

A propos d'un modèle de digestion anaérobie avec recirculation

Groupe de Travail Maths-Bio Orléans -Tours

17 décembre 2020

ALAIN RAPAPORT
UMR MISTEA - Montpellier

travaux en commun avec

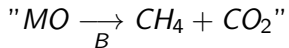
J. Harmand (INRAE Narbonne)

Z. Mghazli, S. Ouchtout (U. Kenitra)

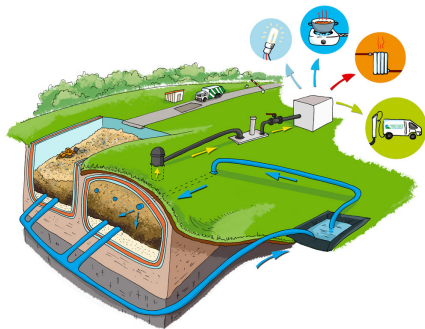
Z. Belhachmi (U. Strasbourg)

Le contexte

- ▶ matière organique dégradée par des micro-organismes en condition anaérobie



- ▶ valorisation des déchets par captage du biogaz



Dégradation anaérobie de la matière organique

- ▶ hydrolyse :

$$\dot{X} = -K_h X \quad (\text{matière organique non soluble})$$

- ▶ méthanogénèse :

$$\begin{cases} \dot{S} = -\frac{1}{Y} \mu(S) B & (\text{matière organique soluble}) \\ \dot{B} = (\mu(S) - K_d) B & (\text{biomasse}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{sorties : } \begin{cases} \frac{d}{dt} [CO_2] = (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \\ \frac{d}{dt} [CH_4] = f_2 \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \end{cases}$$

Couplage entre dégradations

- ▶ matière organique non soluble → matière organique soluble

(cf Rouez 2008)

$$\begin{cases} \dot{X} = -K_h X \\ \dot{S} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B \\ \dot{B} = (\mu(S) - K_d) B \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [CO_2] = (1 - f_1) K_h X + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \\ \frac{d}{dt} [CH_4] = f_2 \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \end{cases}$$

Couplage entre dégradations

- ▶ matière organique non soluble \rightarrow matière organique soluble
- ▶ lyse bactérienne \rightarrow matière organique non soluble

(cf Harmand et al 2019)

$$\begin{cases} \dot{X} = -K_h X + \alpha K_d B \\ \dot{S} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B \\ \dot{B} = (\mu(S) - K_d) B \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [CO_2] = (1 - f_1) K_h X + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \\ \frac{d}{dt} [CH_4] = f_2 \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \end{cases}$$

Etude du modèle

$$\dot{X} = -K_h X + \alpha K_d B$$

$$\dot{S} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B$$

$$\dot{B} = (\mu(S) - K_d) B$$

$$[\dot{CO}_2] = (1 - f_1) K_h X + (1 - f_2) \frac{1-Y}{Y} \mu(S) B$$

$$[\dot{CH}_4] = f_2 \frac{1-Y}{Y} \mu(S) B$$

Q1. comportement des solutions, valeurs asymptotiques de S ?

Q2. production de biogaz $[CO_2] + [CH_4]$?

Hypothèses

$$\dot{X} = -K_h X + \alpha K_d B$$

$$\dot{S} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B$$

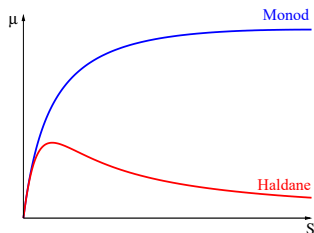
$$\dot{B} = (\mu(S) - K_d) B$$

$$[\dot{CO}_2] = (1 - f_1) K_h X + (1 - f_2) \frac{1-Y}{Y} \mu(S) B$$

$$[\dot{CH}_4] = f_2 \frac{1-Y}{Y} \mu(S) B$$

1. μ est C^1 t.q. $\mu(0) = 0$ et $S > 0 \Rightarrow \mu(S) > 0$
2. taux de mortalité : $0 < K_d < \max_s \mu(s)$
3. taux de conversion : $0 < Y < 1$
4. proportion de recyclage de lyse bactérienne : $0 < \alpha \leq 1$
5. proportions de conversion en biogaz : $0 < f_1 < 1, 0 < f_2 < 1$

