Isospectralité et polygones

15 avril 2021

Objectifs

- Associer à un polygone P une suite croissante $\mathrm{spec}(P) = (\lambda_k)_{k \geqslant 0}$ et s'intéresser au problème inverse : *la donnée de* spec(P) *détermine-t-elle P ?*

- Construire des polygones isospectraux (qui ont le même spectre) en utilisant un peu de théorie des groupes.

- Inversement, trouver des caractéristiques géométriques de P déterminées par spec(P).

Le problème spectral

$$(\mathcal{S}_\lambda) \begin{cases} \text{(s)}_\lambda & \Delta u \;=\; \lambda u, & \Delta = -\partial_x^2 - \partial_y^2. \\[2ex] \text{(bc)} & u_{|\partial P} \;=\; 0, & \text{cond. bord Dirichlet.} \\[2ex] \text{(Eb)} & \displaystyle\int_P |u|^2 + |\nabla u|^2 < \infty. & \end{cases}$$

L'ensemble des u solutions de $(\mathcal{S}_\lambda)$ est un espace vectoriel, on note m_λ sa dimension : c'est la multiplicité de λ.

L'ensemble des λ tels que $m_\lambda > 0$ forme une suite croissante qui tend vers $+\infty$: c'est le spectre de P (avec multiplicité)

$$\text{spec}(P) = \{\lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots\}$$

Question de régularité

L'équation $(\mathrm{s})_\lambda \quad \Delta u = \lambda u$ peut être remplacée par la formulation variationelle suivante :

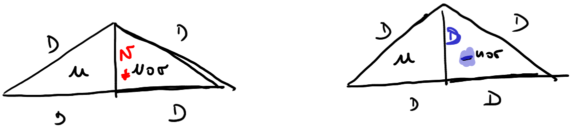
$$(\mathrm{w})_\lambda \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(P), \quad \int_P \nabla u \nabla \varphi = \lambda \int_P u\varphi.$$

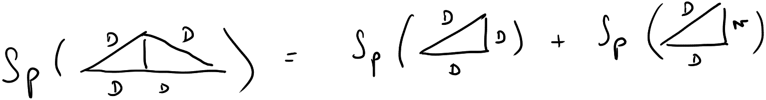
Lemme

Soit $u \in H^1(P)$ solution de $(\mathrm{w})_\lambda$ alors u est en fait $C^\infty(\mathring{P})$ et toutes ses dérivées partielles se prolongent de façon continue à $\bar{P} \setminus \Sigma$ où Σ est l'ensemble des sommets du polygone.

- Le lemme précédent donne un sens à la condition au bord.
- Autres conditions au bord Neumann ($\partial_\nu u_{|\partial P} = 0$), Dirichlet-Neumann.
- La condition (Eb) est nécessaire à cause des coins.

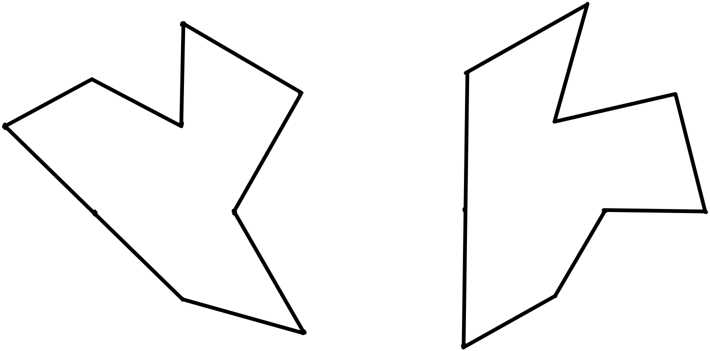
- Deux polygones isométriques (directement ou indirectement) ont même spectre.
- *Peut-on entendre la forme d'un tambour ?* Existe-t-il des polygones isospectraux non-isométriques ?



