Inégalités en analyse et en probabilités – Leçon 244

Rappels de théorie

Inégalité de Cauchy–Schwarz

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des réels $\mathbb{R}$, soit le corps des complexes $\mathbb{C}$. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E. Alors

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leqslant \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \qquad \forall x,y\in E\ .$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Inégalité de Bessel

Soit E un espace vectoriel comme ci-dessus muni d'un produit scalaire. Soit $e_1,\dots,e_n$ un ensemble orthonormé de vecteurs, c'est-à-dire tel que

$$\langle e_i,e_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon .}\end{cases}$$

Alors pour tout $x\in E$,

$$\sum_{i=1}^n |\langle x,e_i\rangle|^2 \leqslant \langle x,x\rangle\ .$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si

$$x = \sum_{i=1}^n \langle e_i,x\rangle e_i\ .$$

Inégalité de Markov

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle a valeurs positives sur cet espace. Alors

$$\mathbb{P}\{X\geqslant a\} \leqslant \frac{1}{a}\mathbb{E}(X) \qquad \forall a>0\ .$$

Inégalité de Jensen

On rappelle qu'une fonction $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est convexe si

$$\varphi(tx+(1-t)y) \leqslant t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)$$

pour tout choix de $x,y\in\mathbb{R}$ et de $t\in[0,1]$. La fonction φ est concave si l'inégalité inverse a lieu, c'est-à-dire si $-\varphi$ est convexe.

L'inégalité de Jensen affirme que si X est une variable aléatoire réelle et $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est convexe alors

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(X))$$

pourvu que les deux espérances existent. L'égalité a lieu si et seulement si φ est linéaire ou s'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}\{X=c\}=1$.

Si φ est concave, alors l'inégalité inverse

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \geqslant \mathbb{E}(\varphi(X))$$

a lieu.

Variance, covariance, écart-type, corrélation

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ et $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$.

- La covariance de X et Y est définie par

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big([X - \mathbb{E}(X)][Y - \mathbb{E}(Y)]\Big) .$$

- La variance de X est définie par $\operatorname{Var}(X) = \operatorname{cov}(X,X)$.
- L'écart-type de X est défini par $\sigma(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}$.
- Si $\sigma(X) > 0$ et $\sigma(Y) > 0$, on définit le coefficient de corrélation de X et Y par

$$\rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} .$$

Exercices

Exercice 1 (Une preuve possible de l'inégalité de Cauchy–Schwarz)**.**

1. On fixe $x, y \in E$. Soit la fonction $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ définie par

$$f(a,b) = \langle ax + by, ax + by \rangle .$$

   Quelle est son image?

2. Trouver une matrice symétrique M telle que

$$f(a,b) = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} .$$

   (a) Que peut-on dire du déterminant de M?
   (b) Si $\det M = 0$, que peut-on dire des valeurs propres de M?
   (c) Que peut-on en conclure sur la fonction f?

Exercice 2 (Preuves de l'inégalité de Markov)**.**

1. **Cas discret.** On suppose $\Omega = \mathbb{N}$ et on écrit $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$.
   Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ et soit $a > 0$. Ecrire explicitement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{P}\{X \geqslant a\}$ sous forme de sommes, et montrer que

$$\mathbb{E}(X) \geqslant a\mathbb{P}\{X \geqslant a\} .$$

2. **Cas d'une variable aléatoire réelle à densité.** Soit X une variable aléatoire réelle positive admettant une densité f et soit $a > 0$. Ecrire explicitement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{P}\{X \geqslant a\}$ sous forme d'intégrales, et montrer que

$$\mathbb{E}(X) \geqslant a\mathbb{P}\{X \geqslant a\} .$$

3. **Cas général*.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ sur cet espace. Soit $Y = 1_{\{X \geqslant a\}}$ la variable aléatoire

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \geqslant a , \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

   Montrer que

$$\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(XY) \geqslant a\mathbb{P}\{X \geqslant a\} .$$

Exercice 3 (L'inégalité de Jensen)**.**

1. Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé discret ne prenant que deux valeurs : il existe $a \neq b \in \mathbb{R}$ et $p \in [0,1]$ tels que
$$\mathbb{P}\{X = a\} = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\{X = b\} = 1 - p\ .$$
Vérifier l'inégalité de Jensen dans ce cas, et en donner une interprétation géométrique.
2. Soit X une variable aléatoire réelle admettant la densité f. Traduire l'inégalité de Jensen sous forme d'une relation entre intégrales.
3. Comparer $|\mathbb{E}(X)|$ et $\mathbb{E}(|X|)$ pour une variable aléatoire réelle quelconque X.