Fonctions de croissance



Soit $\mathcal{E} := \{s \in \mathbb{R}_+ ; \mu(s) \leq K_d\}$

► monotone : $\mu(S) = \frac{\mu_{max} S}{K_S + S}$ (Monod)

$$\Rightarrow \mathcal{E} = [0, \lambda]$$

► non-monotone : $\mu(S) = \frac{\mu_m S}{K_S + S + \frac{S^2}{K_I}}$ (Haldane)

$$\Rightarrow \mathcal{E} = [0, \lambda^-] \cup [\lambda^+, +\infty)$$

Comportement asymptotique

$$(\Sigma) : \begin{cases} \dot{X} = -K_h X + \alpha K_d B \\ \dot{S} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B \\ \dot{B} = (\mu(S) - K_d) B \end{cases}$$

Proposition.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = S^* \leq S_0 + \frac{X_0 + \alpha B_0}{\alpha Y}$$

$$X(0) > 0 \text{ ou } S(0) > 0 \Rightarrow S^* > 0$$

Dissipativité

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{X} = -K_h X + \alpha K_d B \\ \dot{S} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B \\ \dot{B} = (\mu(S) - K_d) B \end{cases}$$

- ▶ l'orthant positif est invariant par Σ :

$$B = 0 \Rightarrow \dot{B} = 0$$

$$X = 0 \Rightarrow \dot{X} \geq 0$$

$$S = 0 \Rightarrow \dot{S} \geq 0$$

- ▶ soit $V(t) = X(t) + \alpha Y S(t) + \alpha B(t)$,

$$\frac{dV}{dt} = K_h(\alpha Y f_1 - 1) X \leq 0 \Rightarrow V(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} V_\infty \geq 0$$

Utilisation du Lemme de Barbalat

Lemme (Barbalat 1959). Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ est C^1 telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = a < +\infty$ et f' uniformément continue, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = 0$.

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{X} = -K_h X + \alpha K_d B \\ \dot{S} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B \\ \dot{B} = (\mu(S) - K_d) B \end{cases}$$

$\ddot{V} = K_h(\alpha Y f_1 - 1)(-K_h X + \alpha K_d B)$ borné $\Rightarrow \dot{V}$ unif. cont.

$$\stackrel{\text{Barbalat}}{\implies} \dot{V} = K_h(\alpha Y f_1 - 1)X \rightarrow 0 : \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = 0$$

$\ddot{X} = K_h^2 + \alpha K_d(\mu(S) - K_d - K_h)B$ borné $\Rightarrow \dot{X}$ unif. cont.

$$\stackrel{\text{Barbalat}}{\implies} \dot{X} = -K_h X + \alpha K_d B \rightarrow 0 : \lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) = 0$$

Valeurs asymptotiques de S

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{X} = -K_h X + \alpha K_d B \\ \dot{S} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B \\ \dot{B} = (\mu(S) - K_d) B \end{cases}$$

$$V = X + \alpha B + \alpha Y S \rightarrow V_\infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = S^* = \frac{V_\infty}{\alpha Y}$$

$$\frac{d}{dt}(f_1 X + S) = \left(f_1 \alpha K_d - \frac{1}{Y} \mu(S) \right) B$$

si $S^* = 0$ alors $\frac{d}{dt}(f_1 X + S)(t) \geq 0$ pour t assez grand...

Proposition. Toute solution de Σ telle que $X(0) > 0$ et $B(0) > 0$ converge asymptotiquement vers un équilibre $(0, S^*, 0)$ où $S^* > 0$ appartient à $\mathcal{E} = \{s \in \mathbb{R}_+; \mu(s) \leq K_d\}$.