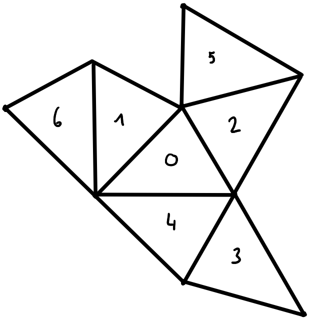


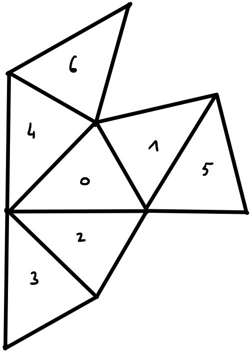
La réponse est non !

Ces deux polygones ont le même spectre.



Découpages et Transplantations.





$$u \longmapsto \vec{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_6 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_6 \end{pmatrix} = T\vec{u} \longmapsto v.$$

Recollement de fonctions propres

Lemme

Soient deux triangles T_1 et T_2 recollés le long du coté c. Soit v_i dans T_i qui vérifient $(\mathrm{s})_\lambda$. La fonction v ainsi définie dans $T_1 \cup T_2$ vérifie $(\mathrm{s})_\lambda$ si et seulement si :

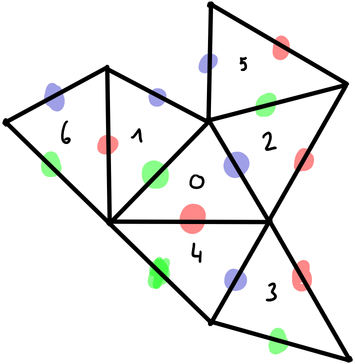
$$u_{1|c} = u_{2|c},$$
$$\partial_{\nu_1} u_{1|c} = -\partial_{\nu_2} u_{2|c}.$$

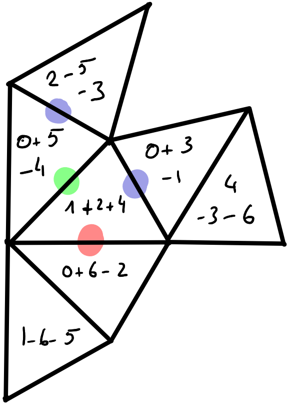
(La fonction u et ses dérivées partielles sont continues au passage de c.)

C'est une conséquence de la formule de Green.

Il s'agit donc de trouver une transplantation T telle que $T\vec{u}$ vérifie ces conditions de recollement.

Une transplantation

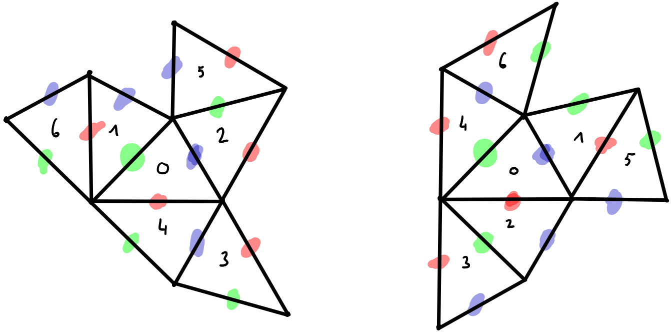




On vérifie par inspection que les conditions de recollement sont satisfaites (Attention aux symétries).

Pourquoi ça marche ? 1/2

Les deux polygones sont construits à l'aide d'une brique élémentaire (ici un triangle) et un schéma de recollement. Ce schéma peut être encodé dans 3 permutations.



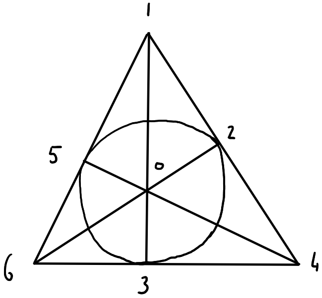
		P	$\tilde{P}$
a	$=$	$(0\,1)(2\,5)$	$(0\,4)(2\,3)$
b	$=$	$(0\,2)(4\,3)$	$(0\,1)(4\,6)$
c	$=$	$(0\,4)(1\,6)$	$(0\,2)(1\,5)$

