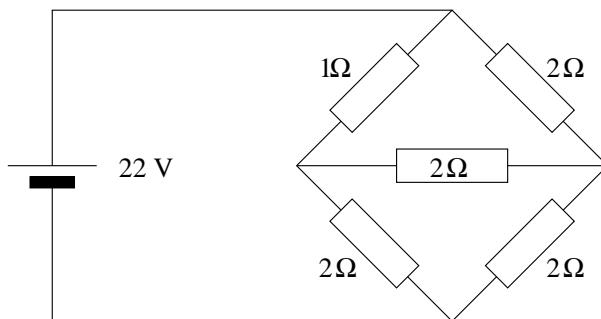
Une puce se déplace au hasard sur le graphe suivant. À partir des sommets 1 et 2, elle a une probabilité de $\frac{1}{2}$ de se déplacer à droite ou à gauche. Si elle se trouve sur les sommets 0 ou 3, elle ne se déplace pas. La puce fait des sauts successifs jusqu'à ce qu'elle atteigne soit 0, soit 3, les directions des sauts étant indépendantes.



1. Pour $x \in \{1, 2\}$, soit p_x la probabilité, partant du sommet x , que la puce finisse par atteindre le sommet 0. Écrire un système d'équations linéaires satisfait par p_1 et p_2 .
2. Résoudre ce système linéaire.
3. Généraliser au cas d'un graphe à $N + 1$ sommets numérotés de 0 à N , les pas autorisés étant encore du sommet $x \in \{1, 2, \dots, N\}$ vers ses deux voisins, avec probabilités $\frac{1}{2}$.

Exercice 3 (Circuit électrique).

On considère le circuit électrique suivant:



On admet que

- Le potentiel électrique U est constant dans chaque fil électrique.
- Le courant électrique i à travers une résistance est lié à la différence de potentiel U entre ses extrémités par la relation

$$U = Ri$$

où R est la valeur de la résistance.

- Loi des noeuds de Kirchhoff : en chaque noeud la somme algébrique des courants électriques est nulle.
- Loi des mailles de Kirchhoff : la somme algébrique des différences de potentiel sur chaque maille du circuit est nulle.

On demande de calculer le courant émis par la source.