Si $\eta := \mu(S^*) - K_d > 0$, alors pour t assez grand

$$\dot{B}(t) = (\mu(S(t)) - K_d) B(t) > \frac{\eta}{2} B(t) \dots$$

Étude de stabilité

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{X} = -K_h X + \alpha K_d B \\ \dot{S} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B \\ \dot{B} = (\mu(S) - K_d) B \end{cases}$$

$$J(X, S, B) = \begin{bmatrix} -K_h & 0 & \alpha K_d \\ f_1 K_h & -\frac{\mu'(S)}{Y} B & -\frac{\mu(S)}{Y} \\ 0 & \mu'(S) B & \mu(S) - K_d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J(0, S^*, 0) = \begin{bmatrix} -K_h & 0 & \alpha K_d \\ f_1 K_h & 0 & -\frac{\mu(S^*)}{Y} \\ 0 & 0 & \mu(S^*) - K_d \end{bmatrix}$$

\Rightarrow une infinité d'équilibres $(0, S^*, 0)$ **non-hyperboliques**

Attracteur

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{X} = -K_h X + \alpha K_d B \\ \dot{S} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B \\ \dot{B} = (\mu(S) - K_d) B \end{cases}$$

Proposition. Pour tout équilibre $E = (0, S^*, 0)$ avec $S^* \in \text{int } \mathcal{E}$, il existe une variété invariante \mathcal{M} de dimension 2 telle que pour toute condition initiale dans \mathcal{M} , la solution de Σ converge asymptotiquement vers E .

Soit $S^* \in \text{int } \mathcal{E}$ et une solution telle que $B(t) > 0$ pour tout $t > 0$,

$$Z(t) = \frac{f_1 X(t) + (S(t) - S^*)}{B(t)} + \beta \quad \left(\beta = \frac{\mu(S^*)/Y - f_1 \alpha K_d}{\mu(S^*) - K_d} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dZ}{dt} = -\gamma(\mu(S) - \mu(S^*)) - (\mu(S) - K_d)Z \quad \left(\gamma = \frac{K_d(1 - Y f_1 \alpha)}{Y(K_d - \mu(S^*))} \right)$$

Changements de coordonnées

$$F : \begin{bmatrix} X \\ S \\ B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \begin{bmatrix} Z = \frac{f_1 X + S - S^*}{B} + \beta \\ X \\ B \end{bmatrix} \in \mathcal{D}$$

où $\mathcal{D} := \{(Z, X, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* ; g(Z, X, B) \geq 0\}$

et $S = g(Z, X, B) := S^* - f_1 X + (Z - \beta)B$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{Z} = -\gamma(\mu(g(Z, X, B)) - \mu(S^*)) - (\mu(g(Z, X, B)) - K_d)Z \\ \dot{X} = -K_h X + \alpha K_d B \\ \dot{B} = (\mu(g(Z, X, B)) - K_d)B \end{cases}$$

Sur \mathbb{R}^3 ,

$$J(0) = \begin{bmatrix} -(\mu(S^*) - K_d) & \gamma f_1 \mu'(S^*) & \gamma \beta \mu'(S^*) \\ 0 & -K_h & \alpha K_d \\ 0 & 0 & \mu(S^*) - K_d \end{bmatrix} \text{ hyperbolique}$$

Variétés stables

$$J(0) = \begin{bmatrix} -(\mu(S^*) - K_d) & \gamma f_1 \mu'(S^*) & \gamma \beta \mu'(S^*) \\ 0 & -K_h & \alpha K_d \\ 0 & 0 & \mu(S^*) - K_d \end{bmatrix}$$

Soit \mathcal{S} la variété stable de 0 (de dimension 2).

Si $B(0) = 0$, alors $B(t) = 0$ et $X(t) \rightarrow 0$

$\Rightarrow g(Z, X, B)(t) \rightarrow S^* \Rightarrow Z(t) \rightarrow +\infty$

\Rightarrow tout $(Z, X, B) \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ vérifie $B \neq 0$

\Rightarrow Pour toute condition initiale dans $\mathcal{M} := F^{-1}(\mathcal{S} \cap \mathcal{D})$, la solution de Σ converge vers $(0, S^*, 0)$

Corollaire. Toute solution de Σ converge asymptotiquement vers l'attracteur $\mathcal{A} := \{0\} \times \mathcal{E} \times \{0\}$.