Pourquoi ça marche ? 2/2

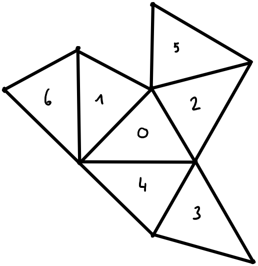
$a = (01)(25)$ $\quad$ $c = (04)(16)$ $\quad$ // $\quad$ $\tilde{a} = (04)(23)$ $\quad$ $\tilde{c} = (02)(15)$

$b = (02)(43)$ $\quad$ $\tilde{b} = (01)(46)$

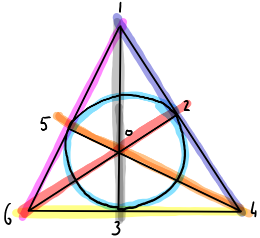
On peut interpréter a, b, et c comme des automorphismes du plan de Fano et T comme la matrice d'incidence ; $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ et $\tilde{c}$ sont alors les automorphismes duaux.

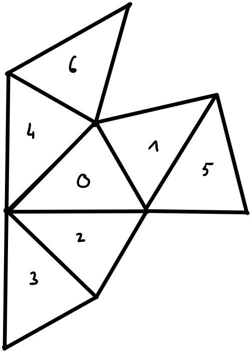


Résumé



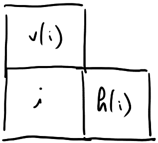
$$\underbrace{\begin{aligned} a &= (01)(25) \\ b &= (02)(34) \\ c &= (04)(12) \end{aligned}}_{\text{points}} \qquad \underbrace{\begin{aligned} \tilde{a} &= (04)(23) \\ \tilde{b} &= (01)(46) \\ \tilde{c} &= (02)(15) \end{aligned}}_{\text{droites.}}$$

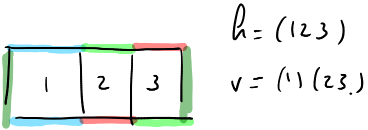


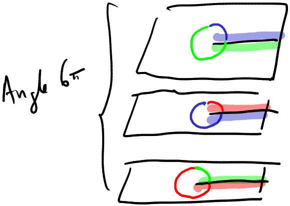


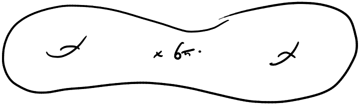
Généralisations

On peut changer de brique élémentaire, et de combinatoire.









Surface à petits carreaux. Peut-on mieux comprendre les transplantations ?

Avec des revêtements : la condition de Sunada

Théorème

Soit M_0 une variété riemannienne et M un revêtement normal de M_0 associé au groupe G. Si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes de G vérifiant la condition

$$\forall g \in G, \quad \mathrm{card}\, [g] \cap H_1 = \mathrm{card}\, [g] \cap H_2,$$

alors les variétés $M_1 = M/H_1$ et $M_2 = M/H_2$ sont isospectrales.

- Il reste à vérifier que M_1 et M_2 ne sont pas isométriques.
- Généralisation de Gordon-Webb-Wolpert aux orbifolds.

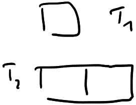
Décomposition spectrale d'une surface à petits carreaux

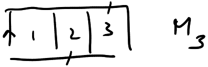
- On associe un spectre à chaque représentation de G.
- Deux représentations isomorphes ont le même spectre. L'entrelacement donne la transplantation.
- Les surfaces de translations sont associées à des représentations par matrices de permutations dites *régulières* et *quasi-régulières*. La condition de Sunada entraîne que les deux représentations quasi-régulières associées à H_1 et H_2 sont isomorphes.