Exercice 4 (Espaces vectoriels normés)**.**
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour tout $x \in E$ on pose
$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}\ .$$
Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

Exercice 5 (Espaces L^1 et L^2)**.**
Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$. L'ensemble E des fonctions continues par morceaux $f : I \to \mathbb{C}$ admet une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Pour deux fonctions $f, g \in E$, on définit
$$\langle f, g \rangle = \int_I \overline{f(x)} g(x)\, \mathrm{d}x\ .$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
2. Si $\langle f, f \rangle < \infty$, on dit que f appartient à l'espace $L^2(I, \mathbb{C})$. Si
$$\int_I |f(x)|\, \mathrm{d}x < \infty\ ,$$
on dit que f appartient à l'espace $L^1(I, \mathbb{C})$. Montrer que $L^2(I, \mathbb{C}) \subset L^1(I, \mathbb{C})$.

Exercice 6 (Covariance et corrélation)**.**

1. Sous quelle condition $\langle X, Y \rangle = \operatorname{cov}(X, Y)$ est-il un produit scalaire?
2. En déduire que
$$|\operatorname{cov}(X, Y)| \leqslant \sqrt{\operatorname{Var}(X) \operatorname{Var}(Y)}$$
3. Quelles sont les valeurs possibles du coefficient de corrélation de X et Y?
4. Sous quelle condition a-t-on $|\rho_{X,Y}| = 1$?

Exercice 7 (Inégalité de Bienaymé–Tchebychev)**.**
Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(X^2) < \infty$.

1. Montrer que $|\mathbb{E}(X)| < \infty$.
2. Montrer l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev: pour tout $a > 0$,
$$\mathbb{P}\{|X - \mathbb{E}(X)| > a\} \leqslant \frac{1}{a^2} \operatorname{Var}(X)\ .$$

Exercice 8 (La loi faible des grands nombres)**.**
Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires de même loi, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$ pour tout i, et que $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$ pour tout $i \neq j$. Soit $\mu = \mathbb{E}(X_1)$. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

1. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P} \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right\} = 0 \ .$$

Exercice 9 (Equivalence entre inégalités de Cauchy–Schwarz et de Bessel*)**.**

1. Montrer que si $y \neq 0$, l'inégalité de Bessel avec $n = 1$ et e_1 colinéaire à y implique l'inégalité de Cauchy–Schwarz.
2. Soit $e_1, \dots, e_n$ un ensemble orthonormé de vecteurs. Justifier l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \langle x, e_i \rangle - \sum_{j \neq i} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle \right|^2 \ .$$

   Mettre en facteur le vecteur e_i dans chaque terme, appliquer l'inégalité de Cauchy–Schwarz et développer le produit. En déduire l'inégalité de Bessel.

Exercice 10 (Intégration par parties*)**.**
Soit X une variable aléatoire réelle positive sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante, continûment différentiable, telle que $\varphi(0) = 0$.

1. Montrer que si $\mathbb{E}(\varphi(X)) < \infty$, alors

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_0^\infty \varphi'(t) \mathbb{P}\{X > t\} \, \mathrm{d}t \ .$$

2. En déduire que si $\mathbb{E}(X) < \infty$, alors

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) \leqslant \varphi(\mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(X) \int_{\mathbb{E}(X)}^\infty \frac{\varphi'(t)}{t} \, \mathrm{d}t \ .$$

3. Soit $p > 0$. Appliquer l'inégalité ci-dessus au cas $\varphi(t) = t^p$. Pour quelles valeurs de p le résultat est-il utile? Comparer avec le résultat de l'inégalité de Jensen.

Exercice 11 (Inégalité de type Chernoff–Cramér pour la loi binomiale*).
Soient $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre 1/2. Soit

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \; .$$

1. Quelle est la loi de S_n, son espérance et sa variance?
2. Soit $\lambda > 0$ et $Z_i = \mathrm{e}^{\lambda(X_i - 1/2)}$. Calculer $\mathbb{E}\,(Z_i)$ pour tout i.
3. En déduire $\mathbb{E}\,(\mathrm{e}^{\lambda[S_n - \mathbb{E}\,(S_n)]})$ pour tout n.
4. Soit $t > 0$. A l'aide du résultat précédent, trouver une fonction f_t telle que

   $$\mathbb{P}\left\{S_n - \mathbb{E}\,(S_n) > nt\right\} \leqslant \mathrm{e}^{-nf_t(\lambda)}$$

   pour tout $\lambda, t > 0$.
5. Calculer le maximum $I(t)$ de $\lambda \mapsto f_t(\lambda)$, et conclure que la probabilité ci-dessus est majorée par $\mathrm{e}^{-nI(t)}$. Représenter graphiquement la fonction $I(t)$ sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$.
6. Majorer la probabilité d'obtenir plus de 600 Pile en jetant 1000 fois une pièce de monnaie équilibrée. Comparer avec le résultat de l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev.

Un corrigé partiel sera disponible à l'adresse
`http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/berglund/agreg.html`