Production de biogaz

Proposition.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [CO_2](t) = [CO_2]_0 + a(X_0 + \alpha B_0) + b(S_0 - S^*)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [CH_4](t) = [CH_4]_0 + c(X_0 + \alpha B_0) + d(S_0 - S^*)$$

où

$$a = \frac{1 - f_1 + f_1(1 - f_2)(1 - Y)}{1 - \alpha Y f_1}, \quad b = \frac{(1 - f_1)\alpha Y + (1 - f_2)(1 - Y)}{1 - \alpha Y f_1},$$

$$c = \frac{f_1 f_2 (1 - Y)}{1 - \alpha Y f_1}, \quad d = \frac{f_2 (1 - Y)}{1 - \alpha Y f_1}.$$

avec a, b, c, d strictement positifs.

Production de biogaz

$$\dot{X} = -K_h X + \alpha K_d B$$

$$\dot{S} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B$$

$$\dot{B} = (\mu(S) - K_d) B$$

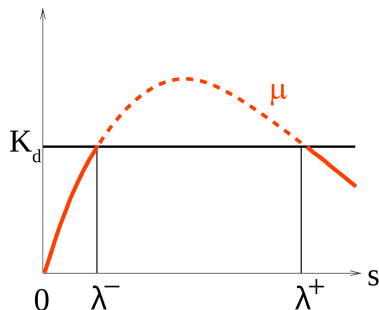
$$[CO_2] = (1 - f_1) K_h X + (1 - f_2) \frac{1-Y}{Y} \mu(S) B$$

$$[CH_4] = f_2 \frac{1-Y}{Y} \mu(S) B$$

$$\begin{cases} K_h \left[\int_0^{+\infty} X(\tau) d\tau \right] - \alpha \left[\int_0^{+\infty} \mu(S(\tau)) B(\tau) d\tau \right] = X_0 + \alpha B_0 \\ Y f_1 K_h \left[\int_0^{+\infty} X(\tau) d\tau \right] - \left[\int_0^{+\infty} \mu(S(\tau)) B(\tau) d\tau \right] = Y(S^* - S_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^{+\infty} X(\tau) d\tau = \frac{X_0 + \alpha Y(S_0 - S^*) + \alpha B_0}{K_h(1 - \alpha Y f_1)}, \\ \int_0^{+\infty} \mu(S(\tau)) B(\tau) d\tau = Y \frac{f_1 X_0 + (S_0 - S^*) + \alpha f_1 B_0}{1 - \alpha Y f_1} \end{cases}$$

Cas d'une fonction de croissance non monotone



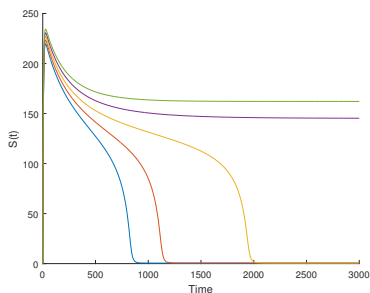
$$\mathcal{A} = \{0\} \times [0, \lambda^-] \times \{0\} \sqcup \{0\} \times [\lambda^+, +\infty) \times \{0\}$$

⇒ deux types de fonctionnement :

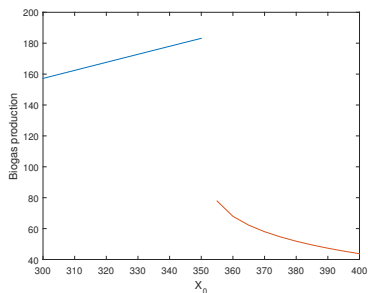
"efficace" ($S^* < \lambda^-$) ou "languissant" ($S^* > \lambda^+$)

Simulations numériques

μ_m	K_s	K_i	K_d	K_h	Y	f_1	f_2	α	S_0	B_0
0.3	160	10	0.02	0.176	0.05	0.7	0.76	0.9	0	0.2



$S(\cdot)$ pour $X_0 \in [340, 360]$



biogaz produit fonction de X_0

\Rightarrow seuil sur la charge initiale X_0 pour la production

Modèle spatialisé

$$\xi = \begin{bmatrix} X \\ S \\ B \\ [CO_2] \\ [CH_4] \end{bmatrix}$$

$$\partial_t X = -K_h X + \alpha K_d B + d_X \partial_{zz}^2 X$$

$$\partial_t S = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B + d_S \partial_{zz}^2 S$$