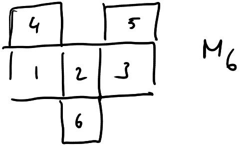
Un exemple

$h = (123) \quad v = (1)(23) \quad G = S_3$

t representation triviale, ε signature, e rep. irr. de dim 2.







$$Sp(T_1) = Sp(\Delta_t)$$

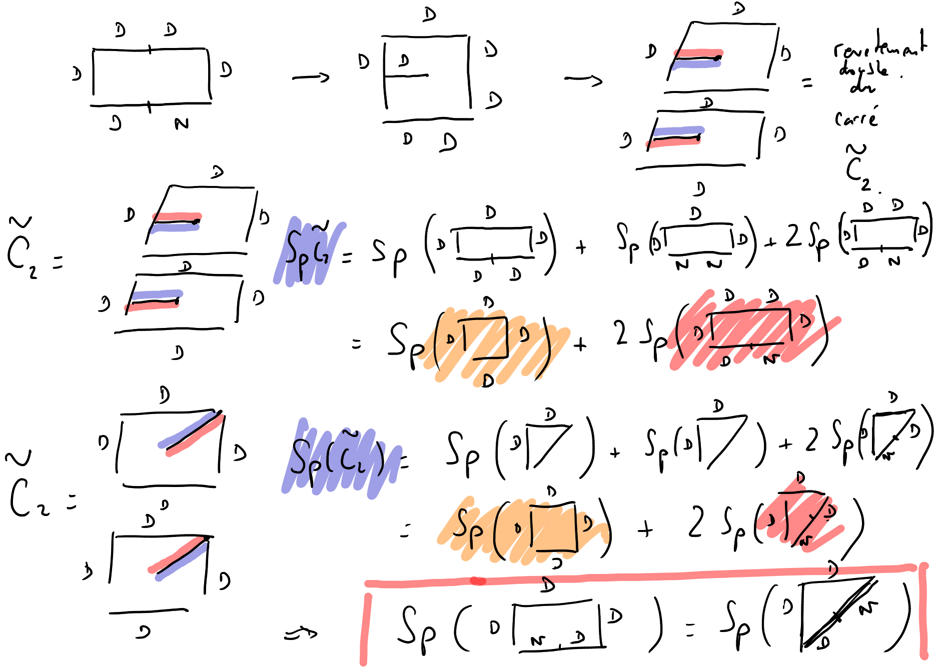
$$Sp(T_2) = Sp(\Delta_t) + Sp(\Delta_\varepsilon)$$

$$Sp(M_3) = Sp(\Delta_t) + Sp(\Delta_e)$$

$$Sp(M_6) = Sp(\Delta_t) + Sp(\Delta_\varepsilon) + 2\,Sp(\Delta_e)$$ (representation regulière)

$$Sp(M_6) + 2\,Sp(T_1) = 2\,Sp(M_3) + Sp(T_2)$$

Le retour des symétries



Conclusion provisoire

- Il est possible de construire des polygones isospectraux avec des méthodes algébriques.
- La question de l'isospectralité reste posée en restreignant la classe des domaines étudiés : peut-on entendre un polygone convexe ?
- Il faut alors chercher des caractéristiques géométriques déterminées par le spectre.

Théorème - Durso / Grieser-Maronna

Les triangles euclidiens sont spectralement déterminés.

Quelques références

- *T. Sunada*, Riemannian coverings and isospectral manifolds. Ann. Math. (2) 121, 169–186 (1985)
- *C. Gordon, D. Webb, S. Wolpert*, Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds. Invent. Math. 110, No. 1, 1-22 (1992).
- *P. Bérard*, Transplantation et Isospectralité, Math. Ann. 292, No. 3, 547–560 (1992)
- *P. Buser, J. Conway, P. Doyle, K.-D. Semmler*, Some planar isospectral domains, Int. Math. Res. Not. 1994, No. 9, 391–400 (1994)
- *O. Giraud*, Finite geometries and diffractive orbits in isospectral billiards. J. Phys. A, Math. Gen. 38, No. 27, L447–L483 (2005)
- *D. Grieser, S. Maronna*, Hearing the shape of a triangle. Notices Am. Math. Soc. 60, No. 11, 1440–1447 (2013)