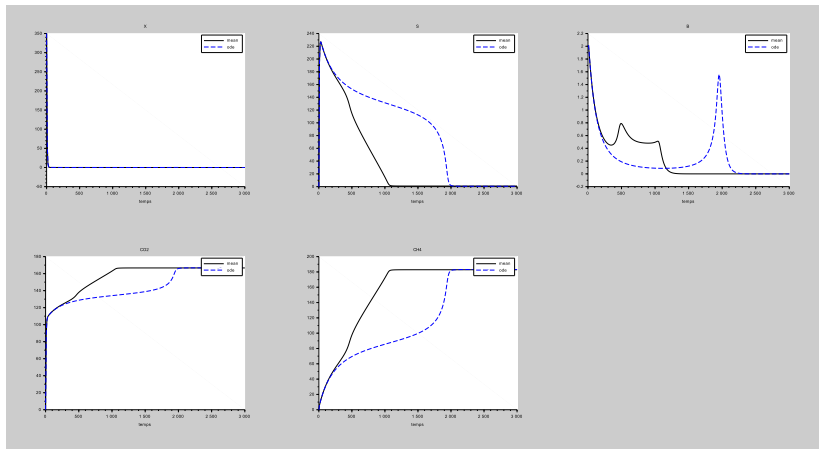
$$\partial_t B = (\mu(S) - K_d) B + d_B \partial_{zz}^2 B$$

$$\partial_t [CO_2] = (1 - f_1) K_h X + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B + d_{CO_2} \partial_{zz}^2 [CO_2]$$

$$\partial_t [CH_4] = f_2 \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) + d_{CH_4} \partial_{zz}^2 [CH_4]$$

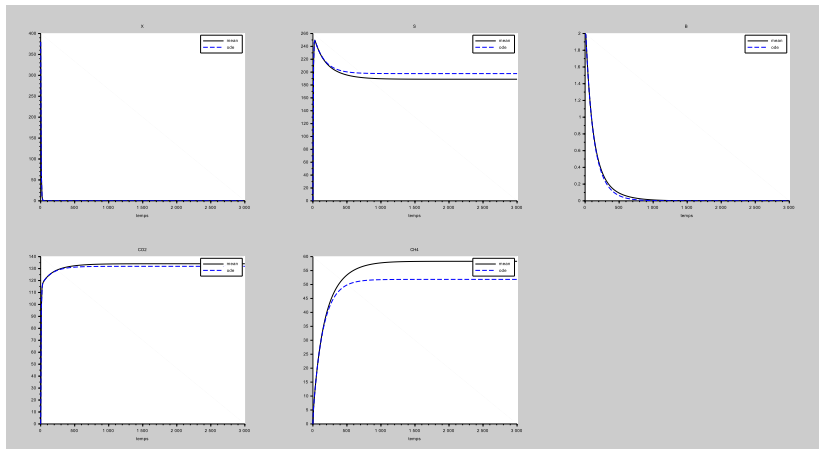
$$\partial_z \xi(t, 0) = \partial_z \xi(t, L) = 0, \quad \int_0^L \xi(0, z) dz = \begin{bmatrix} X_0 \\ 0 \\ B_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comparaisons numériques



► un profil initial non homogène peut produire **plus vite**

Comparaisons numériques



► un profil initial non homogène peut produire **plus de biogaz**

Références

OUCHTOUT S., MGHAZLI Z., HARMAND J., RAPAPORT A., BETHACHMI Z. (2020) *Analysis of an anaerobic digestion model in landfill with mortality term*, Communications on Pure and Applied Analysis, Vol. 19 (4), pp. 2333-2346.

RAPAPORT A., BAYEN, T. SEBBAH, M. DONOSO-BRAVO A., TORRICO A. (2016) *Dynamical modelling and optimal control of landfills*, Mathematical Methods and Models in Applied Sciences, Vol. 26 (3), pp. 901-929.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION